

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0911_10

具有刚性双边裂纹的压电介质中的 电荷相互作用分析

胡元太¹, 李国清², 蒋树农¹, 胡洪平², 杨嘉实³

(1. 中南大学 力学与传感技术研究所, 长沙 410083;

2. 华中科技大学 力学系, 武汉 430074;

3. 内布拉斯加大学 工程力学系, 林肯, NE68588, 美国)

(郭兴明推荐)

摘要: 利用 Stroh 方法, 研究了含双边固定导电裂纹的二维压电体在广义线力作用下的 Green 函数。首先分析的是因压电性和边界极化电荷所引起的作用在自由电荷上的 Coulomb 力。然后, 再分析了双边裂纹附近的两个奇异点之间的相互作用问题(其中, 至少一个奇异点处存在自由电荷)。数值计算表明: 当两个或多个奇点互相靠近且奇点中至少存在一个自由电荷时, Coulomb 力将明显影响压电介质内的力电场, 这时的 Coulomb 力将不能再被忽略掉。所得结果不仅适用于平面和反平面问题, 也适用于面内变形与面外变形相耦合的情况。

关键词: 双边裂纹; 强度因子; Green 函数; Coulomb 力

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

近几十年来, 各向异性介质的 Green 函数^[1~7]因边界元法的广泛应用受到了极大关注。一般来说, 求解无限大平面、半平面或者双介质无限大平面的 Green 函数相对容易^[1~3,6], 但对于含曲线边界或多直线边界的区域, 其 Green 函数的求解将十分困难, 有时甚至是不可能的。仅有一些比较简单的边界得到了明确的显式解, 比如: Hu 和 Zhao^[4], Hwu 和 Yen^[5], Ting, Hu 和 Kirchner^[7]等分别求得了椭圆形边界和抛物线边界的 Green 函数。

本文求解了具有双边裂纹(两条直线边界)的二维压电体在广义线力作用下的 Green 函数。压电体的边界假定是机械夹持的, 并且覆盖导体电极, 电极的力学影响可忽略。整个分析过程如下: 首先, 通过 Stroh 方法^[8~15]推导出了含导电双边裂纹的二维压电介质在广义线力作用下的形式解。然后, 再详细分析了由压电性及边界极化电荷所引起的作用在自由电荷上的 Coulomb 力。这种 Coulomb 力是 2 阶量, 在线性压电理论中通常被忽略。然而, 当两个或多个奇点互相靠近且奇点中至少含有 1 个自由电荷时, Coulomb 力将变得非常重要而不能被忽略, 这种情况在研究含裂纹压电体的充放电时会常常遇到。最后, 求得简单明确的 Green 函数。

收稿日期: 2004_08_05; 修订日期: 2005_04_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172036); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

作者简介: 胡元太(1964), 教授, 博士(Fax: + 86_731_5571736; E_mail: hudeng@263.net)

表达式 为了突出 Coulomb 力的重要性,文章详细分析了带自由电荷的两个奇点之间的相互作用,并进行了计算 结果表明:由于 Coulomb 力是 2 阶量(即非线性量),当两奇点相互逼近时,再不能像处理弹性材料那样,将压电体中的力电场通过简单迭加来得到 而这正是压电体边界元法和弹性体边界元法的不同点之一

1 求解过程

考虑一含有两个半无限裂纹的压电体,如图 1 所示 根据二维压电体的 Stroh 公式^[8~ 13],其通解为:

$$U = AF(z) + \overline{AF(z)}, \quad = BF(z) + \overline{BF(z)}, \tag{1}$$

式中

$$\begin{cases} U = (u_1, u_2, u_3, \phi)^T, & = (\phi, u_1, u_2, u_3)^T, \\ A = (a_1, a_2, a_3, a_4), \quad B = (b_1, b_2, b_3, b_4), \\ F(z) = (q_1 F_1(z_1), q_2 F_2(z_2), q_3 F_3(z_3), q_4 F_4(z_4))^T, \\ z = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T, \quad z = x_1 + p x_2, \quad = 1, 2, 3, 4, \\ i_1 = -i, \quad i_2 = i, \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad i = 1, 2, 3, \\ D_1 = -\phi_{,2}, \quad D_2 = \phi_{,1} \end{cases} \tag{2}$$

