

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0905_06

变速度轴向运动粘弹性梁的动态稳定性^{*}

杨晓东¹, 陈立群^{2,3}

(1. 沈阳航空工业学院 工程力学系, 沈阳 110034;

2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

3. 上海大学 力学系, 上海 200436)

(本刊编委陈立群来稿)

摘要: 研究速度变化的轴向运动粘弹性梁在亚谐波共振及组合共振范围内的参数振动。通过平均法, 在运动参数激励频率为 2 倍固有频率或为两阶固有频率之和附近时得到了自治的常微分方程组。在参数激励频率和激励振幅平面上, 可以找到由于共振而产生的失稳区域, 并应用数值方法验证了理论推导结果的正确性。分析了粘弹性阻尼、速度和预紧张力对失稳区域的影响。粘弹性阻尼使得共振失稳区域减小, 而速度和预紧张力使共振失稳区域在频率_振幅平面上发生漂移。

关键词: 亚谐波共振; 平均法; 振动稳定性; 轴向运动梁

中图分类号: O317 文献标识码: A

引 言

轴向运动物体系统包括传输带, 带锯, 生产过程中的纸张等。由于传输速度的存在, 这些系统往往会产生振动, 而系统的振动却是人们想要消除的。这种轴向运动系统一般会被假设为 Euler-Bernoulli 梁模型。很多论文研究了匀速度对梁的动态特性的影响: 系统的固有频率会随着传输速度的增大而减小, 当达到某一临界速度时, 运动梁就会出现发散失稳现象^[1, 2]。

实际上, 系统并不总是以严格的均匀速度运动的。如果传输速度有脉动成分, 那么梁的振动特性会出现更为复杂的动态特性。虽然轴向变速运动弹性梁的动态稳定性已有大量研究^[3~8], 但均没有涉及梁的粘弹性。

本文研究两端铰支变速度运动梁的稳定性问题。假设参数激励为周期性的, 利用二阶 Galerkin 截断和平均法, 我们分析亚谐波及组合共振范围内系统的稳定性。通过与数值解的比较, 可以证明在激励幅值较小时我们所得结果的正确性。

1 运动方程及其 Galerkin 截断

假设沿 x 方向的带有预紧力的梁只在 y 方向有横向振动, 那么通过牛顿第二定律就可以得到梁的运动方程为

* 收稿日期: 2003_10_09; 修订日期: 2005_04_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472060); 上海市自然科学基金资助项目(04ZR14058)

作者简介: 杨晓东(1977—), 男, 汉族, 河北沧州人, 博士(联系人, Tel: + 86_24_86141630; E_mail: jxdyang@163.com)。

$$\rho \left[\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial y}{\partial x} + v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad (1)$$

其中 y 是横向位移, ρ 是梁密度, v 是梁的轴向运动速度, T 是加在梁两端的预紧力. 这里考虑两端铰支的情况, 有边界条件

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0; \quad y''(0, t) = 0, \quad y''(L, t) = 0, \quad (2)$$

L 是梁的长度, 微分符号表示对 x 的微分. 假设速度 v 是在稳定速度 v_0 上加上周期性小脉动,

$$v = v_0(1 + h \cos \Omega t). \quad (3)$$

对于梁材料的粘弹性, 我们采用 Kelvin 粘弹性模型, 即

$$E = E_0 \left[1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right], \quad (4)$$

其中 E_0 是梁的刚性系数, α 为粘弹性阻尼系数, 并假设 α 是一小量.

对方程(1)及(2)做无量纲化, 有

$$\begin{aligned} \eta + 2u_0 \eta' + (u_0^2 - \mu^2) \eta'' + \eta^{(4)} + \alpha \eta^{(4)} + 2u_0^2 h \eta' \cos \omega \tau + \\ 2u_0 h \eta' \cos \omega \tau - u_0 h \omega \eta \sin \omega \tau = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta(0, \tau) = 0, \quad \eta(1, \tau) = 0, \quad \eta'(0, \tau) = 0, \quad \eta'(1, \tau) = 0, \quad (6)$$

