

文章编号: 1000\_0887(2005) 08\_0979\_09

# 带有升降气囊与压块的飞艇动力学建模\*

蔡自立, 屈卫东, 席裕庚

(上海交通大学 自动化研究所, 上海 200030)

(鲁传敬推荐)

摘要: 研究飞艇的动力学建模, 将飞艇的机体视为浮力与重力相等的浸没刚体, 且考虑了飞艇机体与升降气囊以及压块之间的动力学耦合作用。整体的动力学方程首先通过 Newton-Euler 定律和 Kirchhoff 方程推出。此外, 应用 Hamilton 与 Lagrange 半直积约化理论, 可以将动力学方程解释为 Lie-Poisson 系统或者 Euler-Poincaré 系统。这两种动力学描述在基于能量的控制设计中有着重要作用。

关键词: 飞艇; 动力学建模; Kirchhoff 方程; 半直积约化

中图分类号: N945.12 文献标识码: A

## 引 言

飞艇作为一种低速或者静态的平台, 在空间开发、控制与监测, 以及交通与通讯等应用领域有着广泛的应用前景<sup>[1]</sup>。

与潜水器类似, 飞艇可以视作浸没在理想流体中的刚体, 而空气阻力则视作这一理想模型之外的流体耗散<sup>[2]</sup>。然而, 与潜水器不同的是, 飞艇通常都配有升降气囊和副气囊<sup>[1]</sup>。升降气囊充满致升气体, 例如氦气, 用以产生主要的静态升力, 即浮力。而通过充气或者放气, 副气囊用于两个目的: 其一为维持上升或者下降所需要的适当的浮力, 其二为通过改变机体重心来调整姿态。另外, 飞艇通常配有压块来抵消升降气囊造成的质量变化以免在上升和下降时出现危险, 并可作为稳态运动的镇定器。由于升降气囊的充放气和压块的移动, 目前几乎所有的飞艇都是非刚性飞艇, 或称压力型飞艇。换言之, 飞艇不能视作简单的刚体。

Gomes 等人给出了包括了重力、浮力、气动阻尼和推力在内的飞艇动力学模型, 但是没有考虑升降气囊与压块的作用<sup>[1]</sup>。本文提出一个简单有效的模型用于镇定与控制设计, 将飞艇机体视作浮力与重力相等的浸没刚体, 每个升降气囊被视作有可变质量的固定位置的质点, 而压块则被视作移动质点。

本文指出升降气囊的充放气可以作为动能张量的参数变化, 并考虑了机体与内部压块之间的动力学耦合。这两个特点在镇定与控制设计中具有重要意义。动力学方程首先通过 Newton-Euler 定律与 Kirchhoff 方程推出。在 Leonard 关于潜水器的建模与稳定性分析的结果<sup>[3]</sup>

\* 收稿日期: 2003\_10\_14; 修订日期: 2005\_03\_10

基金项目: 国防重大预研项目(415011102)

作者简介: 蔡自立(1974—), 男, 湖北人, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86\_21\_62932005; E\_mail: zili\_cai@126.com)。

的启发下,本文应用 Hamilton 和 Lagrange 半直积理论<sup>[4-6]</sup>,指出动力学方程其实是 Lie-Poisson 系统,同时也是 Euler-Poincaré 系统。这两种动力学描述可以应用于基于能量方法的控制设计<sup>[7,8]</sup>。

### 1 运动学

飞艇的机体通常为近似的扁椭圆柱体。将机体坐标系(坐标系  $OXYZ$ )的原点  $O$  定在机体上的一个固定点,并使机体系的各轴沿着椭圆体的主轴。令机体系第 1 轴( $X$  轴)沿着机体的长轴(指向飞艇前端为正向),机体系第 3 轴( $Z$  轴)与第 1 轴垂直并指向飞艇底部,用右手法则确定机体系第 2 轴( $Y$  轴),它指向飞艇右侧,并与第 1、第 3 轴构成右手坐标系。惯性系用  $E\xi\eta\zeta$  表示,其第 3 轴( $\zeta$  轴)沿着重力方向。

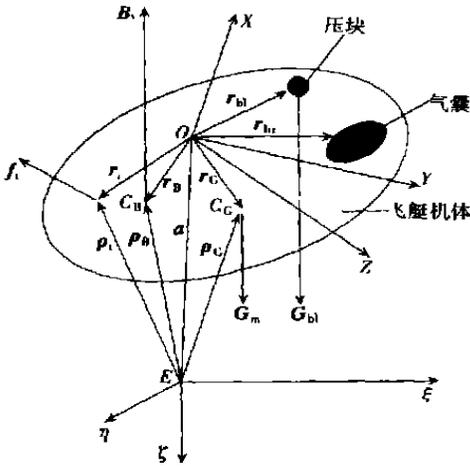


图 1 坐标系

图 1 表示了各个坐标系。  $C_B$  和  $C_G$  分别表示浮心和重心的位置。  $a$  为从惯性系原点到机体系原点的矢量,它表示机体系原点在惯性系中的位置。在惯性系和机体系中,分别用  $\rho_C$  和  $r_C$  表示重心  $C_G$  的位置,用  $\rho_B$  和  $r_B$  表示浮心  $C_B$  的位置,用  $\rho_{bi}$  和  $r_{bi}$  表示压块的位置。  $r_{bi}$  表示第  $i$  个升降气囊在机体系中的位置。作用在机体上的力为机体重力  $G_m$ 、浮力  $B_y$ 、以及其他的作用力  $f_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (发动机推力、升降舵和方向舵力,气动力等)。  $\rho_i$  表示力  $f_i$  的作用点在惯性系中的位置,而  $r_i$  则为该力作用点在机体系中的位置。作用在机体上的纯力矩用  $\tau_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 表示。作用在压块上的力为压块重力  $G_{bl}$  以及作用在其上的驱动力  $f_{bl}$ 。由于压块没有暴露在空气中,所以不