在式(1)和式(2)中, U 和 ϕ 是四维向量,其分量分别为 u_i (机械位移), ϕ (电势), $\phi_{,i}$ (应力函数)和 $\phi_{,i}$ (电势函数); $\phi_{,ij}, D_i$ 和 E_i 分别为应力,电位移和电场分量; $q = (q_1, q_2, q_3, q_4)^T$ 是一未知复数常矢量; $F(\cdot)$ 是待求的任意函数; p 是由材料常数所决定的虚部为正的复特征值^[8~ 13]; a 和 b 是与 p 相关的本征矢量 字母上一横线代表取共轭,右上标 T 代表转置;逗号后面的指标表示对相应坐标求偏导;重复 Latin 字母都是哑标,即表示求和;而若要对重复的希腊字母求和则会用求和符号明确标出 另外,本文假定所有 p 均不相同,即材料是单纯的而非退化的

1.1 Green 函数的形式解

假定图 1 所示物体承受广义线力 $f^* = (f_1, f_2, f_3, -q)^T$ 的作用,其中前 3 个分量为力分量,最后 1 个分量为位于点 $z^0 = x_1^0 + i x_2^0$ 处的线电荷 裂纹边界是机械夹持在一导体电极上 从静电学上看,导体是等电势体,故电极附近的电场矢量 E 的切向分量为零^[8] 此外,从式(1)、(2)可知: U 中的常数项对介质的应力和电位移都没有影响 因此不失一般性,可以假设沿裂纹表面 $U_{,1} = 0$ 另外,由于无限远处无外载荷作用,因此 $\phi_{,j}$ 和 D_i 在无限远处也等于零 这样,Green 函数应满足:

$$\begin{cases} U_{,1} = 0, & \text{在裂纹表面,} \\ \oint_c dU = 0, \quad \oint_c d\phi = f, & \text{在任意包含 } z^0 \text{ 的闭合曲线 } c \text{ 上,} \\ \phi_{,j} = 0, \quad D_i = 0, & \text{当 } z \rightarrow \infty \end{cases} \tag{3}$$

式中 $f = f^* + f^0$, 而 $f^0 = (f_1^0, f_2^0, f_3^0, 0)^T$ 是未知实数常矢量,表示由压电性及边界极化电荷所引起的作用在自由电荷上的 Coulomb 力 式(3)中的第 2 式来源于合力平衡以及 z^0 处的位移单值性条件

为满足式(3),如何选定 $f(z)$ 对于求解过程非常重要 仔细分析后发现: ϕ 和 U 在 z^0 附

近都是多值函数, 但对应的应力导数却是单值函数且在 z 时趋于零 因此式(3)解的最好选择应是对数函数 于是, 我们写出 Green 函数如下:

$$\left\{ \begin{aligned} U &= 2\text{Re}[A w^* q_0] + \int_{-1}^4 2\text{Re}[A v^* q], \\ &= 2\text{Re}[B w^* q_0] + \int_{-1}^4 2\text{Re}[B v^* q], \\ w^* &= \int_{-1}^4 w I, w = \ln(r - r^0) - \ln(1 - r), \\ v^* &= \int_{-1}^4 v I, v = \ln(1 - \overline{r^0} r) - \ln(1 - r), \\ &, \quad = 1, 2, 3, 4, \\ r &= \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2 - ai}}{z + \sqrt{z^2 - a^2 + ai}}, r^0 = \frac{z^0 + \sqrt{(z^0)^2 - a^2 - ai}}{z^0 + \sqrt{(z^0)^2 - a^2 + ai}}, \\ I &= \text{diag}\{1, 2, 3, 4\}, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

式中 δ_{kj} 是 Kronecker delta, q_k 是任意复数常矢量, 其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ 如果 q_0 和 q 之间满足下列的关系

$$AI q_0 = -Aq, \quad (5)$$

且将式(4)代入式(3)的第 1 式中, 就会发现式(3)的第 1 式自动满足, 也就是:

$$q = -A^{-1}AI q_0 \quad (6)$$

上式中, 多值函数的取值是这样定义的

$$s(z) = \sqrt{z^2 - a^2} = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1 + \theta_2)/2}, s(0) = ia, \quad = 1, 2, 3, 4, \quad (7)$$

