

文章编号: 1000_0887(2005) 08_0899_06

无网格 Galerkin 法与有限元耦合新算法^{*}

赵光明^{1,2}, 宋顺成¹

(1. 西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031;

2. 安徽理工大学 资源开发与管理工程系, 安徽 淮南 232001)

(本刊编委宋顺成来稿)

摘要: 通过构造新的斜坡函数, 把无网格 Galerkin 法与有限元耦合算法应用到全域范围, 并使其能适应不同连接域内单元结点构成, 既满足了本质边界条件实现的需要, 又能方便灵活的布置无网格点和有限元法中的单元, 满足复杂计算要求。计算结果与理论解比较表明所提出的方法是可行和有效的。

关键词: 无网格 Galerkin 法; 耦合; 斜坡函数; 有限元

中图分类号: O302 **文献标识码:** A

引 言

无网格方法作为一种数值方法, 它产生于 20 世纪 70 年代, 从 1992 年 Nayroles 等^[1] 提出模糊单元起, 无网格法引起国内外力学界的关注, 同时它在解决诸多问题方面显示出明显的优势。

后来, Belytschko 等人^[2] 在模糊单元的基础上提出了无网格 Galerkin 法(EFG), 它是利用移动最小二乘插值来求解 Galerkin 方程的方法。EFG 已成功地应用到一系列问题, 如线弹性问题^[2]、断裂和裂纹扩展问题^[3]、振动问题^[4]等方面。EFG 与传统的有限元方法(FE)类似, 都是利用 Galerkin 方程来求解结点的位移, 但不同的是, 其形函数不具备 Kronecker δ 函数的性质, 即 $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$, $\phi_i(x_j)$ 是形函数在 x_j 的值。因此施加本质边界条件变得复杂, 许多学者在这方面进行了研究, 目前主要有以下几种方法: 配点法和修正配点法^[5, 6]、罚方法^[6]、Lagrange 乘法子法^[7]及与有限元耦合等方法^[8-11]。

EFG 具有精度高、后处理方便、可消除体积闭锁现象、收敛快等特点, 尤其在遇到网格重新划分时显示出明显的优势, 不需要更新或添加网格^[2, 12], 但是无网格 Galerkin 法存在的不足之处是 ① 计算工作量大; ② 权函数及其参数的选择很难准确的确定; ③ 本质边界条件施加很困难。

本文结合 EFG 和有限元方法的特点, 把只应用于本质边界的两者耦合方法拓展到全部区域, 给出无网格结点和有限元网格的合理布置, 减少了计算工作量; 同时修正了权函数, 建立起全域内统一的形函数。

* 收稿日期: 2004_01_10; 修订日期: 2005_05_08

作者简介: 赵光明(1976—), 男, 安徽桐城人, 博士生(联系人, Tel: + 86_554_6668455; E_mail: guangmingzhao@163.com)。

1 无网格 Galerkin 法

某子域 Ω_x 内有 n 个自由结点 $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 场函数 $u(x)$ 可由移动最小二乘法近似的表示为函数 $u^h(x)$

$$u(x) \approx u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x), \quad \forall x \in \Omega_x, \tag{1}$$

其中基函数 $\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$, m 为基数, $\mathbf{a}(x)$ 为 m 维的系数向量, 函数 $u^h(x)$ 也称为试函数. 根据文献[2]的理论可以得到 EFG 法的移动最小二乘插值形式

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i^* = \Phi(x) \mathbf{u}^*, \tag{2}$$

式中, \mathbf{u}^* 为名义结点值, $\mathbf{u}^* = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^*]$; $\phi_i(x)$ 称为形函数, $\Phi(x) = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)]$ 为形函数矩阵. 于是由最小势能原理可以得到求解 \mathbf{u}^* 的线性方程组:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^* = \mathbf{f}, \tag{3}$$

其中 $\mathbf{K}_j = \int_{\Omega} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega$, $\mathbf{f}_i = \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \phi_i \mathbf{t} d\Gamma$,

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,1} & 0 \\ 0 & \phi_{i,2} \\ \phi_{i,2} & \phi_{i,1} \end{bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n(\text{二维情况})).$$

对于三维情况可类似写出; \mathbf{D} 是弹性矩阵, \mathbf{b} 及 \mathbf{t} 分别为体积力和面力.

