

文章编号: 1000-0887(2005) 08-0965-07

固体中短波传播的单位分解有限元法^{*}

李锡夔, 周浩洋

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(钟万勰推荐)

摘要: 提出了固体中短波传播数值模拟的单位分解有限元法。有限元空间由形成单位分解的标准等参有限元形函数乘以定义为局部子空间基函数的特殊形函数构成。特殊形函数使试空间中包含了关于波动方程的已有知识, 因而在单个单元内能近似地再现高度振荡性质。数值例题显示了所提出单位分解有限元在计算精度和效率上的良好性能。

关键词: 短波传播; 固体介质; 单位分解有限元法

中图分类号: O347.4 **文献标识码:** A

引 言

鉴于标准有限元插值近似的多项式本质, 除非单元尺寸划分得非常小, 否则难以模拟高梯度或高振荡的波传播过程。以线性单元为例, 单元尺寸需要小于最小波长的 $1/10$ 才能达到尚可接受的精度要求。即使这样, 在实践中这也将导致所需的求解时间不可接受, 因此标准有限元方法对短波问题的数值模拟存在严重的困难。此外, Helmholtz 方程数值解的研究表明, 即使对每个波长设置 10 个节点, 由于污染误差 (pollution error) 的影响, 精度仍然会随着波数增大而大大受损^[1]。事实上, Zienkiewicz 把短波问题数值模拟视为有限元方法两个尚未解决的主要问题之一^[2]。

Melenk 与 Babuska^[3] 和 Duarte 与 Oden^[4] 分别独立地提出了一个系统和普适的方法——单位分解有限元方法 (PUFEM, 或称为广义有限元方法, GFEM) 或称为“基于云的 h_p 有限元方法”。该方法被视作解决上述问题的一个重要途径。高频振荡解的波形可以作为子空间的局部基底引入单元形函数, 这被归结为一类特殊的 PUFEM 形式。已有一些工作致力于发展为模拟由 Helmholtz 方程控制的具有高频振荡解的短波问题的 PUFEM。在这些工作中, 局部函数的基底由齐次 Helmholtz 方程的一组平面波解组成。Ortiz 和 Sanchez^[5] 在他们的 PUFEM 模型中加入了经选取的一组平面波, 以有效地模拟一般衍射问题中一个近似的外部无反射边界条件。Laghrouche, Bettess 和 Astley^[6] 发展了一个有限元模型, 使得有可能在一个单元内对包含多个波长的行波进行模拟。因此, 在模拟大波数的问题时不必再细化有限元网格。Duarte,

* 收稿日期: 2003_06_04; 修订日期: 2005_02_01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50278012; 10272027; 19832010); 国家九七三基金资助项目 (2002CB412709)

作者简介: 李锡夔 (1940—), 男, 上海人, 博士, 教授, 博士生导师 (联系人, Tel/Fax: + 86_411_84709186; E_mail: xikuili@dlut.edu.cn)。

Babuska 和 Oden^[7], Strouboulis, Babuska 和 Coppers^[8] 对结构力学问题发展了他们的广义有限元模型, 以使在不要求过度增加单元的情况下, 捕捉住所关心域的角边处应力集中和奇异。

本文发展了一种用于固体中短波传播数值模拟的单位分解有限元模型。此模型基于单位分解等参单元, 有限元空间由形成单位分解的标准等参单元形函数乘以定义为局部子空间基函数的特殊形函数构成。后者由一组沿给定方向平面行波构成并能近似地在一个单元内再现解的高频振荡特性。恰当地选取这些平面波对于 PUFEM 的精度和效率十分重要。每一个有限元节点的位移矢量以离散的平面波系列展开, 其中的每一个离散平面波组分可具有特定的波数和波动方向角。它们可以被选取为在各节点相同, 也可以根据特定问题中波传播的已知信息进行有针对性的选择。因此, 局部形函数子空间提供了在最大程度上利用行波局部性质信息的可能性。

1 固体介质中波传播过程的单位分解有限元方法的构造

一个行波由以不同速度具不同频率传播的简谐波组成。行波的形状随着它的简谐波组分不同而变化。二维各向同性弹性连续体中的波动控制方程可写为如下形式

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial \mathbf{x}} - G \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中 λ, G 是 Lam 系数, ρ 是密度, \mathbf{u} 是位移矢量 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, e 是体积应变, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 。