式中, r 和 θ 如图 2 所示, $= 1, 2$

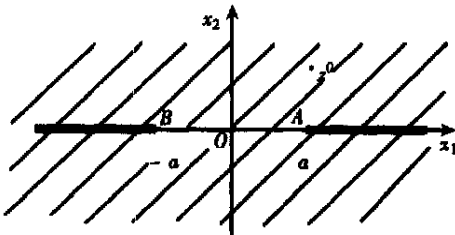


图 1 平面压电介质中的双边裂纹

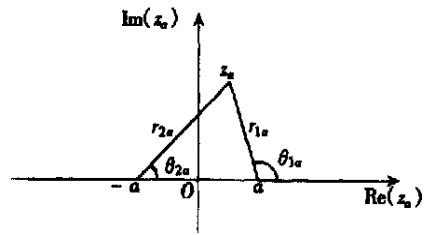


图 2 $s(z)$ 的分枝平面

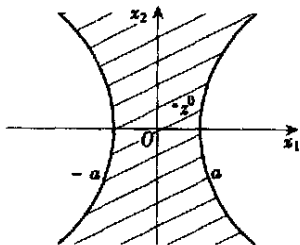


图 3 z -平面上的双曲线边界

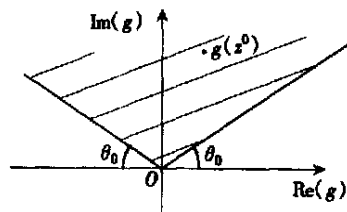


图 4 映射平面 $g(z)$

显然, 图 3 中的双曲线可表示如下:

$$x_1 = a \cosh \xi, x_2 = b \sinh \xi, \quad \xi \text{ 是一实参数}, \quad (8)$$

2a 和 2b 是双曲线的两个主轴 不难证明, 解析函数

$$g(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2 - b^2} \tag{9}$$

可将图 3 中的阴影部分映射成图 4 所示的张角为 $2\theta_0$ 的扇形区域, $\theta_0 = \arctan(b/a)$ 区域右边线与 $\text{Re}(g)$ 轴正方向之间的夹角为 θ_0 图 1 中的双边裂纹是双曲线的特例, 因此映射

$$g_1(z) = z + \sqrt{z^2 - a^2} \tag{10}$$

将把图 1 中的阴影区转化成图 4 中的上半部半无限平面 ($\theta_0 = 0$), 从而导致

$$\text{Im}\{g_1(z)\} \geq 0 \tag{11}$$

这样, 从式 (4) 和式 (11) 可得出

$$|r| \leq 1 \tag{12}$$

这就保证了所有 v 在图 1 的整个介质区域都是解析的 将式 (4) 代入式 (3) 的第 2 式可得

$$q^0 = \frac{1}{2} A^T f \tag{13}$$

因此, Green 函数的形式解可写成如下形式

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} \text{Im}\{A w^* A^T\} f + \frac{1}{2} \text{Im}\{A v^* A^{-1} A I A^T\} f, \\ = \frac{1}{2} \text{Im}\{B w^* A^T\} f + \frac{1}{2} \text{Im}\{B v^* A^{-1} A I A^T\} f \end{cases} \tag{14}$$

1.2 关于 Coulomb 力 f^0 的分析

由于式 (14) 含有未知矢量 f^0 , 因此对应的 Green 函数仍未显式表示出来 为了求 f^0 , 首先应求由解裂纹边界上的分布电荷和介质压电性所引起的电场 $E^0(x_1, x_2)$, 其步骤如下:

1) 利用式 (2) 和式 (4) 可得到介质中的总电场, 即由 f 和边界电荷所引起的电场 $E(x_1, x_2)$,

$$\begin{cases} E_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1}, E_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2}, E_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_3} = 0, \\ (x_1, x_2) = s_j (f_j^* + f_j^0), \\ s_j = \frac{1}{2} \text{Im}\left\{ \sum_{k=1}^4 A_k \left[w A_j + \sum_{k=1}^4 v A_k^{-1} A_k A_j \right] \right\} \end{cases} \tag{15}$$

2) 根据 Barnett 和 Lothe^[1] 以及 Hu 等^[3] 的工作, 当没有其它有限边界时, 即当无限大压电体仅在 z^0 处受到 $f^* + f^0$ 作用时, 介质中的电场 $E^*(x_1, x_2)$ 应为

$$\begin{cases} E_1^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1}, E_2^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2}, E_3^*(x_1, x_2) = 0, \\ * = s_j^* (f_j^* + f_j^0), \\ s_j^* = \frac{1}{2} \text{Im}\left\{ \sum_{k=1}^4 A_k \ln(z - z^0) A_j \right\} \end{cases} \tag{16}$$

3) 由裂纹边界的分布电荷和介质压电性所引起的电场 $E^0(x_1, x_2)$ 为

$$\begin{cases} E_1^0(x_1, x_2) = E_1(x_1, x_2) - E_1^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} \left(1 - \frac{z^0}{x_1} \right), \\ E_2^0(x_1, x_2) = E_2(x_1, x_2) - E_2^*(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_2} \left(1 - \frac{z^0}{x_2} \right), \\ E_3^0(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

4) 于是, Coulomb 力 f^0 为

$$f_1^0 = qE_1^0(x_1^0, x_2^0), f_2^0 = qE_2^0(x_1^0, x_2^0), f_3^0 = f_4^0 = 0 \quad (18)$$