受浮力作用。矢量  $\rho_{bi}, f_{bl}$  和  $\tau_i$  在图 1 中未表示出。

用  $R^3$  中的刚体运动群  $SE(3)$  的元素表示飞艇的位置与姿态。  $SE(3)$  的元素可以表示为  $(R, a)$ , 其中  $R \in SO(3)$  为从机体系到惯性系的转动矩阵,用于描述飞艇的姿态,它可以用 RPY(roll\_pitch\_yaw)角, Euler 角或者单位四元数参数表示。若  $a_b$  为任意一点在机体系中的位置,而  $a_i$  为该点在惯性系中的位置,则有

$$\begin{bmatrix} a_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ra_b + a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

用机体系中的矢量  $V = [u, v, w]^T$  表示飞艇机体的移动速度,  $\Omega = [p, q, r]^T$  表示飞艇机体的转动速度。定义算子  $(\cdot)^\wedge: R^3 \rightarrow so(3)$ : 对于任意  $\alpha, \beta \in R^3, \alpha^\wedge \beta = \alpha \times \beta$ , 其中  $so(3)$  为  $3 \times 3$  反对称矩阵空间,即 Lie 群  $SO(3)$  的 Lie 代数。于是以下关系成立:

$$\dot{R} = R\Omega, \dot{a} = RV \tag{1a, b}$$

$\xi = (\Omega, V)$  为 Lie 代数  $se(3)$  的元素,  $se(3)$  的 Lie 括号  $[\cdot, \cdot]$  定义为

$$[\cdot, \cdot]: se(3) \times se(3) \rightarrow se(3),$$

对于  $(\Omega_i, V_i) \in se(3), i = 1, 2, [(\Omega_1, V_1), (\Omega_2, V_2)] = (\Omega_1 \times \Omega_2, \Omega_1 \times V_2 - \Omega_2 \times V_1)$ 。

假设飞艇配有若干升降气囊,它们关于  $X_OZ$  平面对称分布。视升降气囊为位置固定,质量可变的质点,其质量为  $m_{bi} = m_{\bar{bi}} + \Delta m_{bi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),带横线“ $\bar{\quad}$ ”的字母表示升降气

囊质量的标准值, 即标定质量, 前面有“ $\Delta$ ”的字母表示偏离标准值的质量变化。每一个可变质量质点  $m_{bi}$  的位置用机体系矢量  $\mathbf{r}_{bi}$  表示。忽略飞艇主气囊质量变化导致的外形改变, 将机体除了升降气囊以外的部分作为一个质量均匀分布的质块, 其质量为  $m_e$ , 质心用机体系矢量  $\mathbf{r}_e$  表示。于是飞艇机体全部的质量为  $m = m + \Delta m$ , 其中  $m = m_e + \sum_{i=1}^n m_{bi}$ ,  $\Delta m = \sum_{i=1}^n \Delta m_{bi}$ , 且全部质量  $m$  的质心, 即重心 ( $C_G$ ) 位置矢量  $\mathbf{r}_G$  为  $\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_G + \Delta \mathbf{r}_G$ , 其中  $\mathbf{r}_G = (m_e \mathbf{r}_e + \sum_{i=1}^n m_{bi} \mathbf{r}_{bi}) / (m + \Delta m)$ ,  $\Delta \mathbf{r}_G = (\sum_{i=1}^n \Delta m_{bi} \mathbf{r}_{bi}) / (m + \Delta m)$ 。此外, 视机体内部的压块为质点  $m_{bl}$ , 用  $\mathbf{a}_{bl}$ ,  $\mathbf{r}_{bl}$  分别表示惯性系原点和机体系原点到该质点的矢量。惯性系中压块速度在机体系中的表示为:  $\mathbf{V}_{bl} = \mathbf{R}^T \mathbf{a}_{bl}$ 。显然以下关系成立:  $\mathbf{r}_{bl} = \mathbf{R}^T (\mathbf{a}_{bl} - \mathbf{a})$ 。将此方程两边求导, 并注意到  $\mathbf{V}_{bl}$  的定义, 可得

$$\mathbf{V}_{bl} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{r}_{bl} + \dot{\mathbf{r}}_{bl} \quad (2)$$

运动学方程由式(1)、(2)给出。

## 2 动力学方程的 Newton\_Euler 方程描述

在假设飞艇机体为刚体, 周围空气为不可压缩、无湍动、无粘性, 无边界、无穷大体积的流体情况下, 飞艇无约束的六自由度运动是完整的, 但其周围的流体分子组成的无穷维系统却不可作为完整的系统。然而, 根据 Kirchhoff<sup>[9]</sup> 的经典研究结果, 文献[10]证明了将机体与其周围的流体组成的系统作为一个完整的六自由度系统考虑是合理的。在这一结论基础上, 飞艇的机体可以视作理想流体中的刚体, 基于势流理论的 Kirchhoff 方程给出了其运动的动力学描述。类似于文献[3]中的潜水器建模, 本节根据 Newton\_Euler 定律推导飞艇的动力学方程。

根据 Kirchhoff 的结论, 机体周围流体的动能是机体速度的二次型函数, 即

$$T_f = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a & \Theta_a^T \\ \Theta_a & \mathbf{M}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中矩阵  $\mathbf{M}_a$ 、 $\mathbf{J}_a$ 、 $\Theta_a$  分别为附加质量、附加惯量、附加质量静矩<sup>[10,11]</sup>。