有限元中利用的以映射多项式为基底的标准形函数在中低频问题中可得到可靠的结果。如已知波动解具有简谐和高频振荡的特性, 那么随着波数的增加, 在广义有限元法中以标准形函数(全局基函数)乘以简谐振荡函数(局部基函数)的方式构造分级精化近似将十分有利, 即

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j \sum_{l=0}^m \phi_l^{(j)} \mathbf{u}_j^{(l)} = \sum_{l=0}^m \mathbf{u}^{(l)} h_l, \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{h}_l^T = [N_1 \phi_l^{(1)} \quad N_2 \phi_l^{(2)} \quad \dots \quad N_n \phi_l^{(n)}], \quad \mathbf{u}^{(l)} = [\mathbf{u}_1^{(l)} \quad \mathbf{u}_2^{(l)} \quad \dots \quad \mathbf{u}_n^{(l)}], \quad (3)$$

$\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$ 是位移矢量, 在二维状态下, 对单元内的任意点 \mathbf{x} 有 $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})^T = [u \quad v]$; n 是单元节点数; m 是局部形函数子空间数; $\mathbf{u}_j^{(l)} = [u_j^{(l)} \quad v_j^{(l)}]^T$ 是广义节点自由度, 代表在节点 j 沿不同方向不同平面行波 ($0 < l \leq m$) 的幅度; N_j 是普通有限元的多项式形函数, $\{N_j\}$ 构成一个单位分解; 简谐形函数空间 $\phi_l^{(j)}$ ($0 < l \leq m$) 反映了局部的振荡近似特性, 它被假定具如下形式

$$\phi_l^{(j)} = \begin{cases} 1 & (l = 0), \\ \exp(i\mathbf{k}^{(j)} \mathbf{r}) - \exp(i\mathbf{k}^{(j)} \mathbf{r}_j) & (l > 0), \end{cases} \quad (4)$$

其中任意点 $\mathbf{x}^T = [x \quad y]$ 的位置矢量是 $\mathbf{r} = xi + yj$, i, j 分别是 x 和 y 坐标轴方向上的单位矢量。节点 j 的第 l 个局部近似空间的波数矢量表示为

$$\mathbf{k}^{(j)} = k_l^{(j)} (\cos\theta_l^{(j)} \mathbf{i} + \sin\theta_l^{(j)} \mathbf{j}), \quad (5)$$

其中 $\theta_l^{(j)}$ 是节点 j 的第 l 个简谐行波方向。全局空间 h_l ($0 < l \leq m$) 继承了局部空间 $\phi_l^{(j)}$ 的近似特性和单位分解的平滑特性。

在广义有限元方法中, 由于全局基底函数 $N_j = N_j(\mathbf{x}_i)$ 具有 Kronecker_δ 特性, 按照公式 (4) 中的局部形函数的定义有

$$\mathbf{u}_j^h = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}_j) = \sum_{l=0}^m \phi_l^{(j)}(\mathbf{x}_j) \mathbf{u}_j^{(l)} = \mathbf{u}_j^{(0)}, \quad (6)$$

其中 u_j^h 是插值函数 $u^h(x)$ 在节点 j 处的真实节点值, 即 $u_j^h = u_j$ 。这意味着真实的节点位移矢量 u_j^h 可通过第 0 阶广义节点位移矢量的幅值 $u_j^{(0)}$ 表示。本广义有限元模型的这个优点使得它可用类似于普通有限元中所利用的简单方法来处理本质边界条件。