将式(15)、(16)和式(17)代入式(18)中可得

$$\begin{cases} (g_{11} - 1/q)f_1^0 + g_{12}f_2^0 + h_1 = 0, \\ g_{21}f_1^0 + (g_{22} - 1/q)f_2^0 + h_2 = 0, \\ g = -\frac{1}{x}(s - s^*), h = -\frac{1}{x}(s_j - s_j^*)f_j^*, \quad j = 1, 2 \end{cases} \quad (19)$$

解方程(19)得

$$\begin{cases} f_1^0 = -\frac{q^2(g_{22}h_1 - g_{12}h_2) - qh_1}{q^2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) - q(g_{11} + g_{22}) + 1}, \\ f_2^0 = -\frac{q^2(g_{11}h_2 - g_{21}h_1) - qh_2}{q^2(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) - q(g_{11} + g_{22}) + 1}, \\ f_3^0 = f_4^0 = 0 \end{cases} \quad (20)$$

联立式(14)与式(20), 即得出了图1所示区域的显式 Green 函数 因此, 介质中的应力张量和电位移矢量为

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1 = (\mathbf{t}_{11}, \mathbf{t}_{12}, \mathbf{t}_{13}, D_1)^T = -\mathbf{t}_2 = \\ -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \begin{matrix} p^* & w^* \\ v^* & A^T \end{matrix} \right\} (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0) - \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \begin{matrix} p^* & v^* \\ v^* & A^{-1} \mathbf{A} \mathbf{I} A^T \end{matrix} \right\} (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0), \\ \mathbf{t}_2 = (\mathbf{t}_{21}, \mathbf{t}_{22}, \mathbf{t}_{23}, D_2)^T = \mathbf{t}_1 = \\ \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \begin{matrix} w^* & A^T \end{matrix} \right\} (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0) + \\ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^4 \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{B} \begin{matrix} v^* & A^{-1} \mathbf{A} \mathbf{I} A^T \end{matrix} \right\} (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0), \end{cases} \quad (21)$$

式中

$$\begin{cases} w = \frac{2ia(z + \sqrt{z^2 - a^2})(1 - r^0)}{(1 - r)(r - r^0)(z + \sqrt{z^2 - a^2} + ai)^2 \sqrt{z^2 - a^2}}, \\ v = \frac{2ia(z + \sqrt{z^2 - a^2})(1 - r^0)}{(1 - r)(1 - r^0 r)(z + \sqrt{z^2 - a^2} + ai)^2 \sqrt{z^2 - a^2}} \end{cases} \quad (22)$$

根据上述结果, 可求得裂纹尖端 A 和 B 处的应力和电位移强度因子分别为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_A = (K_{1A}, K_{2A}, K_{3A}, K_{DA})_A^T = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a^+ \\ x_2 = 0}} \sqrt{2(a - x_1)} \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{K}_B = (K_{1B}, K_{2B}, K_{3B}, K_{DB})_B^T = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow -a^+ \\ x_2 = 0}} \sqrt{2(a + x_1)} \mathbf{t}_2 \end{cases} \quad (23)$$

当广义线力 f^* 作用在介质上的点 $x_1 = l, x_2 = 0$ 处, 且当 $|l| < a$ 时, 点 A、B 处相应的应力强度因子为别为

$$\mathbf{K}_A = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a+l}{a-l}} \mathbf{S}^T (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0), \quad \mathbf{K}_B = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\frac{a-l}{a+l}} \mathbf{S}^T (\mathbf{f}^* + \mathbf{f}^0), \quad (24)$$

式中 $S = i(2AB^T - I)$ 是实数材料矩阵^[3,8] 根据式(21)和式(24)可得出以下结论:) 裂纹尖端附近的应力和电位移场均具有负平方根型奇异性^[9];) 总强度因子与材料常数 S 和 Coulomb 力 f^0 有关

2 基本解及奇异点电荷间的相互作用

现考虑如图 1 所示的无限大平面 假定在点 $z^1 = x_1^1 + ix_2^1$ 和 $z^2 = x_1^2 + ix_2^2$ 分别作用有广义线力 $f^1 = (f_1^1, f_2^1, f_3^1, -q_1)^T$ 和 $f^2 = (f_1^2, f_2^2, f_3^2, -q_2)^T$ 裂纹表面仍由电极固定 因此, 介质中的力电场应满足

$$\begin{cases} U, \varphi = 0, & \text{内,} \\ \oint_{c_1} dU = \oint_{c_2} dU = 0, & \oint_{c_1} d\varphi = f^1 + f^{10}, \quad \oint_{c_2} d\varphi = f^2 + f^{20}, \\ \oint_j D_i = 0, & \text{当 } z \text{ 在 } c_j \text{ 外,} \end{cases} \quad (25)$$