机体的动能为

$$\begin{aligned} T_{bd} &= \frac{1}{2} m_e (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_e)^T (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_e) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{I}_e \boldsymbol{\Omega} + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_{bi} (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{bi})^T (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{bi}) = \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_e - m_e \hat{\mathbf{r}}_e \hat{\mathbf{r}}_e - \sum_{i=1}^n (m_{bi} + \Delta m_{bi}) \hat{\mathbf{r}}_{bi} \hat{\mathbf{r}}_{bi} & m_e \hat{\mathbf{r}}_e + \sum_{i=1}^n (m_{bi} + \Delta m_{bi}) \hat{\mathbf{r}}_{bi} \\ - m_e \hat{\mathbf{r}}_e - \sum_{i=1}^n (m_{bi} + \Delta m_{bi}) \hat{\mathbf{r}}_{bi} & \left( m_e + \sum_{i=1}^n m_{bi} + \sum_{i=1}^n \Delta m_{bi} \right) \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{bd} + \Delta \mathbf{I}_{bd}(\Delta m_{bi}) & (m + \Delta m_i) (\hat{\mathbf{r}}_G + \Delta \hat{\mathbf{r}}_G) \\ - (m + \Delta m_i) (\hat{\mathbf{r}}_G + \Delta \hat{\mathbf{r}}_G) & (m + \Delta m) \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{I}$  为  $3 \times 3$  单位矩阵,  $\mathbf{I}_e$  为质量均匀分布的质块  $m_e$  相对于  $C_G$  的惯性张量,  $\Delta \mathbf{I}_{bd}(\Delta m_{bi}) = - \sum_{i=1}^n \Delta m_{bi} \hat{\mathbf{r}}_{bi} \hat{\mathbf{r}}_{bi}$  为升降气囊充放气导致的惯性张量的变化,  $\mathbf{I}_{bd} = \mathbf{I}_e - m_e \hat{\mathbf{r}}_e \hat{\mathbf{r}}_e - \sum_{i=1}^n m_{bi} \hat{\mathbf{r}}_{bi} \hat{\mathbf{r}}_{bi}$  为升降气囊没有充放气时的惯性张量, 也即惯性张量的标定值。

压块的动能为

$$T_{bl} = \frac{1}{2} m_{bl} \mathbf{V}_{bl}^T \mathbf{V}_{bl} = \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{r}_{bl}^* \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \\ -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m\mathbf{I} & m\mathbf{I} \\ -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m\mathbf{I} & m\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{r}_{bl}^* \end{bmatrix}. \quad (5)$$

至此就可以计算包括周围流体、机体、以及压块在内的系统的全部动能,它是定义在  $SE(3) \times R^3$  的切丛  $T(SE(3) \times R^3)$  上的函数  $T$ :

$$T(\mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{r}_{bl}, \mathbf{r}_{bl}^*) = T_f + T_{bd} + T_{bl} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl}) \boldsymbol{\eta}, \quad (6)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta} = [\Omega^T, \mathbf{V}^T, \mathbf{r}_{bl}^{*T}]^T,$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}(\Delta m_{bi}) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & \mathbf{D}(\mathbf{r}_G) + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \\ \mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & \mathbf{M}(m) + m_{bl} \mathbf{I} & m_{bl} \mathbf{I} \\ -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} & m_{bl} \mathbf{I} & m_{bl} \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}(\Delta m_{bi}) = \mathbf{I}_{bd} + \Delta \mathbf{I}_{bd}(\Delta m_{bi}) + \mathbf{J}_a,$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}_G) = (m + \Delta m)(\hat{\mathbf{r}}_G + \Delta \hat{\mathbf{r}}_G) + \Theta_a^T,$$

$$\mathbf{M}(m) = m\mathbf{I} + \mathbf{M}_a = (m + \Delta m)\mathbf{I} + \mathbf{M}_a.$$

可以看出,动能的度量矩阵  $\mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl})$  由位形变量  $\mathbf{r}_{bl}$  以及物理参数  $\mathbf{r}_G$  和  $m$  决定,而  $\mathbf{r}_G$  和  $m$  的变化由升降气囊的充放气所导致。

令  $\mathbf{p}$  和  $\boldsymbol{\pi}$  分别为在惯性系中机体与压块的动量与角动量,而  $\mathbf{P}$  和  $\boldsymbol{\Pi}$  分别为惯性系中对应的动量,于是

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{R} \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{a} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{P}, \quad (7a, b)$$

根据动量定理,有

$$\begin{cases} \mathfrak{F} = \boldsymbol{\tau} + \sum_{i=1}^k \rho_i \times \mathbf{f}_i + \rho_G \times \mathbf{G}_m + \rho_{bl} \times \mathbf{G}_{bl} + \rho_B \times \mathbf{B}_y, \\ \mathfrak{p} = \mathbf{f} + \mathbf{G}_m + \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{B}_y, \end{cases} \quad (8a, b)$$

$$\text{其中 } \mathbf{f} = \sum_{i=1}^k \mathbf{f}_i, \quad \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\tau}_i.$$

式(7)对时间求微分,同时应用式(1)和(8)并注意到  $\rho_G - \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{r}_G$ ,  $\rho_B - \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{r}_B$ ,  $\rho_{bl} - \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{r}_{bl}$ ,  $\rho_i - \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{r}_i$ , 可得

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = & \boldsymbol{\Pi} \times \Omega + \mathbf{P} \times \mathbf{V} + \mathbf{r}_G \times \mathbf{R}^T \mathbf{G}_m + \mathbf{r}_{bl} \times \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{bl} + \\ & \mathbf{r}_B \times \mathbf{R}^T \mathbf{B}_y + \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\mathfrak{P} = \mathbf{P} \times \Omega + \mathbf{F} + \mathbf{R}^T (\mathbf{G}_m + \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{B}_y), \quad (9b)$$

其中  $\mathbf{F}_i = \mathbf{R}^T \mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{T} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau}$ . 令  $\mathbf{p}_{bl}$  和  $\mathbf{P}_{bl}$  分别为压块在惯性系与机体系中的动量,则  $\mathbf{p}_{bl} = m_{bl} \mathbf{a}_{bl}$ ,  $\mathbf{P}_{bl} = m_{bl} \mathbf{V}_{bl}$ ,  $\mathbf{p}_{bl} = \mathbf{R} \mathbf{P}_{bl}$ . 上述第3个方程对时间求微分,并应用  $\mathfrak{p} = \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{f}_{bl}$ , 得到

$$\dot{\mathbf{P}}_{bl} = \mathbf{P}_{bl} \times \Omega + \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{F}_{bl}, \quad (9c)$$

