

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0972_07

基于多尺度再生核质点法的 h 型自适应分析*

张智谦, 周进雄, 王学明, 张艳芬, 张 陵

(西安交通大学 建筑工程与力学学院, 西安 710049)

(顾元宪 推荐)

摘要: 基于多尺度再生核质点法(RKPM)的多分辨分析特性,给出了适于求解二维问题的 h 型自适应分析方法,讨论了不同高梯度指标对检测高梯度区的影响,同时还提出了基于邻节点搜索(SNN)及局部 Delaunay 三角分解(LDT)技术的适于任意节点分布的无网格自适应分析节点加密技术.通过对二维线弹性平面应力及平板弯曲问题的 h 型自适应分析,说明了不合适的高梯度指标将对自适应分析的收敛造成不良影响,且 LDT 节点加密技术较 SNN 技术的效率更高.数值算例的结果说明自适应分析的有效性、稳定性及良好的收敛特性

关键词: 无网格方法; 再生核质点法; 多分辨分析; 自适应分析

中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

作为无网格方法的一种,多尺度再生核质点法(RKPM)^[1,2]不仅具有无网格方法的一般性质,且具有独特的多分辨特性,可将结构响应(位移、应力等)进行不同尺度的分解.由于结构响应的高尺度解是响应梯度与误差信息的有效指标,因而可对高梯度或高误差区进行定位,并通过在该区插入新节点以进行 h 型自适应分析获得更为精确的求解^[2,3].且这一自适应分析无需其他方法(如 hp Cloud, EFGM 和 FEM 等)自适应分析时必需的后验误差估计.

本文基于邻节点搜索技术与局部 Delaunay 三角分解给出了两种适用于二维问题的自适应插点方案,并构造了基于多尺度 RKPM 方法的自适应分析过程.通过数值算例比较了两种节点加密方案的效率,分析了不同高梯度指标对自适应分析收敛特性的影响,并说明了本文自适应分析方法的有效性与收敛性.

1 多尺度 RKPM 方法

再生核方法(RKM)的基本原理为下式所示的适用于有限域的修正卷积^[1]

$$u^R(x) = \int_{\Omega} C_a(x; x-s) \phi_a(x; x-s) u(s) ds, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2004_05_06; 修订日期: 2005_03_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10202018)

作者简介: 张智谦(1977—),男,河南郑州人,博士(联系人. Tel: + 86_29_82663093;

E_mail: meshfreemethods@yahoo.com.cn)

式中, a 为膨胀因子, $C_a(\cdot)$ 为修正函数, $\phi_a(\cdot)$ 为核函数, 本文采用三次样条函数. 多尺度 RKPM 方法采用了如下式所示的核函数序列 $\left\{ \phi_m(x; x-s) \right\}^{[1]}$

$$\phi_m(x; x-s) = \frac{1}{2^m a_0} \phi \left[x; \frac{x-s}{2^m a_0} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

式中, a_0 为初始膨胀因子, ϕ_m 即为 m 尺度核函数. 与式(2)相关的小波函数如下式所示

$$\begin{aligned} \phi_m(x; x-s) &= \phi_{m-1}(x; x-s) - \phi_m(x; x-s) = \\ &C(2^{m-1} a_0, x, s) \phi_{m-1}(x; x-s) - C(2^m a_0, x, s) \phi_m(x; x-s), \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $C(2^m a_0, x, s)$ 为 m 尺度的修正函数, $\phi_m(x; x-s)$ 为尺度函数. 由此, 对响应的多尺度分解可由多尺度再生核方法的基本公式进行计算:

$$u^R(x) = \sum_{m=1}^n u_m(x) + u_n(x), \quad (4)$$

式中

$$\begin{cases} u_n(x) = \int_{\Omega} C(2^n a_0, x, s) \phi_n(x; x-s) u(s) ds, \\ w_m(x) = \int_{\Omega} \phi_m(x; x-s) u(s) ds. \end{cases} \quad (5)$$

为给出多尺度 RKPM 方法的简洁表达, 本文定义如下算子 $P_m^{[1]}$

$$P_m u(x) = \sum_{l=1}^N \Phi_{m,l}(x-x_l) u_l, \quad (6)$$

式中 N 为用于离散域 Ω 的节点个数. $P_m u(x)$ 给出了 $u(x)$ 的尺度函数解或低尺度解. 由式(3), 可定义算子 $Q_m^{[1]}$ 如下

$$Q_m u(x) = \sum_{l=1}^N \Psi_{m,l}(x-x_l) u_l = P_{m-1} u(x) - P_m u(x), \quad (7)$$