2 固体动力学的单位分解有限元公式

考虑相应的边界条件并忽略阻尼力, 我们可以得到固体中波动方程(1)的半离散系统(空间域上离散)的线性形式如下

$$M\dot{d}(t) + Kd(t) = f^e(t), \quad t \in I = (0, T), \quad (7)$$

其中 $d = [u_1^0 \ v_1^0 \ u_1^1 \ v_1^1 \ \dots \ u_N^m \ v_N^m \ u_2^0 \ v_2^0 \ \dots \ u_N^m \ v_N^m]^T$ 是全局位移矢量, 它包含了二维状态下的所有的自由广义位移分量; 下标 N 表示有限元网格中的节点总数, 以及

$$M = \int_{\Omega} h_k^{(i)} \rho \delta_{ij} h_l^{(j)} d\Omega, \quad K = \int_{\Omega} h_k^{(i)} k D_{ijkl} h_l^{(j)} d\Omega, \quad f^e(t) = \int_{\Gamma_t} h_k^{(i)} q_l(t) d\Gamma, \quad (8)$$

这里

$$h_{k,k}^{(i)} = \frac{\partial h_k^{(i)}}{\partial x_K} = \frac{\partial N_i}{\partial x_K} \phi_k^{(i)} + \frac{\partial \phi_k^{(i)}}{\partial x_K} N_i = \frac{\partial \phi_k^{(i)}}{\partial x_K} - \frac{\partial \phi_0^{(i)}}{\partial x_K} \exp(i\mathbf{k}_k^{(i)} \mathbf{r}_i), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \phi_k^{(i)}}{\partial x_K} = \begin{cases} 0 & (k = 0), \\ i k_k^{(i)} (\delta_{iK} \cos \theta_k^{(i)} + \delta_{2K} \sin \theta_k^{(i)}) \exp(i\mathbf{k}_k^{(i)} \mathbf{r}) & (k > 0), \end{cases} \quad (10)$$

$$\phi_k^{(i)} = \begin{cases} N_i & (k = 0), \\ N_i \exp(i\mathbf{k}_k^{(i)} \mathbf{r}) & (k > 0). \end{cases} \quad (11)$$

公式(8)中, $q_l(t)$ 是随时间变化的作用在边界 Γ_t 上的分布载荷密度, D_{ijkl} 是由相应的本构律定义的 4 阶笛卡尔张量。需要注意的是当计算单元矩阵时将遇到如下形式积分

$$I_{kl}^{(ij)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) \exp(i\mathbf{k}_k^{(i)} (x \cos \theta_k + y \sin \theta_k)) \exp(i\mathbf{k}_l^{(j)} (x \cos \theta_l + y \sin \theta_l)) d\xi d\eta \quad (12)$$

其中函数 $f(\xi, \eta)$ 包含了形函数 N_i, N_j , 它们的导数, 以及 Jacobi 矩阵 J 和它的行列式 $\det J$ 。式(12)形式所示的积分具有显著的振荡特性, 本文采用了高阶的高斯-勒让德(Gauss-Legendre)积分来求解。事实上对于在单元插值近似函数中包含了波动特性知识的单位分解有限元方法, 合乎逻辑和合适的考虑应发展更好的计及单元插值近似函数中已利用的波函数知识的积分方法。我们将在进一步的工作中对此作更详细的讨论。

3 数值结果

第 1 个例子是一个弹性柱体中的一维应力波传播问题。如图 1 所示, 柱的横截面积 $A = 1.0 \text{ m}^2$, 长度 $L = 10 \text{ m}$, 一端固定, 一端自由并受轴向振荡分布外力 $F(t) = -20 \cos(3.974 t)$ MPa 的作用。作为平面应变问题来处理, 材料常数为弹性模量 $E = 1.0 \times 10^3$ MPa, 泊松比 $\nu = 0$ 和密度 $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ 。

全柱沿轴向均匀地划分为不同的 N_e 个单元, 以评价不同类型有限元在模拟同一柱体中波传播的性能。这里对 4 种不同的有限单元网格类型, 即 4 节点(Q4)、8 节点(Q8)等参单元网格和 4 节点(QP4)、8 节点(QP8) 广义有限单元网格, 分别采用了 $N_e = 250, 80, 10, 5$ 。QP4 和 QP8 网格在求解时使用的波数 $k = 6, 12, 18, 24$, 并没有包含已知的这个例子的解析波数 $k = 2\pi$ 。在每一个节点, 角度 $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ 所表示的两个方向平面波应用于 $k = 6, 12, 18, 24$ 的每一种情况。需要注意的是在此例中 Q4 单元的尺寸等于波长的 $1/25$, 以使得 Q4 网格的计算结果在精