2 无网格 Galerkin 法与有限元耦合新算法

诸多文献^[8-10] 采用了无网格与有限元耦合的思路, 但是其主要目的是利用有限元来实现本质边界条件, 因此它只在给定本质边界条件的边界配置一些有限元, 在其它区域内采用无网格法来进行计算. 由于目前无网格 Galerkin 法主要思想是利用相关结点的信息, 它不同于有限元中只利用单元结点的值, 因此无网格 Galerkin 法的计算量明显大于有限元, 对于较大且结点数较多的全域计算效率较低. Belytschko 等人^[9] 利用有限元形函数 $N(x)$ 构造斜坡函数 (ramp function)

$$R(x) = \sum_j N_j(x) \quad (x_j \in \Gamma_e), \tag{4}$$

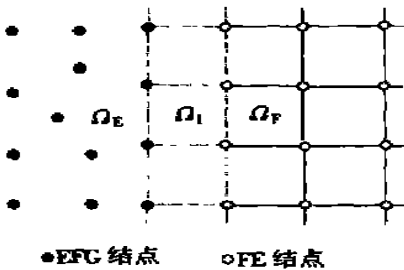


图 1 Belytschko 提出的 EFG/FE 耦合图

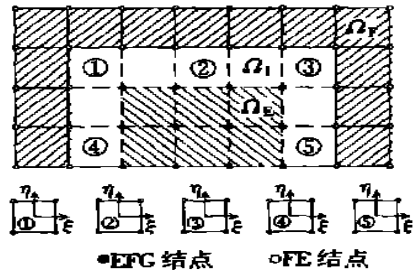


图 2 连接域内网格结点

并将这种耦合算法由边界应用到全域内计算, 如图 1 所示. 但是在这种方法连接域中的单元结点构成必须是完全一致的, 即由 2FE+ 2EFG 结点构成. 当全域被明确划分为无网格和有限元结点两侧, 如果同时再考虑本质边界条件(本质边界点须在有限元域内), 这种方法只能应用

于构形较为规则的简单区域计算。

本文在其基础上,提出了新的斜坡函数构造方法,使其方便适应连接域内单元结点构成,从而可以应用到复杂和不规则全域。对于平面问题,如图 2 中将全域划分为 3 个区域,即有限元域 Ω_F 、无网格域 Ω_E 、连接域 Ω_I , 现分别予以计算。

有限元域内采用四结点等参元计算。设 $x(x, y)$ 是等参元 $(\Omega_F)_e$ 内一点,局部坐标为 (ξ, η) , 其位移向量 $u^{FE}(x)$ 和应力向量 $\sigma^{FE}(x)$ 分别为:

$$u^{FE}(x) = N^{FE}(\xi, \eta)(u^{*FE})_e, \quad \sigma^{FE}(x) = B^{FE}(\xi, \eta)(u^{*FE})_e,$$

其中 $N^{FE}(\xi, \eta)$ 是等参元的形函数。无网格域内任一点 $x(x, y)$ 的位移向量 $u^{EFG}(x)$ 和应力向量 $\sigma^{EFG}(x)$ 分别为:

$$u^{EFG}(x) = \Phi^{EFG}(x)u^{*EFG}, \quad \sigma^{EFG}(x) = B^{EFG}(x)u^{*EFG},$$

其中 $\Phi^{EFG}(x)$ 是无网格法的形函数。为了使位移协调,在连接域内,引入斜坡函数 $\beta(x)$, 使得该区域内的结点在靠近有限元边界时的位移和有限元法计算该点的结果一致,同时靠近无网格边界时则与无网格法的计算结果一致。于是连接域内任一点 $x(x, y)$ 的位移向量 $u^{INT}(x)$ 为

$$u^{INT}(x) = [1 - \beta(x)]u^{FE}(x) + \beta(x)u^{EFG}(x), \quad (5)$$

因此,连接域内的形函数可以表示为:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} [1 - \beta(x)]N_i(\xi(x)) + \beta(x)\phi_i(x), & x_i \in (\Omega_I)_e, \\ \beta(x)\phi_i(x), & x_i \notin (\Omega_I)_e, \end{cases} \quad (6)$$