$Q_m u(x)$ 为 $u(x)$ 的小波函数解或高尺度解. 至此, 我们得到了多尺度 RKPM 方法的基本公式,

$$u^R(x) = \sum_{m=1}^n Q_m u(x) + P_n u(x). \quad (8)$$

文献[1]的研究说明形函数的低尺度与高尺度解在频域分别起到了低通滤波器与带通滤波器的作用. 而且高尺度解 $Q_n u(x)$ 与 $u^R(x)$ 的梯度及误差密切相关, 因此可视为对 $u^R(x)$ 进行误差估计的有效指标. 从而, 借助 $Q_n u(x)$ 可检测出 $u^R(x)$ 的高梯度或高误差区, 并对此区域进行细化来实现 h 型自适应分析以获得更为精确的解.

本文采用文献[4]中给出的基于单位分解理论的数值积分, 用 RKPM 获得位移场 u . 采用多尺度 RKPM 方法就可以对应力应变进行多分辨分析, 下列公式给出应力应变的高尺度解

$$Q_m \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Q_m u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial Q_m u_j}{\partial x_i} \right], \quad (9)$$

$$Q_m \sigma_{ij} = D_{ijkl} Q_m \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

应力与应变低尺度解可通过类似的方法求得. 通过类似 von Mises 等效应力的定义, 可由下式求得平面应力问题等效 von Mises 应力高尺度解

$$Q_m \sigma_{\text{von}} = \left[(Q_m \sigma_x - Q_m \sigma_y)^2 + 3(Q_m \tau_{xy})^2 \right]^{1/2}, \quad (11)$$

$Q_m \sigma_{\text{von}}$ 可被视作度量各应力分量高尺度解综合效果的工具^[3]. 通过类似方法可求得低尺度分量 $P_n \sigma_{\text{von}}$. 应注意 $Q_m \sigma_{\text{von}}$ 与 $P_n \sigma_{\text{von}}$ 并非真正的 von Mises 应力的低尺度与高尺度解, 即

$$\sigma_{\text{von}} \neq P_n \sigma_{\text{von}} + \sum Q_m \sigma_{\text{von}} \quad (12)$$

2 h 型自适应分析

2.1 高梯度指标的选择与高梯度区的检测技术

多尺度 RKPM 方法的 h 型自适应分析首先需确定可提供准确且足够的梯度信息的高梯度指标, 如应力高尺度解 $Q_n \sigma_{ij}$. 一般而言, $Q_n \sigma_{\text{von}}$ 是一个有效的高梯度指标, 然而, 由于 $Q_n \sigma_{\text{von}}$ 给出的是各应力分量高尺度解的综合效果, 因此对某些问题, 某些应力分量局部的梯度信息通过式 (11) 的计算会相互抵消从而提供不准确的梯度信息. 因此, 针对不同的问题需灵活选择高梯度指标. 采用的小波理论中的边缘检测技术即可根据高梯度指标确定响应量的高梯度区. 常用的边缘检测技术有: 零点检测^[1]与极值检测^[3]. 本文采用阈值为 25% 的极值检测技术.

2.2 插点方案

文献[1, 3, 5]中给出了几种应用于无网格 h 型自适应分析的插点方案. 这些方案需构造 voronoi 图或需要背景积分网格的联通性信息. 而本文采用基于单位分解的数值积分方法, 因而无法采用上述方案. 本文给出两种适于二维问题任意节点分布的节点加密方案, 如图 1 与图 2. 设节点 i 为高梯度节点, 影响域为 Ω_i . 第 1 种基于邻节点搜索技术的插点方案需以节点 i 为原点建立辅助局部极坐标系 $rO'\theta$, 然后将坐标平面均分为 n 个部分. 在每个部分中搜索距节点 i 最近的邻节点. 当邻节点满足: 1) 在影响域 Ω_i 中, 2) 同节点 i 的距离大于 $2 \times d_m$ (d_m 为预先给定的最小允许节点间距), 则在该邻节点与节点 i 连线的中点处增加新节点. 当子域 Ω_i 被均分为 4 部分时, 该技术等效于基于四象限法则的搜索技术. 第 2 个方案采用局部 Delaunay 三角分解技术, 如图 2. 该方案将影响域中的节点视作 Delaunay 三角形的顶点. 若某 Delaunay 三角形的顶点之一为节点 i (图 2 中灰色三角形), 则在该三角形长度大于等于 $2 \times d_m$ 的边的中点插入新节点. 采用上述两种方案进行节点加密时, 还应注意: 1) 插点之后需删除重复的冗余节点, 使得任一位置只有 1 个节点; 2) 若两新节点间距离小于 d_m , 则需删除其中 1 个节点, 以避免会对求解带来不良影响的节点聚集. 这两种节点加密技术同样适于其他无网格方法的 h 型自适应分析, 且可方便的转化为适于三维问题的节点加密.