其中 $(\quad)'$ 表示为 ξ 的导数, $(\dot{\quad})$ 表示为 τ 的导数, 并且有

$$\begin{cases} \eta = \frac{y}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = t \sqrt{\frac{E_0 I}{\rho L^4}}, \quad u_0 = v_0 \sqrt{\frac{\rho L^2}{E_0 I}}, \\ \mu^2 = \frac{TL^2}{E_0 I}, \quad \alpha = \alpha \sqrt{\frac{E_0 I}{\rho L^4}}, \quad \omega = \Omega \sqrt{\frac{\rho L^4}{EI}}. \end{cases} \quad (7)$$

对于方程(5), 可以采用 Galerkin 方法对其简化. 考虑边界条件(6), 方程(5)的解可以展开为如下 Fourier 级数形式:

$$\eta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^m q_n(\tau) \sin(n\pi\xi). \quad (8)$$

现考虑(8)式的前两阶截断, 即 $m = 2$. 系统控制微分方程离散化得到常微分方程组:

$$\dot{y} = Ay + hA_1 y \cos \omega \tau + \omega h A_2 y \sin \omega \tau + \alpha A_3 y, \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} y = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T, \\ A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \pi^2(u_0^2 - \mu^2)\mathbf{G} - \pi^4\mathbf{H} & -\frac{16}{3}u_0\mathbf{J} \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2u_0^2\pi^2\mathbf{G} & -\frac{16}{3}u_0\mathbf{J} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \frac{8}{3}u_0\mathbf{J}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\pi^4\mathbf{H} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

矩阵 A 描述梁运动速度为均匀时系统在平凡解位置的动态特性, 此时临界速度 $v_c =$

$\sqrt{\mu^2 + \pi^2}^{1/2}$. 若 $v < v_c$, 则矩阵 A 就有 4 个特征值, $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$.

存在正则变换矩阵 T , 满足

$$T^T A T = \Omega = \begin{bmatrix} -\omega_1 \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\omega_2 \mathbf{J} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

引入变换 $x = Ty$, (9) 式即可化为有关变量 x 的形式

$$\dot{x} = \Omega x + hD_1 x \cos \omega \tau + \omega h D_3 x \sin \omega \tau + \alpha D_3 x, \quad (12)$$

$$\text{其中 } D_1 = T^T A_1 T, D_2 = T^T A_2 T, D_3 = T^T A_3 T \quad (13)$$

2 平均法

为方便分析, 引入新的时间变量 $\tau = \omega t$. 假设在 ω_0 附近的小范围内有失稳发生, 可以设 $\omega = \omega_0(1 + \delta)$, 其中 δ 为一小变量, 这样从(12)式可以得到

$$\dot{x} = \Omega_0 x - \delta \Omega_0 x + h \frac{D_1}{\omega_0} x \cos \tau + h D_2 x \sin \tau + \alpha \frac{D_3}{\omega_0} x, \quad (14)$$

其中

$$\Omega_0 = \frac{\Omega}{\omega_0} = \begin{bmatrix} -k_1 J & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -k_2 J \end{bmatrix}, \quad k_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad k_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}. \quad (15)$$

在(14)式中 δ, h 和 α 皆为小量, 实际上我们就是要研究此3种变量的系统的稳定性. 为便于分析, 把 x 写成幅值相角的形式

$$x_1 = a_1 \cos \phi_1, \quad x_2 = a_1 \sin \phi_1, \quad x_3 = a_2 \cos \phi_2, \quad x_4 = a_2 \sin \phi_2, \quad (16)$$

其中 $\phi_1 = k_1 \tau + \theta_1$, $\phi_2 = k_2 \tau + \theta_2$, 而 $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ 都是有关 τ 的变量. 利用(16)式和它的微分, 就可以得到与小量参数有关的方程