式中, $c_j (j = 1, 2)$ 是仅包含奇异点 z^j 的任意封闭曲线 f^0 为作用于 q 的 Coulomb 力 式(25)的显式解如下所示

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{A=1}^4 \left(\text{Im} \left\{ A w^* A^T \right\} + \text{Im} \left\{ A B v^* A A^{-1} A I A^T \right\} \right) (f^S + f^{S0}) \right], \\ \varphi = \frac{1}{P} \left[\oint_{A=1}^4 \left(\text{Im} \left\{ B B w^* A A^T \right\} + \text{Im} \left\{ B B v^* A A^{-1} A I A^T \right\} \right) (f^S + f^{S0}) \right], \end{cases} \quad (26)$$

式中

$$\begin{cases} w_A^S = \ln(r_A - r_A^S) - \ln(1 - r_A), \\ v_A^S = \ln(1 - r_A^S B) - \ln(1 - r_B), \\ r_A^S = \frac{z_A^S + \sqrt{(z_A^S)^2 - a^2 - ai}}{z_A^S + \sqrt{(z_A^S)^2 - a^2 + ai}} \end{cases} \quad (27)$$

利用式(2)和式(26)的第 1 式可得出仅由 $f^L + f^{L0} (L = 1, 2 \text{ 且 } L \times S)$ 和边界分布电荷所引起的电场 $E^{S0}(x_1^S, x_2^S)$ 如下, 其中 $S = 1, 2$,

$$\begin{cases} E_1^{S0}(x_1^S, x_2^S) = - \lim_{z \rightarrow z^S} \frac{\partial H^S}{\partial z^S}, \quad E_2^{S0}(x_1^S, x_2^S) = - \lim_{z \rightarrow z^S} \frac{\partial H^S}{\partial \bar{z}^S}, \quad E_3^{S0}(x_1^S, x_2^S) = 0, \\ H^S = \frac{1}{P} \text{Im} \left\{ \oint_{A=1}^4 A_{4A} \left[w_{A_j A}^L + \oint_{B=1}^4 v_{A B A^{-1} A k B A_j B}^L \right] (f_j^L + f_j^{L0}) + \oint_{A=1}^4 A_{4A} \left[(w_{A_j A}^S - w_{A_j A}^{S0}) A_{j A} + \oint_{B=1}^4 v_{A B A^{-1} A k B A_j B}^S \right] (f_j^S + f_j^{S0}) \right\}, \\ w_{A_j A}^S = \ln(z_A^S - z_A^S), \quad S, L = 1, 2; S \neq L \end{cases} \quad (28)$$

式中, f^{S0} 为

$$f_1^{S0} = q \mathcal{E}_1^{S0}(x_1^S, x_2^S), \quad f_2^{S0} = q \mathcal{E}_2^{S0}(x_1^S, x_2^S), \quad f_3^{S0} = f_4^{S0} = 0 \quad (29)$$

联合式(28)和式(29)可解得

$$\begin{cases} (g_{11}^1 - 1/q_1)f_1^{10} + g_{12}^1 f_2^{10} + r_{11}^2 f_1^{20} + r_{12}^2 f_2^{20} = h_1^1, \\ g_{21}^1 f_1^{10} + (g_{22}^1 - 1/q_1)f_2^{10} + r_{21}^2 f_1^{20} + r_{22}^2 f_2^{20} = h_2^1, \\ r_{11}^1 f_1^{10} + r_{12}^1 f_2^{10} + (g_{11}^2 - 1/q_2)f_1^{20} + g_{12}^2 f_2^{20} = h_1^2, \\ r_{21}^1 f_1^{10} + r_{22}^1 f_2^{10} + g_{21}^2 f_1^{20} + (g_{22}^2 - 1/q_2)f_2^{20} = h_2^2, \end{cases} \quad (30)$$

式中

$$\begin{cases} g^S K = -\frac{1}{P} \lim_{zyz^S} \frac{s}{xK} \text{Im} \left\{ \prod_{A=1}^4 A_{4A} [(w_A^S - w_A^0) A_{DA} + \prod_{B=1}^4 v_{BA}^{-1} A_{kBA} D] \right\}, \\ r^S K = -\frac{1}{P} \lim_{zyz^S} \frac{s}{xK} \text{Im} \left\{ \prod_{A=1}^4 A_{4A} [w_A^L A_{DA} + \prod_{B=1}^4 v_{BA}^{-1} A_{kBA} D] \right\}, \\ h^S K = \frac{1}{P} \lim_{zyz^S} \frac{s}{xK} \text{Im} \left\{ \prod_{A=1}^4 A_{4A} [w_A^L A_{jA} + \prod_{B=1}^4 v_{BA}^{-1} A_{kBA} j_B] \right\} f_j^L + \\ \frac{1}{P} \lim_{zyz^S} \frac{s}{xK} \text{Im} \left\{ \prod_{A=1}^4 A_{4A} [(w_A^S - w_A^0) A_{jA} + \prod_{B=1}^4 v_{BA}^{-1} A_{kBA} j_B] \right\} f_j^S, \end{cases} \quad (31)$$