其中  $\mathbf{F}_{bl} = \mathbf{R}^T \mathbf{f}_{bl}$ . 方程组(9)为用伴随动量( $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}_{bl}$ )描述的飞艇机体与压块的动力学。

注意到  $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{P}_{bl}$  分别为  $\Omega$ ,  $\mathbf{V}$  和  $\mathbf{r}_{bl}^*$  的伴随动量:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi} = \partial T / \partial \Omega = & (\mathbf{J}(\Delta m_{bi}) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \Omega + (\mathbf{D}(\mathbf{r}_G) + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \mathbf{V} + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \mathbf{r}_{bl}^* \\ & \mathbf{J}(\Delta m_{bi}) \Omega + \mathbf{D}(\mathbf{r}_G) \mathbf{V} + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \mathbf{V}_{bl}, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \partial T / \partial \mathbf{V} = & (\mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \Omega + (\mathbf{M}(m) + m_{bl} \mathbf{I}) \mathbf{V} + m_{bl} \mathbf{r}_{bl}^* = \\ & \mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) \Omega + \mathbf{M}(m) \mathbf{V} + m_{bl} \mathbf{V}_{bl}, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\mathbf{P}_{bl} = \partial T / \partial \dot{\mathbf{r}}_{bl} = -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \Omega + m_{bl} \mathbf{V} + m_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl} = m_{bl} \mathbf{V}_{bl} \quad (10c)$$

以上3个方程可以写成  $\mathbf{v} = \mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl}) \boldsymbol{\eta}$ , 其中  $\mathbf{v} = [\mathbf{\Gamma}^T, \mathbf{P}^T, \mathbf{P}_{bl}^T]^T$ . 将式(10)代入到式(9), 得到

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}(\Delta m_{bl}) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{D}(\mathbf{r}_G) + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \mathbf{V} + \\ & m_{bl} (\hat{\mathbf{r}}_{bl} \Omega - \mathbf{V} - (\mathbf{Q}_{r_{bl}})^\wedge) \dot{\mathbf{r}}_{bl} + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \ddot{\mathbf{r}}_{bl} = \\ & [(\mathbf{J}(\Delta m_{bl}) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \Omega + (\mathbf{D}(\mathbf{r}_G) + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \mathbf{V} + m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl}] \times \Omega + \\ & [(\mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \Omega + (\mathbf{M}(m) + m_{bl} \mathbf{I}) \mathbf{V} + m_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl}] \times \mathbf{V} + \\ & \mathbf{r}_G \times \mathbf{R}^T \mathbf{G}_m + \mathbf{r}_{bl} \times \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{R}^T \mathbf{B}_y + \sum_{i=1}^k \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{T}, \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{M}(m) + m_{bl} \mathbf{I}) \mathbf{V} + m_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl} = \\ & [(\mathbf{D}^T(\mathbf{r}_G) - m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl}) \Omega + (\mathbf{M}(m) + m_{bl} \mathbf{I}) \mathbf{V} + m_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl}] \times \Omega + \\ & \mathbf{F} + \mathbf{R}^T (\mathbf{G}_m + \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{B}_y), \end{aligned} \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} & -m_{bl} \hat{\mathbf{r}}_{bl} \boldsymbol{\Omega} + m_{bl} \mathbf{V} + m_{bl} \dot{\mathbf{r}}_{bl} + m_{bl} \ddot{\mathbf{r}}_{bl} = \\ & m_{bl} (\mathbf{V} + \mathbf{Q}_{r_{bl}} + \dot{\mathbf{r}}_{bl}) \times \Omega + \mathbf{R}^T \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{F}_{bl}. \end{aligned} \quad (11c)$$

方程组(11)用变量  $(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl})$  描述了飞艇机体与压块的动力学。

假设在巡航或者定点情况下(即除了上升与下降以外的情况), 飞艇外蒙皮的形状以及体积不变, 因而飞艇受到的浮力不变(根据 Archimedes 定律, 浮力为飞艇机体所排开的周围空气的重力)。进一步, 假设所有升降气囊排出和抽入的空气质量总和为零, 即在式(2)、式(4)和式(5)中,  $\Delta m = 0$ 。在这两个基本假设下, 进一步假设飞艇所受的浮力与重力相等是合理的, 即有  $\mathbf{G}_m + \mathbf{G}_{bl} + \mathbf{B}_y = \mathbf{0}$ , 此外, 还可知  $m = m$ , 于是

$$\mathbf{M}(m) = m\mathbf{I} + \mathbf{M}_a, \quad \mathbf{r}_G = \left[ m_e \mathbf{r}_e + \sum_{i=1}^l m_{bi} \mathbf{r}_{bi} \right] / m, \quad \Delta \mathbf{r}_G = \left[ \sum_{i=1}^l \Delta m_{bi} \mathbf{r}_{bi} \right] / m,$$

这说明只要整个飞艇的质量保持不变, 则  $\mathbf{r}_G$  和  $\Delta \mathbf{r}_G$  就分别为重心  $C_G$  位置的标定值以及变化量。注意到总可以将机体系的原点固定在飞艇机体上的某一位置, 使得  $\mathbf{r}_G$  为零向量, 即把机体系的原点固定在重心  $C_G$  的标定位置。于是,  $\mathbf{r}_G = \mathbf{0}, \mathbf{r}_G = \Delta \mathbf{r}_G, \mathbf{D}(\mathbf{r}_G) = m \Delta \hat{\mathbf{r}}_G + \mathbf{\Theta}_a^T$ 。在以下两节中, 均假设飞艇所受的浮力与重力相等, 这等价于以上几式成立。