度上可以和 Q8、QP4、QP8 网格的计算结果相比较。

计算时间步长取为 $\Delta t = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$ 。利用经典 Newmark 算法 (参数 $\beta = 0.25, \gamma = 0.5$) 对控制方程 (7) 在时域作有限差分近似。在固定时刻 t , 在整个所考虑的空间域上应力的总体数值误差采用 L_2 形式的范数定义如下

$$\|e_{\sigma}(t)\|_{L_2} = \left[\sum_{i=1}^{N_q} (\sigma_x(x_i, t) - \alpha_x(x_i, t))^2 \right]^{1/2} \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N_q} \sigma_x(x_i, t)^2 \right]^{-1/2}}, \quad (13)$$

式中 N_q 是计算误差 $\|e_{\sigma}(t)\|_{L_2}$ 时使用的采样点总数, $\sigma_x(x_i, t)$ 是利用不同类型单元在不同网格密度下得到的应力数值解, $\alpha_x(x_i, t)$ 是解析解。图 2 给出的曲线表示了利用不同类型单元并在相应不同的网格密度下所得到的随时间变化的轴向应力总体数值误差 $\|e_{\sigma}(t)\|_{L_2}$ 。从图中可以看出 QP8 和 QP4 给出了更准确的结果。图 3 给出了在 $t = 0.01125 \text{ s}$ 时的轴向应力 σ_x 沿柱轴的分布。图中也给出了利用解析解获得的结果。从图中可以看出不同单元类型在利用不同网格划分下的应力曲线总体上相差不多, 主要差别在每个行波的波前, 称为 Gibbs 现象的虚假振荡在 QP4 和 QP8 网格中比在 Q4 和 Q8 网格中要小得多。

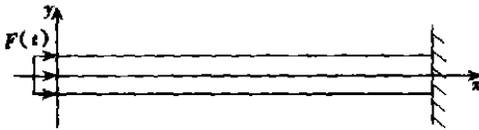


图 1 受振荡外力的弹性柱体

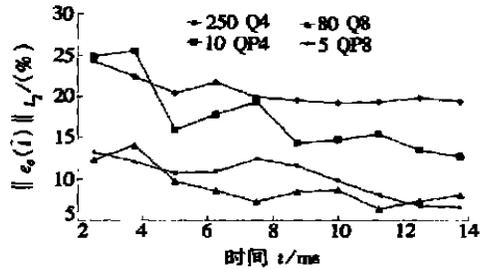
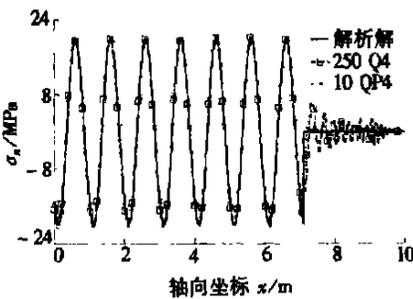
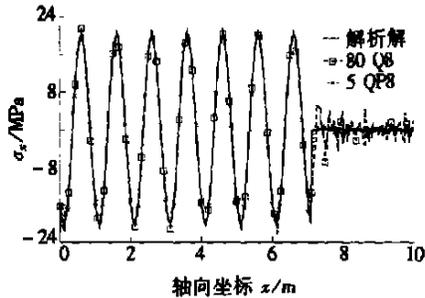