$$\begin{cases} \dot{a}_1 = g_1 \cos \phi_1 + g_2 \sin \phi_1, & a_1 \dot{\theta}_1 = g_2 \cos \phi_1 - g_1 \sin \phi_1, \\ \dot{a}_2 = g_3 \cos \phi_2 + g_4 \sin \phi_2, & a_2 \dot{\theta}_2 = g_4 \cos \phi_2 - g_3 \sin \phi_2, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} g_i = & (D_1^{i1} a_1 \cos \phi_1 + D_1^{i2} a_1 \sin \phi_1 + D_1^{i3} a_2 \cos \phi_2 + D_1^{i4} a_2 \sin \phi_2) \frac{1}{\omega_0} \cos \tau + \\ & (D_2^{i1} a_1 \cos \phi_1 + D_2^{i2} a_1 \sin \phi_1 + D_2^{i3} a_2 \cos \phi_2 + D_2^{i4} a_2 \sin \phi_2) \sin \tau + \\ & (D_3^{i1} a_1 \cos \phi_1 + D_3^{i2} a_1 \sin \phi_1 + D_3^{i3} a_2 \cos \phi_2 + D_3^{i4} a_2 \sin \phi_2) \frac{\alpha}{\omega_0} + \\ & \begin{cases} \mathcal{E}_1 a_1 \sin \phi_1, & i = 1, \\ -\mathcal{E}_1 a_1 \cos \phi_1, & i = 2, \\ \mathcal{E}_2 a_2 \sin \phi_2, & i = 3, \\ -\mathcal{E}_2 a_2 \cos \phi_2, & i = 4, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

其中上角标表示元素所在矩阵的行和列.

当 $k_1 = 1/2$ 时, 对(17)式应用平均算子^[4,9] $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\quad) d\tau$, 可以得到

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = M_1 \alpha \xi_1 + \left[\sqrt{U_1^2 + V_1^2} h - N_1 \alpha + 0.5 \delta \right] \zeta_1, \\ \dot{\zeta}_1 = \left[\sqrt{U_1^2 + V_1^2} h - N_1 \alpha + 0.5 \delta \right] \xi_1 + M_1 \alpha \zeta_1. \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$\xi_1 = a_1 \cos(\theta_1 + \varphi_1), \quad \zeta_1 = a_1 \sin(\theta_1 + \varphi_1), \quad \varphi_1 = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{U_1}{V_1} \right], \quad (20)$$

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{D_1^{11} - D_1^{22}}{\omega_0} + D_2^{12} + D_2^{21} \right], & V_1 = \frac{1}{4} \left[\frac{D_1^{12} + D_1^{21}}{\omega_0} - D_2^{11} + D_2^{22} \right], \\ M_1 = \frac{D_3^{11} + D_3^{22}}{2\omega_0}, & N_1 = \frac{D_3^{21} - D_3^{12}}{2\omega_0}. \end{cases} \quad (21)$$

如果(19)式特征方程解中至少有一个具有正实部,则系统失稳,反之系统稳定。(19)式的特征方程的根为

$$\lambda_{1,2} = M_1 \alpha \pm \sqrt{U_1^2 + V_1^2} h^2 - \left[N_1 \alpha - \frac{2\omega_1 - \omega}{4\omega_1} \right]^2, \quad (22)$$

分析(22)式,我们可以在 (ω, h) 平面上找到位于 $\omega = 2\omega_1$ 附近的失稳区域。此时,参数激励频率是系统第1阶固有频率的2倍,我们称这种失稳振动形式为第1阶亚谐波共振。

实际上,在(22)式中令阻尼系数 $\alpha = 0$,由 $\lambda = 0$ 决定的失稳区域边界由一对直线组成

$$h = \frac{\omega \pm 2\omega_1}{4\omega_1(U_1^2 + V_1^2)}. \quad (23)$$

直线之间的部分有正实部的解,即为失稳区域。阻尼把失稳区域边界由直线变为曲线,从而使失稳区域变小,阻尼的大小决定了失稳区域的大小。

在 $k_2 = 1/2$ 时,对(17)式应用平均化算子,做同以上相似的变换,则在 (ω, h) 平面上 $\omega = 2\omega_2$ 附近找到参数激励是第2阶固有频率2倍的失稳区域,我们称之为第2阶亚谐波共振。

现在考虑 $k_1 + k_2 = 1$,同样对(17)式作平均化运算,可以得到一组线性常微分方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (M_{11}\alpha + iN_{11}\alpha - i\delta k_1)x_1 + (U_{11} + iV_{11})x_2, \\ \dot{x}_2 = (U_{12} + iV_{12})x_1 + (M_{12}\alpha + iN_{12}\alpha - i\delta k_2)x_2, \end{cases} \quad (24)$$