$K, L, S, D = 1, 2; S \in I \#$

解式(30) 得出 f^{10} 和 f^{20} , 然后将它们代入式(26) 就可得到基本解和两奇异点之间的相互作用#

下面, 利用以上公式数值计算 Coulomb 力# 假定 $a = 0.01 \text{ m}$, 材料为压电陶瓷 PZT_5H, 材料参数为

$$\begin{aligned} c_{11} &= 126 \text{ GPa}, c_{12} = 79.5 \text{ GPa}, c_{13} = 84.1 \text{ GPa}, c_{33} = 117 \text{ GPa}, c_{14} = 23.0 \text{ GPa}, \\ e_{31} &= -6.5 \text{ C/m}^2, e_{33} = 23.3 \text{ C/m}^2, e_{15} = 17.0 \text{ C/m}^2, \\ E_{11} &= 15.0 @ 10^{-9} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}, E_{33} = 13.0 @ 10^{-9} \text{ C/(V}\cdot\text{m)}, \end{aligned}$$

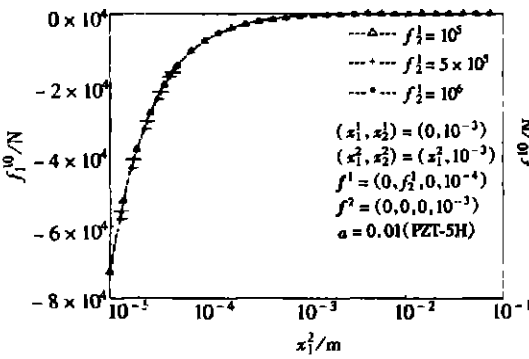


图5 f_1^{10} 依赖于 x_1^2 和 f_2^1 的关系图

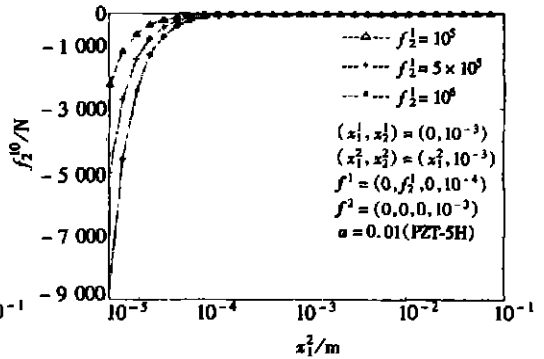


图6 f_2^{20} 依赖于 x_1^2 和 f_2^1 的关系图

先看第 1 个例子, 假定 $f^1 = (0, f_2^1, 0, -10^{-4} \text{ C})^T$ 作用于一固定点 $z^1 = i10^{-3} \text{ m}$, $f^2 = (0, 0, 0, -10^{-3} \text{ C})^T$, 作用于一可移动点 $z^2 = x_1^2 + i10^{-3} \text{ m}$, $f^{10} = (f_1^{10}, f_2^{10}, 0, 0)^T$ 和 $f^{20} = (f_1^{20}, f_2^{20}, 0, 0)^T$ 与 x_1^2 和 f_2^1 之间的关系如图 5~ 8 所示# 从这些图中可看出, 一方面, 当 $x_1^2 \rightarrow 0$ 时 f^{10} 和 f^{20} 的所有非零分量均趋向于无穷大, 当 x_1^2 接近于 10^{-3} m 时所有的分量已几乎等于零; 另一方面, f_2^{10} 和 f_1^{20} 的绝对值随 f_2^1 的增大而增加, 这是因为由于压电耦合效应随 f_2^1 的增大而增强的缘故#

我们还应注意到 $f^{10} \propto f^{20}$, 因为 f_2^1 对 f^{20} 的影响大于对 f^{10} 的影响#

第 2 个例子中假设 $f^1 = (0, f_2^1, 0, -10^{-4} \text{ C})^T$ 作用于一固定点 $z^1 = i10^{-3} \text{ m}$, $f^2 = (0, 0, 0, -10^{-3} \text{ C})^T$ 作用于一可移动点 $z^2 = ix_2^2$, $f^{10} = (f_1^{10}, f_2^{10}, 0, 0)^T$ 和 $f^{20} = (f_1^{20}, f_2^{20}, 0, 0)^T$ 与 x_2^2 和 f_2^1 之