图 2 不同时刻的轴向应力总体误差 $\|e_{\sigma}(t)\|_{L_2}$



(a) Q4 和 QP4

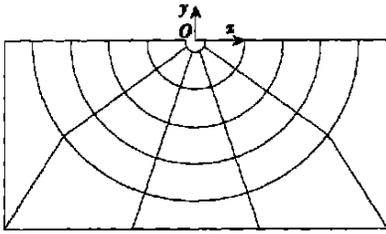


(b) Q8 和 QP8

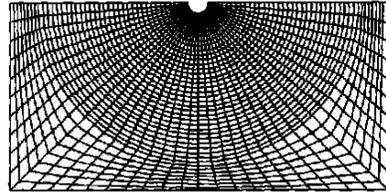
图 3 0.01125 s 时刻的轴向应力 σ_x 分布图

第 2 个例题考虑在表面上有一柱状凹坑的弹性半空间。取在表面中心有此柱状凹坑的有限域作为基础问题进行数值分析。如图 4 所示, 计算区域深 100 m, 宽 200 m, 在第 3 个方向上无限长。基础的材料性质为弹性模量 $E = 225 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0$, 质量密度 $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ 。例题模拟为弹性固体连续介质中的瞬态平面应变问题。一个均布振荡压力荷载 $q_n = 20\cos(188.5 t) \text{ MPa}$ 法向作用于内半径为 5 m 的柱状凹坑表面。

基础被离散为 9 节点的映射单元网格。单元数目为 $N_r^e \times N_e^0$, N_r^e 和 N_e^0 分别是径向和环向的单元数目。为使数值结果在计算精度上能够接受, 并且对所用的不同类型单元的结果可作

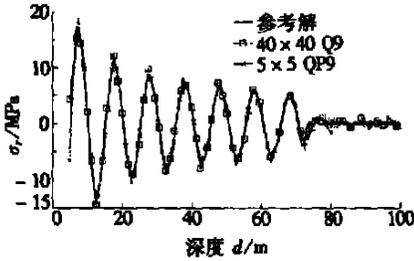


(a) 5×5 QP9 网格和坐标系

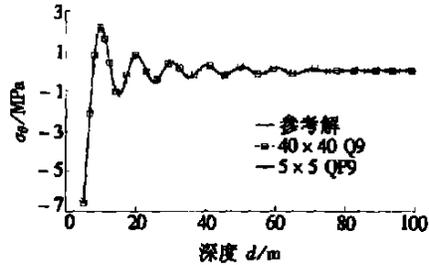


(b) 40×40 Q9 网格

图4 表面中心有柱状凹坑的弹性半空间和它的有限元网格

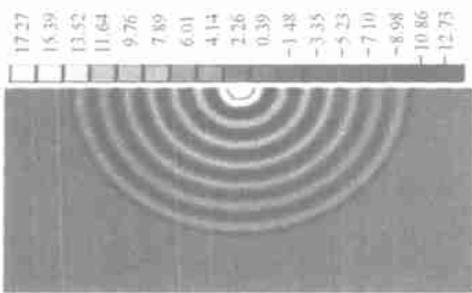


(a) 径向应力 σ_r



(b) 环向应力 σ_θ

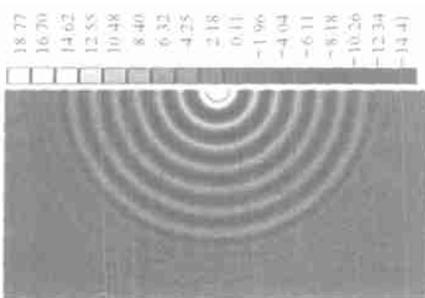
图5 $t = 0.225$ s时刻沿负 y 轴方向的应力分布图



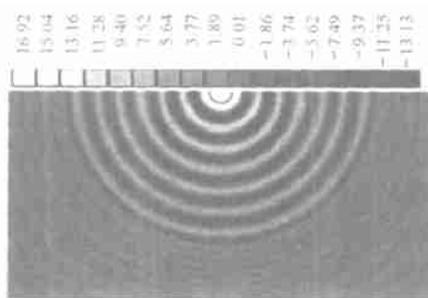
(a) 参考解

相互比较,9 节点的 Lagrange 映射有限单元(Q9)和基于 Q9 的 9 节点单位分解有限单元(QP9)的网格分别为 $N_e^r = N_e^0 = 40(40 \times 40)$ 和 $N_e^r = N_e^0 = 5(5 \times 5)$, 见图4。采用 Gauss-Legendre 积分方案,对 Q9 单元采用了 3×3 的积分点。而由于在 QP9 单元网格中单元尺寸 h 与波长 λ 的比值约为 $h/\lambda = 2$, 必须采用高阶的 Gauss-Legendre 积分方案,这里采用了 40×40 的积分点。