### 3 浮力与重力相等时动力学方程的 Lie-Poisson 描述

本节推导浮力与重力相等时, 飞艇机体与内部压块的力学方程的 Lie-Poisson 描述, 其目的是得到在维数比相空间低的空间, 即约化空间上的动力学方程。该方程是具有 Lie-Poisson 结构的非正则 Hamilton 方程, 其理论基础是约化理论<sup>[4-6]</sup>(也可参见文献[11]的论述), Leonard 曾经将这一理论用于与飞艇类似的潜水器的动力学建模<sup>[3]</sup>。Hamilton 函数在对称群的左作用下的不变性以及半直积结构对于得到约化动力学方程的 Lie-Poisson 结构有重要作用。

下面首先回顾 Lie 群的作用以及半直积, 它们是半直积约化理论的基础。

包括机体与压块在内的飞艇位形变量为  $q = ((\mathbf{R}, \mathbf{a}), \mathbf{r}_{bl}) \in G \times M, G \times M = SE(3) \times R^3$ , 是位形空间。这里 Lie 群  $G$  为  $SE(3)$ , 而流形  $M$  为  $R^3$ 。另外, 令  $V^* = R^{3*}$  为矢量空间  $V = R^3$  的对偶空间, 这两个空间可以视作等同的。定义  $G$  对  $G \times M \times V^*$  的左作用为  $\Phi: G \times (G \times M \times V^*) \rightarrow G \times M \times V^*$ : 对于  $(\mathbf{R}, \mathbf{a}) \in G = SE(3), q = ((\mathbf{R}, \mathbf{a}), \mathbf{r}_{bl}) \in G \times M, \mathbf{k} \in V^* = R^{3*}$ , 有  $\Phi((\mathbf{R}, \mathbf{a}), (q, \mathbf{k})) = (\mathbf{R}\mathbf{R}, \mathbf{R}\mathbf{a} + \mathbf{a}, \mathbf{r}_{bl}, \mathbf{R}\mathbf{k})$ , 注意  $G = SE(3)$  对  $M = R^3$  的作用是平凡的。 $(\mathbf{R}, \mathbf{a}) \in G = SE(3)$  和  $\mathbf{b} \in V = R^3$  的半直积结构按照如下方式给定。与  $\Phi$

关联的从  $SE(3)$  到  $R^3$  的自同态群的同态映射为  $\rho: SE(3) \rightarrow \text{Aut}(R^3): \rho(R, a) = R \cdot$  于是根据半直积的定义<sup>[5,6]</sup>,  $G \times V = SE(3) \times R^3$  构成了半直积, 用  $S = G \times_{\rho} V = SE(3) \times_{\rho} R^3$  表示, 其半直积乘法为  $((R_2, a_2), b_2)((R_1, a_1), b_1) = ((R_2, a_2)(R_1, a_1), \rho(R_2, a_2)b_1 + b_2) = ((R_2R_1, R_2a_1 + a_2), R_2b_1 + b_2) \cdot$  半直积  $SE(3) \times_{\rho} R^3$  的 Lie 代数用  $s = se(3) \times_{\rho} R^3$  表示, 对于  $(\Omega, V) \in se(3)$ , 其诱导出的 Lie 代数表现为  $\rho'(\Omega, V) = \Omega$ , 其 Lie 括号为

$$[((\Omega_2, V_2), b_2), ((\Omega_1, V_1), b_1)] = ((\Omega_2 \times \Omega_1, \Omega_2 \times V_1 - \Omega_1 \times V_2), \Omega_2 \times b_1 - \Omega_1 \times b_2) \cdot$$

动力学的 Hamilton 约化基于以下的定理(文献[4]的 Theorem 3. 4, 文献[5]中的 Theorem 2. 1)。

定理 1(半直积约化定理) 设  $S = G \times_{\rho} V$  为 Lie 群  $G$  与向量空间  $V$  的半直积,  $g$  为  $G$  的 Lie 代数。取  $\sigma = (\mu, a) \in g^* \times V^* = s^*$ , 通过  $\sigma$  处  $S$  的作用将  $T^*S$  约化可以得到通过  $\sigma$  的余伴随轨道  $O_{\sigma}$ 。则存在  $O_{\sigma}$  与约化空间之间的辛微分同胚, 而约化空间通过把  $T^*G$  用子群  $G_a$ (在  $a \in V^*$  处  $G$  对  $V^*$  的作用的迷向子群) 在  $\mu_a = \mu|_{g_a} \in g_a^*$  处约化得到, 其中  $\mu_a = \mu|_{g_a} \in g_a^*$  为  $G_a$  的 Lie 代数, 而  $g_a^*$  为  $g_a$  的对偶。

动力学半直积约化的基本思想由该定理产生: 考虑定义在  $G \times M$  的余切丛  $T^*(G \times M)$  上含有参数  $k \in V^*$  ( $V^*$  为向量空间  $V$  的对偶空间) 的 Hamilton 函数  $H_k$ , Lie 群  $G$  以及流形  $M$ 。假设把  $H_k$  视作映射  $H: T^*(G \times M) \times V^* \rightarrow R$  时, 它在 Lie 群  $G$  对  $T^*(G \times M) \times V^*$  的作用下是不变的。于是根据本直积定理,  $H_k$  对应的动力学经过  $k$  的迷向群  $G_k$  的约化, 与约化的 Hamilton 函数  $h$  对应的 Lie-Poisson 动力学是辛微分同胚的。约化 Hamilton 函数  $h$  定义在  $(g \times_{\rho} V)^* \times T^*M = s^* \times T^*M$  上, 且等于  $H$  在  $G$  的单位元和  $V^*$  的固定元素处的值, 其中  $g$  为 Lie 群  $G$  的 Lie 代数,  $s = g \times_{\rho} V$  为半直积  $S = G \times_{\rho} V$  的 Lie 代数。如此, 动力学方程就约化到了一个较低维数的空间上了。