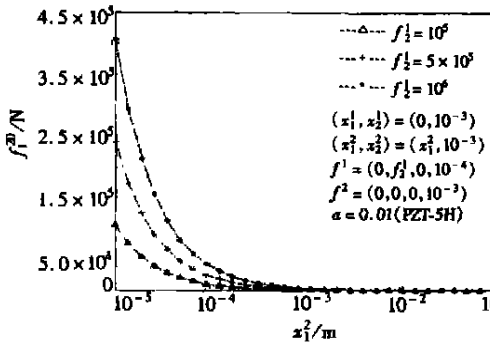


图7 f_1^{20} 依赖于 x_1^2 和 f_2^1 的关系图

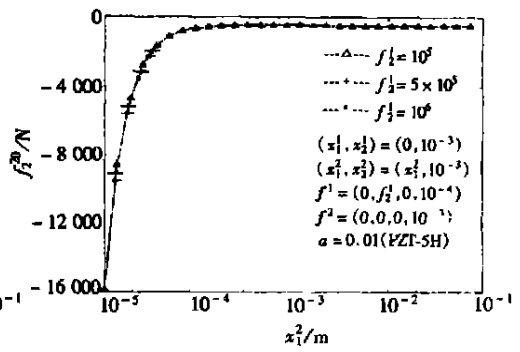


图8 f_2^{20} 依赖于 x_1^2 和 f_2^1 的关系图

间的关系如图9~12所示# 由图可知, 当 $x_2^2 \ll 10^{-3}$ m 时, f_1^{10} 和 f_2^{10} 的所有非零分量均趋向于无穷, 而当 x_2^2 接近 10^{-2} m 时趋近于零# 同时, 因为 f_1^{10}, f_1^{20} 和 f_2^{10} 远小于 f_2^{20} , 因此可以将它们当成零处理# 此外, 由于压电耦合效应随 f_2^1 的增大而增强, 所以, f_2^{20} 的绝对值也将随 f_2^1 的增大而增加# 出于与第1个例子相同的原因, $f_1^{10} \propto f_2^{20}$ #