考虑到中心为笛卡尔坐标系中原点的柱形波



(b) 40×40 Q9 网格



(c) 5×5 QP9 网格

图6 $t = 0.225$ s时刻全域内的径向力 σ_r /MPa 分布云图

的辐射特征,为了包含柱形波函数的知识,采用了反映局部振荡近似特性的如下的局部形函数空间 $\phi_l^j(0 < l \leq m, 1 \leq j \leq n)$,

$$\phi_l^{(j)} = \begin{cases} 1 & (l = 0), \\ \exp[(-1)^l i k_l^{(j)} \sqrt{x^2 + y^2}] - \exp[(-1)^l i k_l^{(j)} (-\sqrt{x_j^2 + y_j^2})] & (l > 0). \end{cases} \quad (14)$$

对于 QP9 网格求解, 每一个节点的局部形函数空间由波数 $k_l = 0.6, 1.2$ 分别结合根据 $(-1)^l$ 确定的两个行波方向构成。这样, 40×40 的 Q9 单元网格和 5×5 的 QP9 单元网格的自由度分别为 12 959 和 1 095。由于此例题没有解析解, 所以取一局部形函数空间由 6 个波数 ($k_l = 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.8, 2.4$) 结合 $(-1)^l$ 组成的 (5×5) 的 QP9 网格的数值解作为参考解, 并且单元矩阵采用了积分点高达 60×60 的高阶 Gauss-Legendre 积分。

计算采用的时间步长为 $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$ s。图 5 分别给出了 $t = 0.225$ s 时刻由基础表面中心处沿负 y 轴方向变化的径向应力 σ_r 和环向应力 σ_θ 的分布。图 6 是该时刻的整个基础域内的径向应力分布图。与参考解比较, 可以再次看到由 Gibbs 现象引起的虚假振荡对应力数值解的影响。需要强调指出的是, 即使当前在本例的 5×5 的 QP9 单元网格中采用了 40×40 积分点的高阶 Gauss-Legendre 积分方案, 在利用 P4_2.4 GHz, 1 024 M 内存的微机上的计算到 1 500 时间步时的总计算时间仍只有 1 178.36 s。而 40×40 的 Q9 网格在相同条件下的计算却需要 5 314.75 s。也就是说为了提供精度上近似的数值解, Q9 单元网格需要的计算时间约是 QP9 单元网格需要的 4.5 倍。

[参 考 文 献]

- [1] Deraemaeker A, Babuska I, Bouillard P. Dispersion and pollution of the FEM solution for the Helmholtz equation in one, two and three dimension[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1999, **46** (4): 471—499.
- [2] Zienkiewicz O C. Achievements and some unsolved problems of the finite element method[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 2000, **47**(1): 9—28.
- [3] Melenk J M, Babuska I. The partition of unity finite element method—basic theory and applications [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, **139**(3): 289—314.
- [4] Duarte C A M, Oden J T. An hp adaptive method using clouds[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, **139**(3): 237—262.
- [5] Ortiz P, Sanchez E. An improved partition of unity finite element model for diffraction problems[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 2001, **50**(12): 2727—2740.
- [6] Laghrouche O, Bettess P, Astley R J. Modelling of short wave diffraction problems using approximating system of plane waves[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 2002, **54**(10): 1501—1533.
- [7] Duarte C A, Babuska I, Oden J T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems[J]. Computers and Structure, 2000, **77**(2): 215—232.
- [8] Strouboulis T, Babuska I, Copps K. The design and analysis of the generalized finite element method [J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2000, **181**(1): 43—69.

Partition of Unity Finite Element Method for Short Wave Propagation in Solids

LI Xi_kui, ZHOU Hao_yang

(State Key Laboratory for Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: A partition of unity finite element method for numerical simulation of short wave propagation in solids is presented. The finite element spaces were constructed by multiplying the standard isoparametric finite element shape functions, which form a partition of unity, with the local subspaces defined on the corresponding shape functions, which include a priori knowledge about the wave motion equation in trial spaces and approximately reproduce the highly oscillatory properties within a single element. Numerical examples demonstrate the performance of the proposed partition of unity finite element in both computational accuracy and efficiency.

Key words: short wave propagation; solid continuum; partition of unity finite element method