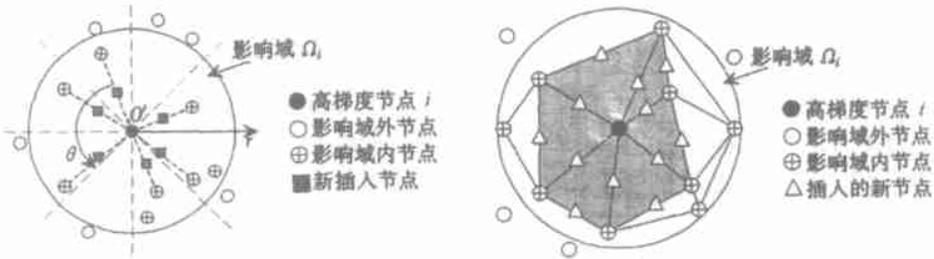


图 1 基于邻节点搜索技术的插点方案

图 2 基于局部 Delaunay 三角化的插点方案

2.3 误差指示

评价自适应分析的收敛性与算法性能时, 需要计算迭代过程中每步求解的误差. 对具有精确解的问题, 可采用 L^2 能量误差, 则第 k 步求解的能量误差可由下式计算

$$\|e_k\|_{L^2} = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \left\{ \epsilon_k^a - \epsilon_k^e \right\}^T \left\{ \sigma_k^a - \sigma_k^e \right\} d\Omega \right]^{1/2}, \quad (13)$$

式中, $(\cdot)_k^e$ 与 $(\cdot)_k^a$ 分别为相应物理量的精确解与数值解. 对无精确解的问题采用如下相对误

差^[6]

$$e_k^R = \frac{\|\sigma_k - \sigma_{k-1}\|_{L^2}}{\|\sigma_k\|_{L^2}} \quad (14)$$

因为在自适应分析过程中节点总数在增加,因此上式只计算 $\{x_i\}_k \cap \{x_i\}_{k-1}$ 处的节点误差,其中 $\{x_i\}_k$ 与 $\{x_i\}_{k-1}$ 分别表示第 k 步与第 $k-1$ 步的节点。

2.4 自适应分析算法流程

基于多尺度 RKPM 方法的 h 型自适应分析的算法流程可由下列各步给出:

- 1) 采用第 1 节给出的多尺度 RKPM 方法对问题进行多分辨分析
- 2) 通过对高梯度指标进行边缘检测(零点检测或极值检测),定位高梯度区。
- 3) 使用前文给出的插点方案细化高梯度区,并得到新的节点集 $\{x_i\}_k$ 。
- 4) 如果第 3) 步无新的节点产生,则跳转至第 6) 步;否则,对节点集 $\{x_i\}_k$ 进行多分辨分析,并计算能量误差 $\|e_k\|_{L^2}$ 或相对误差 e_k^R 。
- 5) 如果 $\|e_k\|_{L^2} \leq c$ 或者 $e_k^R \leq c$, c 为预先给定的允许误差,跳转至第 6) 步;否则跳转至第 1) 步。
- 6) 结束。

3 数值算例

3.1 计算模型

本文对 2 个平面应力问题及 1 个平板弯曲问题进行了多分辨分析与 h 型自适应分析。

问题 1 为 x 向受均匀拉伸的无限大中孔板,拉应力为 1 Pa,计算模型如图 3 所示;实际计算中施加的轴向载荷 P_x 和 P_y 为由解析解求得的真实应力值。问题 2 为 x 向受均匀拉伸的方形中孔板,1/4 对称模型如图 4 所示。图 5 所示为四边固定平板弯曲问题计算模型,区域 I 与区域 II 分别受 1 MPa 与 -1 MPa 的法向均布载荷,板厚 0.01 m。材料特性为弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa,泊松比 $\nu = 0.3$ 。3 个问题的初始离散节点总数分别为 160, 96 和 81。