包括飞艇机体、内部压块以及周围空气在内的整个系统的势能为定义在  $SE(3) \times R^3 \times R^{3*}$  上的函数  $V$ :

$$V(R, a, r_{bl}, k) = - (G_m r_G + G_{bl} r_{bl} - B_y r_B) \cdot (R^T k),$$

其中  $G_m = G_m k, G_{bl} = G_{bl} k, B_y = -B_y k$ 。  $G_m, G_{bl}$  和  $B_y$  分别为  $G_m, G_{bl}$  和  $B_y$  的值,  $k$  为惯性系中沿着重力方向的单位矢量。该势能可以看作两种机械功的和, 其一为克服重力中将飞艇上举, 使得重心与上举前机体系原点的位置重合所做的功, 其二为克服浮力将飞艇下拉, 使得浮心与下拉之前机体系原点的位置重合所做的功。注意此处将浮力作为保守力。

飞艇系统的 Hamilton 函数  $H$  (动能势能之和) 是定义在  $T^*(G \times M) \times V^{3*} = T^*(SE(3) \times R^3) \times R^{3*}$  上的函数:  $H(R, a, R^T \Pi, RP, r_{bl}, P_{bl}, k) = v^T M(r_{bl})^{-1} v / 2 - (G_m r_G + G_{bl} r_{bl} - B_y r_B) \cdot (R^T k)$ 。对于  $(R, a) \in SE(3), H(RR, Ra + a, RR^T \Pi, RRP, r_{bl}, P_{bl}, Rk) = H(R, a, R^T \Pi, RP, r_{bl}, P_{bl}, k)$ 。这说明 Hamilton 函数  $H$  是  $SE(3)$  左不变的。而由  $H_k(R, a, R^T \Pi, RP, r_{bl}, P_{bl}) = H(R, a, R^T \Pi, RP, r_{bl}, P_{bl}, k)$  定义的 Hamilton 函数  $H_k: T^*(G \times M) = T^*(SE(3) \times R^3) \rightarrow R$  在  $R^T k = k$  时是不变的, 即 Hamilton 函数  $H_k$  在  $k$  的迷向群  $G_k = \{(R, a) \in SE(3) | R^T k = k\}$  的作用下是左不变的。

于是根据动力学的半直积理论<sup>[5]</sup>, Hamilton 函数  $H_k$  所确定的  $T^*(G \times M) = T^*(SE(3) \times R^3)$  上的动力学经过  $G_k$  的约化, 等价于定义在  $s^* \times T^*M = (se(3) \times_{\rho} R^3)^* \times (R^3 \times R^{3*})$  上的约化 Hamilton 函数

$$h(\Pi, P, r_{bl}, P_{bl}, \Gamma) = H(I, 0, \Pi, P, r_{bl}, P_{bl}, R^T k) =$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl})^{-1} \mathbf{v} - (G_m \mathbf{r}_G + G_{bl} \mathbf{r}_{bl} - \mathbf{B}_y \mathbf{r}_B) \cdot \Gamma, \quad (12)$$

所确定的 Lie\_Poisson 动力学:

$$\mathbb{L} = \mathbf{ad}_{\delta h / \delta \mu}^* \mu - \frac{\delta h}{\delta \Gamma} \diamond \Gamma, \quad \mathbb{D} = - \frac{\delta h}{\delta \mu} \Gamma, \quad \mathbb{P}_{bl} = \frac{\delta h}{\delta \mathbf{P}_{bl}}, \quad \mathbb{P}_{bl}^* = - \frac{\delta h}{\delta \mathbf{r}_{bl}}, \quad (13a, b, c, d)$$

其中  $\Gamma = \mathbf{R}^T \mathbf{k}$ ,  $\mu = (\Pi, \mathbf{P}) \in se(3)^*$ ; 对于  $\xi, \eta \in g$ , 算子  $\mathbf{ad}_\xi^*$  定义为  $\mathbf{ad}_\xi^*: \eta \mapsto [\xi, \eta]$ ,  $\mathbf{ad}_\xi^*$  为  $\mathbf{ad}_\xi$  的对偶映射; 对于  $\xi \in g, a \in V^*, v \in V$ , 算子  $\diamond: V \times V^* \mapsto g^*$  通过下式定义:  $\langle v \diamond a, \xi \rangle = - \langle \xi a, v \rangle$ , 其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $g^*$  与  $g$ , 或者  $V^*$  与  $V$  之间的自然配合.

注意到对于  $\xi = (\Omega, \mathbf{V}) \in se(3)$ , 有  $\mathbf{ad}_\xi = \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{0} \\ \mathbf{V} & \Omega \end{bmatrix}$ , 且  $\mathbf{ad}_\xi^*$  为其转置, 而且对于  $V \in R^3$ ,  $\diamond: R^3 \times R^{3*} \mapsto se(3)^*$  定义为  $v \diamond w = (v \times w, \mathbf{0})$ . 于是可以推得由式(12)所定义的 Hamilton 函数  $h$  所确定的动力学(13), 它恰是  $G_m + G_{bl} + \mathbf{B}_y = \mathbf{0}, \Gamma = \mathbf{R}^T \mathbf{k}, \mathbb{D} = \Gamma \times \Omega, F = \mathbf{0}$  以及  $T = \mathbf{0}$  时的式(7). 这一事实说明浮力与重力相等时飞艇机体与内部压块之间完整的动力学方程是半直积 Lie 代数  $se(3)^* \times_{\rho} R^{3*}$  上的 Hamilton 系统.