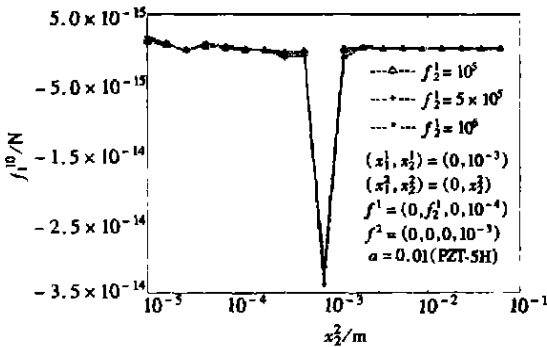


图9 f_1^{10} 依赖于 x_2^2 和 f_2^1 的关系图

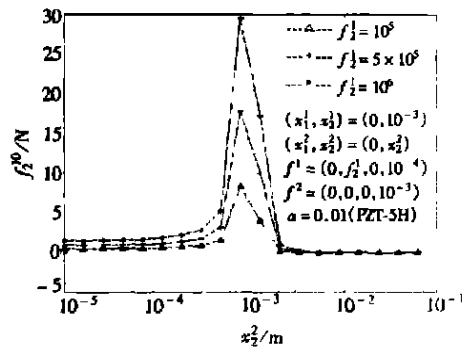


图10 f_2^{10} 依赖于 x_2^2 和 f_2^1 的关系图

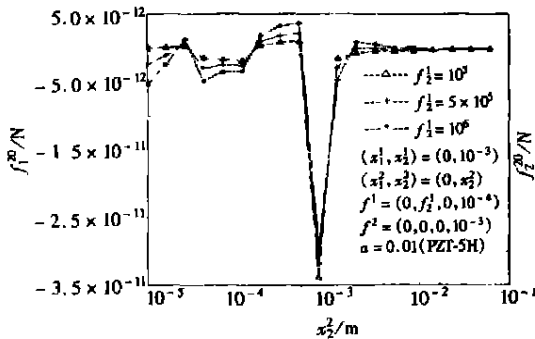


图11 f_1^{20} 依赖于 x_2^2 和 f_2^1 的关系图

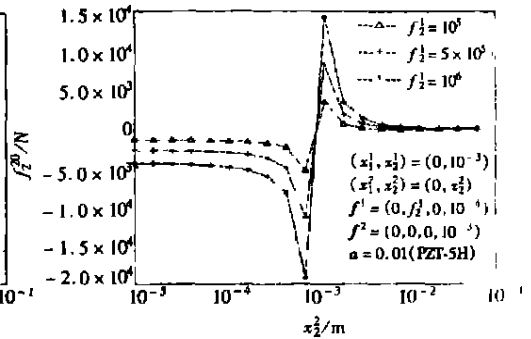


图12 f_2^{20} 依赖于 x_2^2 和 f_2^1 的关系图

从上面的计算分析可见, 与弹性材料不同, 由多个含自由电荷的奇异点所引起的压电体中的力电场不能通过简单迭加直接得到#

3 结 论

通过 Stroh 公式,得到了含双固定导体裂纹的二维压电体在承受广义线力作用时的力电场的简单显式解# 分析了自由电荷和边界电荷之间的 Coulomb 力# 求出了裂纹尖端的总强度因子,结果表明裂纹尖端附近的物理场具有负平方根型奇异性,其强度因子与材料常数 S 和 Coulomb 力有关,这一结论对压电体的断裂力学非常有用# 所获得的 Green 函数可用于压电边界元法# 与此同时,本文也分析了两个奇异点间的相互作用问题#

[参 考 文 献]

- [1] Barnett D M, Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators[J]. *Phys Status Solidi, Ser B*, 1975, 67(1): 105) 111.
- [2] Chadwick P, Smith G D. Foundations of the theory of surface waves in anisotropic medium[J]. *Adv Appl Mech*, 1977, 17: 303) 377.
- [3] HU Yuan_tai, HUANG Yu_ying, CHEN Chuan_yao, et al. Green's functions for a piezoelectric semi_infinite body with a fixed conductor surface[J]. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(3): 333) 338.
- [4] 胡元太,赵兴华.具有抛物线边界的二维弹性介质的 Green 函数[J].*应用数学和力学*, 1996, 17(5): 337) 385.
- [5] Hwu C, Yen W J. Green's functions of two_dimensional anisotropic plates containing an elliptic hole [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1991, 27(13): 1785) 1791.
- [6] Ting T C T. Image singularities of Green's functions for anisotropic elastic half_spaces and bimaterials[J]. *Journal of Elasticity*, 1991, 27(2): 119) 139.
- [7] Ting T C T, HU Yuan_tai, Kirchner H O K. Anisotropic elastic materials with a parabolic or hyperbolic boundary: a classical problem revisited[J]. *J Appl Mech*, 2001, 68(4): 537) 542.
- [8] Chung M Y, Ting T C T. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33(23): 3343) 3361.
- [9] Kuo C M, Barnett D M. Stress singularities of interfacial cracks in bonded piezoelectric half_spaces [A]. In: Wu J J, Ting T C T, Barnett D M Eds. *Modern Theory of Anisotropic Elasticity and Applications*, Philadelphia: SIAM, 1990, 33) 50.
- [10] Park Y E. Linear electro_elastic fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. *International Journal of Fracture*, 1992, 54: 79) 100.
- [11] Park S B, Sun C T. Effect of electric field on fracture of piezoelectric ceramics[J]. *International Journal of Fracture*, 1995, 70(3): 203) 216.
- [12] Sosa H, Khutoryansky N. New developments concerning piezoelectric materials with defects[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1996, 33: 3399) 3414.
- [13] Suo Z, Kuo C M, Barnett D M, et al. Fracture Mechanics for piezoelectric ceramics[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1992, 40(4): 739) 765.
- [14] Stroh A N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity[J]. *Phil Mag*, 1958, 3(30): 625) 646.
- [15] Stroh A N. Steady state problem in anisotropic elasticity[J]. *J Math Phys*, 1962, 41(1): 77) 103.

¹, LI Guo_qing², JIANG Shu_nong¹,
HU Hong_ping², YANG Jia_shi³

(1. Institute of Mechanics and Sensing Technology, Central South University,
Changsha 410083, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P. R. China;

3. Department of Engineering Mechanics, University of Nebraska,
Lincoln, NE 68588, USA)

Abstract: Using Stroh's formalism simple explicit expressions of Green's functions for a 2D piezoelectric body with two semi_infinite fixed conductor cracks subjected to a generalized line force were given. The Coulomb force acting on the free line charge due to the piezoelectricity and the distributed boundary polarization charges was discussed at first. Interactions between two singularities with free charge(s) located in a region with external cracks were studied, too. The numerical results show that the Coulomb force for two or more singularities with one free charge at least will have much influence on the electromechanical fields in piezoelectric media when these singularities move closely with each other and therefore cannot be overlooked again. The solutions obtained are valid not only for plane and anti_plane problems but also for coupled problems between in_plane and out_of_plane deformations.

Key words: external crack; intensity factor; Green's function; Coulomb force