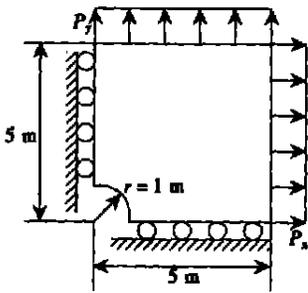


图 3 问题 1 的计算模型

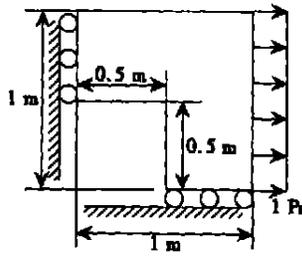


图 4 问题 2 的计算模型

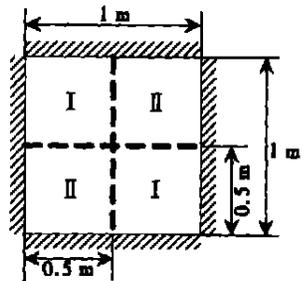


图 5 问题 3 的计算模型

3.2 多分辨分析数值结果

本文对问题 1 进行了 4 尺度多分辨分析。图 6 给出了 σ_{von} 与 $Q_4 \sigma_{\text{von}}$ 的三维云图,图中 z 轴表示各物理量的幅值。由图可见, $Q_4 \sigma_{\text{von}}$ 的极值同 σ_{von} 的高梯度区紧密相关,因此, $Q_4 \sigma_{\text{von}}$ 可以被方便的用于检测 σ_{von} 的高梯度区。作者通过大量的数值计算发现:自适应分析中,2 尺度多分辨分析的高尺度解所提供的梯度信息足以满足定位响应的高梯度区的需要。图 7 对问题 2 给出 2 尺度多分辨分析的应力高尺度解 $Q_1 \sigma_x$ 与 $Q_1 \sigma_{\text{von}}$ 的三维云图。由图可看出:由于 $Q_1 \sigma_x$ 、

$Q_1 \sigma_y$ 与 $Q_1 \tau_{xy}$ 在中心方孔顶点处的梯度信息经式(11)的计算相互抵消, 因而 $Q_1 \sigma_{von}$ 无法检测出由 $Q_1 \sigma_x$ 检测出的该处的应力高梯度区(由“○”标出)。因此, 后面对问题2的自适应分析中, 采用由 $Q_1 \sigma_x$ 与 $Q_1 \sigma_y$ 所检测出的高梯度节点的并集来确定高梯度区。对问题3, 本文采用平板弯曲挠度 w 的高尺度解 $Q_1 w$ 作为高梯度指标。使用 RKPM 求解平板弯曲问题时需由 2 阶再生条件获得 RKPM 形函数。