其中

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \cos \theta_1 + i a_1 \sin \theta_1, & x_2 = a_2 \cos \theta_2 - i a_2 \sin \theta_2, \\ U_{11} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{D_1^{13} - D_1^{24}}{\omega_0} + D_2^{14} + D_2^{23} \right\}, & V_{11} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{D_1^{14} + D_1^{23}}{\omega_0} - D_2^{13} + D_2^{24} \right\}, \\ U_{12} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{D_1^{31} - D_1^{42}}{\omega_0} + D_2^{32} + D_2^{41} \right\}, & V_{12} = \frac{1}{4} \left\{ \frac{D_1^{32} + D_1^{41}}{\omega_0} - D_2^{31} + D_2^{42} \right\}, \\ M_{11} = \frac{D_3^{11} + D_3^{22}}{2\omega_0}, & N_{11} = \frac{D_3^{21} - D_3^{12}}{2\omega_0}, & M_{12} = \frac{D_3^{33} + D_3^{44}}{2\omega_0}, & N_{12} = \frac{D_3^{43} - D_3^{34}}{2\omega_0}. \end{cases} \quad (25)$$

分析(24)式的特征方程的解,可以在 (ω, h) 平面上找到 $\omega = \omega_1 + \omega_2$ 附近的失稳区域。这种失稳正是由组合共振而引发。

第2阶亚谐波共振及组合共振的失稳区域与第1阶亚谐波的失稳区域相似,但第1阶亚谐波共振在较小的激励幅上即可发生,而第2阶亚谐波共振及组合共振需有较大的激励幅才会发生,但失稳区域在激励频率上分布更广。

当然,我们可以在 $k_2 - k_1 = 1$ 时利用平均化算子由(17)式得到一组线性常微分方程,但是在 $\omega = \omega_2 - \omega_1$ 附近没有发现失稳现象。

3 数值验证

利用4、5阶变步长的Runge-Kutta方法,可以解方程(9),从而得出其振动特性。研究用数值方法所得到的时间历程图,可以很容易知道 (ω, h) 平面某点的稳定性。设 $\alpha = 0.001$, $v_0 = 8$, $\mu = 10$,比较平均法所得结果及数值法所得结果,我们发现当 $h \ll 1$ 时两者的差别非常小,从而也证明了分析方法的正确性(图1)。

粘弹性阻尼对系统的动态特性有很大的影响,前面已经提到,由于阻尼使系统能量衰减,所以使之不易失稳(图2)。

对于运动速度稳定部分 v_0 的影响,因为系统每阶固有频率会随速度的增大而减小^[2],所

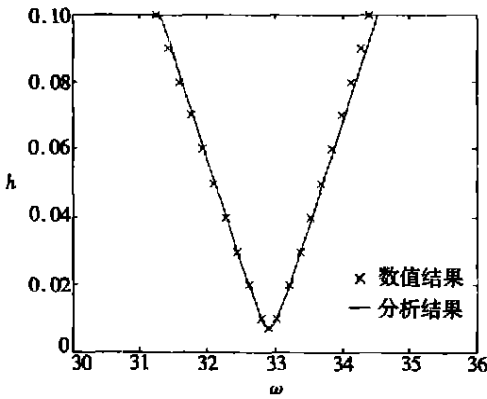


图1 分析结果和数值结果的比较
(第1阶亚谐波共振)

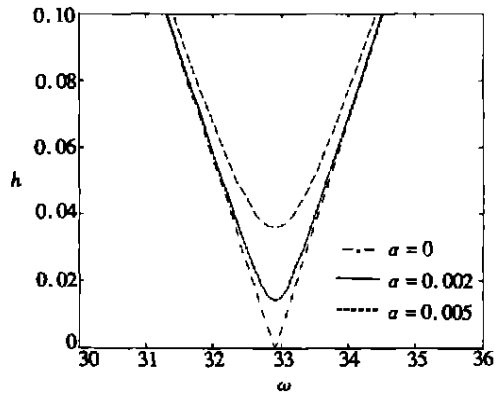
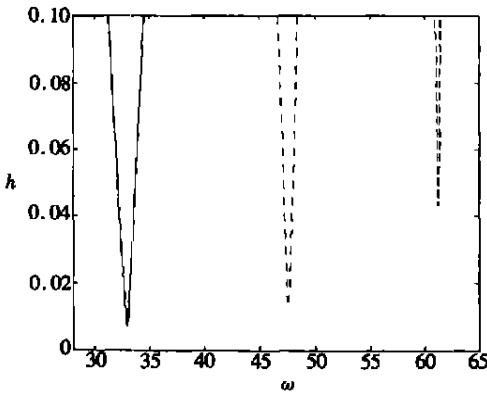
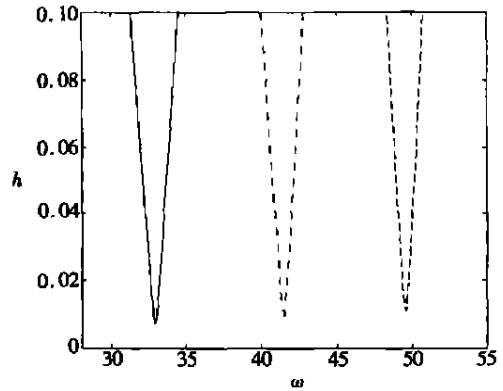