这一动力学可以表述成 Lie\_Poisson 形式:

$$\dot{\mathbf{x}} = \Lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla h(\mathbf{x}), \quad (14)$$

其中  $\mathbf{x} = [\Pi^T, \mathbf{P}^T, \Gamma^T, \mathbf{r}_{bl}^T, \mathbf{P}_{bl}^T]^T$ ,

且

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \Pi & \mathbf{P} & \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \Gamma & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

为 Poisson 张量, 它可以用 Lie\_Poisson 括号计算. 对于定义在  $s^* \times T^* M = (se(3) \times_{\rho} R^3)^* \times R^3 \times R^{3*}$  上的两个可微函数  $f, k$ , 它们的 Lie\_Poisson 括号为:

$$\begin{aligned} \{f, k\}(\Pi, \mathbf{P}, \Gamma, \mathbf{r}_{bl}, \mathbf{P}_{bl}) &= - \left\langle (\Pi, \mathbf{P}) \left[ \left( \frac{\delta f}{\delta \Pi} \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}} \right), \left( \frac{\delta k}{\delta \Pi} \frac{\delta k}{\delta \mathbf{P}} \right) \right] \right\rangle - \\ &\left\langle \Gamma, \left( \frac{\delta f}{\delta \Pi} \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}} \right) \frac{\delta k}{\delta \Gamma} - \left( \frac{\delta k}{\delta \Pi} \frac{\delta k}{\delta \mathbf{P}} \right) \frac{\delta f}{\delta \Gamma} \right\rangle + \frac{\delta f}{\delta \mathbf{r}_{bl}} \cdot \frac{\delta k}{\delta \mathbf{P}_{bl}} - \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}_{bl}} \cdot \frac{\delta k}{\delta \mathbf{r}_{bl}} = \\ &- \left\langle (\Pi, \mathbf{P}), \left( \frac{\delta f}{\delta \Pi} \times \frac{\delta k}{\delta \Pi} \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}} \times \frac{\delta k}{\delta \mathbf{P}} - \frac{\delta k}{\delta \Pi} \times \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}} \right) \right\rangle - \\ &\left\langle \Gamma, \frac{\delta f}{\delta \Pi} \times \frac{\delta k}{\delta \Gamma} - \frac{\delta k}{\delta \Pi} \times \frac{\delta f}{\delta \Gamma} \right\rangle + \frac{\delta f}{\delta \mathbf{r}_{bl}} \cdot \frac{\delta k}{\delta \mathbf{P}_{bl}} - \frac{\delta f}{\delta \mathbf{P}_{bl}} \cdot \frac{\delta k}{\delta \mathbf{r}_{bl}} = \\ &\left( \frac{\delta f}{\delta \mathbf{x}} \right)^T \Lambda(\mathbf{x}) \left( \frac{\delta k}{\delta \mathbf{x}} \right). \end{aligned}$$

$\Lambda(\mathbf{x})$  的零空间给出了 1 组 Casimir 函数, 一般而言, 其零空间为三维的, 而 3 个相互独立的 Casimir 函数为

$$C_1 = \mathbf{P} \cdot \Gamma, \quad C_2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}\|^2, \quad C_3 = \frac{1}{2} \|\Gamma\|^2.$$

#### 4 浮力与重力相等时动力学方程的 Euler\_Poincaré 描述

与上一节类似, 本节推导浮力与重力相等时, 飞艇机体与内部压块之间完整动力学方程的 Euler\_Poincaré 形式. 这一推导过程基于以下的定理(文献[5]中 Theorem 6.1 的一种不同的叙述).

定理2 考虑 Lie 群  $G$  平凡地作用于其上的流形  $M$ , 以及向量空间  $V$  及其对偶空间  $V^*$ , Lagrange 函数  $L: T(G \times M) \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$  表示为  $L(d, q, \dot{q}, \dot{q}^*, a_0)$ ,  $d \in G, q \in M, a_0 \in V^*$ . 假设  $G$  对  $V$  的  $V^*$  作用满足  $\langle da, dv \rangle = \langle a, v \rangle, a \in V^*, v \in V$ , 且 Lagrange 函数  $L$  满足不变性:

$$L(d'd, q, d'\dot{q}, \dot{q}^* d'a_0) = L(d, q, \dot{q}, \dot{q}^* a_0), \quad d' \in G.$$

令  $l(e, q, \xi, \dot{q}^* a_0) = l(\xi, q, \dot{q}^* a_0)$ , 其中  $e$  为  $G$  的单位元,  $\xi = d^{-1}\dot{q} \in \mathfrak{g}, a = d^{-1}a_0 \in V^*$ . 则  $a_0$  不变的 Lagrange 函数  $L$  所确定的  $T(G \times M)$  上的动力学, 经过  $a_0$  的迷向群  $G_{a_0}$  的约化, 等价于  $\mathfrak{g} \times TM \times V^*$  ( $\mathfrak{g}$  为  $G$  的 Lie 代数) 上由  $l$  所确定的动力学方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta l}{\delta \xi} = \text{ad}^*_{\xi} \frac{\delta l}{\delta \xi} + \frac{\delta l}{\delta a} \diamond a, \quad \text{ad}^*_{\xi} a = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{q}} = 0,$$

其中算子  $\text{ad}^*_{\xi}$  定义为  $\text{ad}^*_{\xi}: \eta \mapsto [\xi, \eta], \xi, \eta \in \mathfrak{g}, \text{ad}^*$  为  $\text{ad}$  的对偶映射; 对于  $\xi \in \mathfrak{g}, a \in V^*, v \in V$ , 算子  $\diamond: V \times V^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  通过下式定义:

$$\langle v \diamond a, \xi \rangle = - \langle \xi a, v \rangle,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示表示  $\mathfrak{g}^*$  与  $\mathfrak{g}$ , 或者  $V^*$  与  $V$  之间的自然配合.

考虑由与内部压块耦合的飞艇机体的 Lagrange 函数  $L: T(G \times M) \times V^* = T(SE(3) \times R^3) \times R^{3*} \rightarrow \mathbb{R}$ , 其表达式为  $L(\mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{R}\Omega, \mathbf{R}\mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl}, \mathbf{k}) = T - V = (1/2) \eta^T \mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl}, \mathbf{r}_G, m) \eta + (G_m \mathbf{r}_G + G_{bl} \mathbf{r}_{bl} - \mathbf{B}_y \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{k})$ . 与上一节中的 Hamilton 函数  $H$  和  $H_k$  类似, 可以验证 Lagrange 函数  $L$  为  $SE(3)$  不变的, 而且由  $L_k(\mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{R}\Omega, \mathbf{R}\mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl}) = L(\mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{R}\Omega, \mathbf{R}\mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl}, \mathbf{k})$  定义的 Lagrange 函数  $L_k: T(SE(3) \times R^3) \rightarrow \mathbb{R}$  是  $G_k$  不变的.