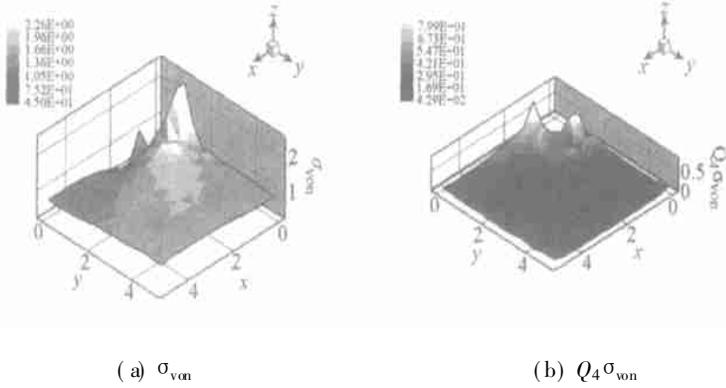


图 6 问题 1 σ_{von} 与 $Q_4 \sigma_{von}$ 的三维云图

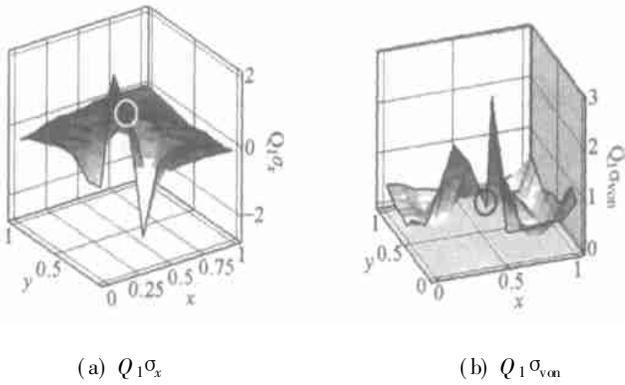
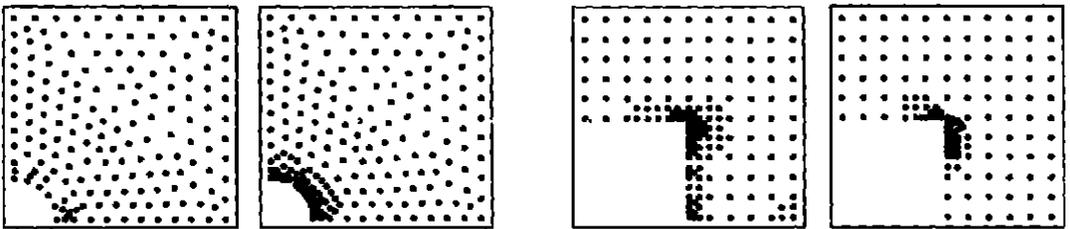


图 7 问题 2 $Q_1 \sigma_x$ 与 $Q_1 \sigma_{von}$ 的三维云图



(a) SNN 插点方案 (b) LDT 插点方案 (a) 高梯度指标: $Q_1 \sigma_x$ 和 $Q_1 \sigma_y$ (b) 高梯度指标: $Q_1 \sigma_{von}$

图 8 自适应分析节点分布结果(问题 1)

图 9 自适应分析节点分布结果(问题 2)

3.3 h 型自适应分析的数值结果

3 个问题的自适应分析所采用允许最小节点间距分别为 0.1 m、0.02 m 和 0.03 m。图 8 比较了对问题 1 采用不同插点方案的节点最终分布。采用 SNN 插点方案的自适应分析共进行了 6 次插点操作, 最终节点数为 181; 采用 LDT 插点方案的分析共进行了 8 次插点操作, 最终节

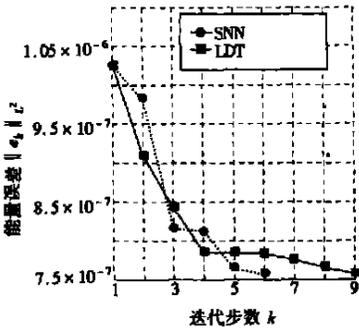


图 10 问题 1 能量误差收敛曲线

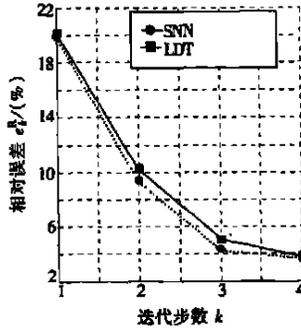


图 11 问题 2 相对误差收敛曲线(采用 $Q_1\sigma_x$ 和 $Q_1\sigma_y$ 作为高梯度指标)

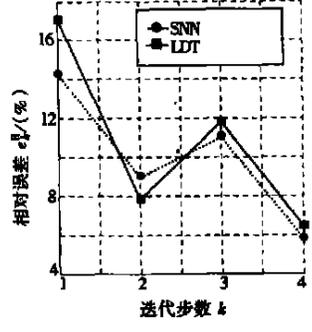
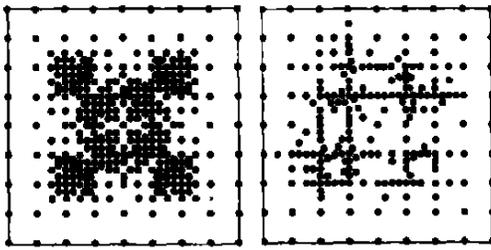


图 12 问题 2 相对误差收敛曲线(采用 $Q_1\sigma_{von}$ 作为高梯度指标)