图2 阻尼对失稳区域的影响
(第1阶亚谐波共振)



—: $v_0 = 8$; - · - : $v_0 = 6$; ---: $v_0 = 3$

图3 速度稳定部分对失稳区域的影响
(第1阶亚谐波共振)



—: $\mu = 10$; - · - : $\mu = 11$; ---: $\mu = 12$

图4 预紧力对失稳区域的影响
(第1阶亚谐波共振)

以,失稳区域会在频率域上有偏移。同时由数值结果可知速度增大,失稳区域也会相应变大(图3)。

预紧力 μ ,同运动速度一样,它也会影响系统的固有频率。从 (ω, h) 平面上,我们可以发现它对失稳区域的影响主要是使之偏移,对失稳区域大小的影响比较小(图4)。

4 结 论

主要研究变速度轴向运动梁在亚谐波共振和组合共振范围内的稳定性。首先通过 Galerkin 方法得到系统的控制方程,然后运用平均化方法得到自治的线性常微分方程组。于是,容易得到激励频率和激励振幅平面上的失稳区域。数值结果也验证了结论的正确性。粘弹性阻尼使失稳区域变小,而因为速度和预紧力会影响系统的固有频率,所以它们对失稳区域的影响,不仅仅使它范围有所变化,还会使失稳区域在频率域上发生偏移。

[参 考 文 献]

- [1] Wickert J A, Mote C D Jr. Current research on the vibration and stability of axially moving materials

- [J]. The Shock and Vibration Digest, 1988, **20**(5): 3—13.
- [2] Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially moving continua[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1990, **57**(Sep): 267—284.
- [3] Pellicano F, Vestroni F. Nonlinear dynamics and bifurcations of an axially moving beam[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2000, **122**(1): 21—30.
- [4] Asokanathan S F, Ariaratnam S T. Flexural instabilities in axially moving bands[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1994, **116**(3): 275—279.
- [5] Öz H R, Pakdemirli M, Oezkaya E. Transition behaviour from string to beam for an axially accelerating material[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, **215**(3): 571—576.
- [6] Öz H R, Pakdemirli M. Vibrations of an axially moving beam with time dependent velocity[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, **227**(2): 239—257.
- [7] Özkaya E, Pakdemirli M. Vibrations of an axially accelerating beam with small flexural stiffness[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **234**(3): 521—535.
- [8] Öz H R. On the vibrations of an axially traveling beam on fixed supports with variable velocity[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, **239**(3): 556—564.
- [9] Ariaratnam S T, Namchivaya N Sri. Dynamic stability of pipes conveying pulsating fluid[J]. Journal of Sound and Vibration, 1986, **107**(2): 215—230.

Dynamic Stability of Axially Moving Viscoelastic Beams With Pulsating Speed

YANG Xiao_dong¹, CHEN Li_qun^{2,3}

(1. Department of Engineering Mechanics, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering,
Shenyang 110034, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China;

3. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China)

Abstract: Parametric vibration of an axially moving, elastic, tensioned beam with pulsating speed was investigated in the vicinity of subharmonic and combination resonance. The method of averaging was used to yield a set of autonomous equations when the parametric excitation frequency is twice or the combination of the natural frequencies. Instability boundaries were presented in the plane of parametric frequency and amplitude. The analytical results were numerically verified. The effects of the viscoelastic damping, steady speed and tension on the instability boundaries were numerically demonstrated. It is found that the viscoelastic damping decreases the instability regions and the steady speed and the tension make the instability region drift along the frequency axis.

Key words: subharmonic resonance; averaging method; stability of vibration; axially moving beam