于是根据定理 2,  $T(G \times M) = T(SE(3) \times R^3)$  上由  $L_k$  确定的动力学, 经过  $G_k$  的约化, 等价于  $(se(3) \times \rho R^3) \times R^3 \times R^{3*}$  上的约化 Lagrange 函数  $l$  所确定的动力学:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \xi} = \text{ad}^*_{\xi} \frac{\partial l}{\partial \xi} + \frac{\partial l}{\partial \Gamma} \diamond \Gamma, \quad \mathbb{B} = - \xi \Gamma, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial l}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{bl}} - \frac{\partial l}{\partial \mathbf{r}_{bl}} = 0, \quad (15a, b, c)$$

其中  $l$  定义为

$$l(\Omega, \mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl}, \Gamma) = L(\mathbf{I}, \mathbf{0}, \Omega, \mathbf{V}, \mathbf{r}_{bl}, \dot{\mathbf{r}}_{bl}, \mathbf{R}^T \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \eta^T \mathbf{M}(\mathbf{r}_{bl}, \mathbf{r}_G, m) \eta + (G_m \mathbf{r}_G + G_{bl} \mathbf{r}_{bl} - \mathbf{B}_y \mathbf{r}_B) \cdot \Gamma \quad (16)$$

由约化 Lagrange 函数可以推导动力学 (15), 其恰是  $G_m + G_{bl} + \mathbf{B}_y = \mathbf{0}, \Gamma = \mathbf{R}^T \mathbf{k}, \mathbb{B} = \Gamma \times \Omega, \mathbf{F} = \mathbf{0}$  以及  $T = \mathbf{0}$  时的式 (11). 这一事实说明浮力与重力相等时飞艇机体与内部压块之间完整动力学方程是  $se(3) \times R^{3*}$  上的 Euler-Poincaré 系统.

## 5 结 论

本文推导出带有升降气囊与压块的飞艇动力学方程, 该动力学方程首先通过 Newton-Euler 方程推出. 此外, 本文推导了该系统的 Lie-Poisson 结构, 使得动力学方程成为 Lie 代数半直积上的 Hamilton 系统. 本文还推导了与 Hamilton 方程对应的 Euler-Poincaré 方程. 在基于能量方法的控制设计中, 例如 Ortega 等提出的互联与阻尼分配控制 (interconnection and damping assignment control)<sup>[7]</sup>, 以及 Bloch 等的受控 Lagrange 函数方法 (controlled Lagrangian methods)<sup>[8]</sup>, 动力学方程的这两种表述有十分重要的作用. 基于这两种方法的控制策略将在今后研究.

### [参 考 文 献]

[1] Gomes Sergio B, Varella, Ramos Josure Jr G. Airship dynamic modeling for autonomous operation

- [A]. In: Robotics & Automation, IEEE Ed. Proceeding of the 1998 IEEE International Conference on Robotics & Automation [C]. Leuven, Belgium: IEEE. 1998, 3462—3467.
- [2] Sagatun Svein I, Fossen Thor I. Lagrangian formulation of underwater vehicles' dynamics [A]. In: Proceeding of the 1991 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics [C]. 1991, 1029—1034.
- [3] Leonard N E. Stability of a bottom-heavy underwater vehicle [J]. Automatica, 1997, **33**(3): 331—346.
- [4] Marsden J E, Ratiu T S, Weinstein A. Semi-direct products and reduction in mechanics [J]. Transaction of American Mathematics Society, 1984, **281**(1): 147—177.
- [5] Cendra H, Holm D D, Marsden J E, et al. Lagrangian reduction, the Euler-Poincaré equations, and semidirect products [J]. American Mathematics Society Translation, 1997, **186**(1): 1—25.
- [6] Holm D D, Marsden J E, Ratiu T S. The Euler-Poincaré equations and semi-direct products with application to continuum theories [J]. Advances in Mathematics, 1998, **137**(1): 1—81.
- [7] Ortega R, Spong Mark W, Gomez-Estern F, et al. Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2002, **47**(12): 1218—1233.
- [8] Bloch A M, Leonard N E, Marsden J E. Controlled Lagrangian and the stabilization of mechanical systems—I the first matching theorem [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2000, **45**(12): 2253—2270.
- [9] Kirchhoff G. Über die bewegung eines rotationskörpers in einer flüssigkeit [J]. Crelle's Journal, 1869, **71**(3): 237—273.
- [10] Lamb H. Hydrodynamics [M]. London: Cambridge University Press, 1932, 12—120.
- [11] Marsden J E. Introduction to Mechanics and Symmetry [M]. second edition. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 369—396.

## Dynamic Modeling for Airship Equipped With Ballonets and Ballast

CAI Zi-li, QU Wei-dong, XI Yu-geng

(Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University,  
Shanghai 200030, P. R. China)

**Abstract:** Total dynamics of an airship is modeled. The body of an airship was taken as a submerged rigid body with neutral buoyancy, i. e., buoyancy with value equal to that of gravity, and the coupled dynamics between the body with ballonets and ballast was considered. The total dynamics of the airship was firstly derived by Newton-Euler laws and Kirchhoff's equations. Furthermore, by using Hamiltonian and Lagrangian semi-direct product reduction theories, the dynamics was formulated as a Lie-Poisson system, and also an Euler-Poincaré system. These two formulations can be exploited for the control design using energy-based methods for Hamiltonian or Lagrangian system.

**Key words:** airship; dynamical modeling; Kirchhoff's equation; semi-direct product reduction