(a) LDT 插点方案 (b) SNN 插点方案

图 13 问题 3 最终节点分布

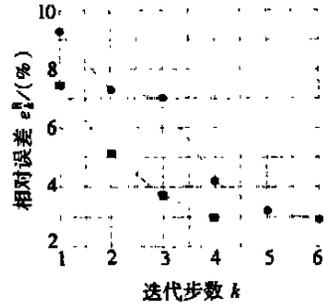


图 14 问题 3 相对误差收敛曲线

点数为 207。结果显示这两种插点方案均能对高梯度区成功的进行细化; LDT 插点方案对高梯度区的细化程度更高。图 9 给出了分别采用 $Q_1\sigma_x$ 和 $Q_1\sigma_y$, 与采用 $Q_1\sigma_{von}$ 作为高梯度指标对问题 2 进行自适应分析的结果, 节点总数分别为 187 和 136。对比两图可知高梯度指标的不当选择对自适应分析结果的影响。图 10 给出问题 1 自适应分析的误差收敛曲线, 图 11 与图 12 给出了问题 2 采用不同高梯度指标进行的自适应分析的相对误差收敛曲线。对比这 3 个图可知本文所给的 h 型自适应方法的收敛性与稳定性, 而且不当的高梯度指标将会导致自适应分析的不稳定。图 13 给出了对问题 3 进行自适应分析的最终节点分布, 采用 LDT 与 SNN 方案获得的最终节点总数分别为: 377 和 227。自适应分析的收敛曲线如图 14 所示。结果同样说明了本文 h 型自适应分析的稳定性与收敛性。

4 结 论

本文给出了两种适用于任意节点分布的无网格方法的自适应插点方案: 基于邻节点搜索技术与局部 Delaunay 三角化的插点方案; 探讨了使用多尺度 RKPM 方法计算所得的问题响应的高尺度解与响应高梯度区之间的关系: 响应量的高尺度解可成功的指示问题响应的梯度信息; 并且给出了基于多尺度 RKPM 方法的 h 型自适应分析的解决方案。对 3 个问题进行的多分辨率分析以及自适应分析表明, 若高尺度指标的选择不当将会引起自适应分析的不稳定。自适应分析中的节点加密结果说明本文给出的两种节点加密方案都能有效地细化高梯度区, 且 LDT 技术的效率要高于 SNN 技术。最后, 自适应分析的误差收敛曲线说明了本文给出的 h 型

自适应分析方法的稳定性、收敛性,并能够有效地改进求解精度,降低求解误差。

[参 考 文 献]

- [1] Liu W K, Chen Y, Uras R A, et al. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods[J]. *Comput Mech*, 1996, **139**(1): 73—111.
- [2] Liu W K, Jun S. Multiple scale reproducing kernel particle methods for large deformation problems [J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 1998, **41**(7): 1339—1362.
- [3] Lee S H, Kim H J, Jun S. Two scale meshfree method for adaptivity of 3_D stress concentration problems[J]. *Comput Mech*, 2000, **26**(4): 376—387.
- [4] ZHANG Zhi_qian, ZHOU Jin_xiong, WANG Xue_ming, et al. Investigations on reproducing kernel particle method enriched by partition of unity and visibility criterion[J]. *Comput Mech*, 2004, **34**(4): 310—329.
- [5] Duarte C A, Oden J T. An h_p adaptive method using clouds[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**(1): 237—262.
- [6] Gavete L, Falcón S, Ruiz A. An error indicator for the element free Galerkin method[J]. *European J Mech, A Solids*, 2001, **20**(3): 327—341.

h Adaptivity Analysis Based on Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Method

ZHANG Zhi_qian, ZHOU Jin_xiong, WANG Xue_ming,
ZHANG Yan_fen, ZHANG Ling

(School of Civil Engineering and Mechanics, Xi'an Jiaotong University,
Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract: An h -adaptivity analysis scheme based on multiple scale reproducing kernel particle method was proposed, and two nodes refinement strategies were constructed using searching_neighbor_nodes (SNN) and local_Delaunay_triangulation (LDT) techniques, which were suitable and effective for h -adaptivity analysis on 2_D problems with the regular or irregular distribution of the nodes. The results of multiresolution and h -adaptivity analyses on 2_D linear elastostatics and bending plate problems demonstrate that the improper high_gradient indicator will reduce the convergence property of the h -adaptivity analysis, and that the efficiency of the LDT node refinement strategy is better than SNN, and that the presented h -adaptivity analysis scheme is provided with the validity, stability and good convergence property.

Key words: meshfree method; reproducing kernel particle method; multiresolution analysis; adaptive analysis