其导数为:

$$\phi_{i,j}(x) = \begin{cases} -\beta_{,j}N_i + (1 - \beta)N_{i,j} + \beta_{,j}\phi_i + \beta\phi_{i,j}, & x_i \in (\Omega_I)_e, \\ \beta_{,j}\phi_i + \beta\phi_{i,j}, & x_i \notin (\Omega_I)_e. \end{cases} \quad (7)$$

式(6)在界面上是连续的,但其导数式(7)有一突变,如果连接域内的结点数量很少,实验结果表明突变将不会影响全域计算结果。为了减少突变的影响,本文采用了 Dolbow^[13]的斜坡函数 $\beta(x)$

$$\beta(x) = 3R^2(x) - 2R^3(x), \quad (8)$$

$$\beta_{,i}(x) = [6R(x) - 6R^2(x)]R_{,i}. \quad (9)$$

根据 $\beta(x)$ 函数的性质,本文构造了 $R(x)$, 使得 $R(x) = 0, x \in \Gamma_F; R(x) = 1, x \in \Gamma_E$, 如图 2 所示:

$$\textcircled{1} \text{型结点构成 } R(x) = \frac{1}{4}[1 + \xi(x)][1 - \eta(x)];$$

$$\textcircled{2} \text{型结点构成 } R(x) = \frac{1}{2}[1 - \eta(x)];$$

$$\textcircled{3} \text{型结点构成 } R(x) = \frac{1}{4}[1 - \xi(x)][1 - \eta(x)];$$

$$\textcircled{4} \text{型结点构成 } R(x) = \frac{1}{2}[1 + \xi(x)];$$

$$\textcircled{5} \text{型结点构成 } R(x) = \frac{1}{2}[1 - \xi(x)].$$

令全域内任一点 $x(x, y)$ 的位移为 $u(x) = N(x)u^*$, 形函数矩阵

$$N(x) = \begin{bmatrix} \Phi(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(x) \end{bmatrix},$$

$\Phi(\mathbf{x})$ 是形函数 $\phi_i(\mathbf{x})$ 的行矩阵

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} N_i(\xi(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in (\Omega_F)_e, \\ \phi_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_E, \\ [1 - \beta(\mathbf{x})]N_i(\xi(\mathbf{x})) + \beta(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in (\Omega_I)_e, \mathbf{x}_i \in (\Omega_I)_e, \\ \beta(\mathbf{x})\phi_i(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in (\Omega_I)_e, \mathbf{x}_i \notin (\Omega_I)_e, \end{cases} \quad (10)$$

得到分离控制方程:

$$Ku^* = f, \quad (11)$$

其中 $K = \int_{\Omega} B^T(\mathbf{x})DB(\mathbf{x})d\Omega, f = \int_{\Omega} N^T(\mathbf{x})b(\mathbf{x})d\Omega + \int_{\Gamma_t} N^T(\mathbf{x})t(\mathbf{x})d\Gamma$

如果将全域 Ω 划分为有限元域、无网格域、及连接域 3 种积分区域, 并在其域内分别划分成 n_F, n_E, n_I 个积分单元, 那么刚度矩阵

$$K = K^{FE} + K^{EFG} + K^{INT} = \sum_{c=1}^{n_F} (K^{FE})_c + \sum_{c=1}^{n_E} (K^{EFG})_c + \sum_{c=1}^{n_I} (K^{INT})_c, \quad (12)$$

对应矩阵的积分方法为:

$$\begin{aligned} (K^{FE})_c &= \sum_i \sum_j W_i W_j [B^{FE}(\xi, \eta_k)]^T DB^{FE}(\xi, \eta_k) |J(\xi, \eta_k)|, \\ (K^{INT})_c &= \sum_i \sum_j W_i W_j [B^{INT}(x(\xi, \eta_k))]^T DB^{INT}(x(\xi, \eta_k)) |J(\xi, \eta_k)|, \\ (K^{EFG})_c &= \sum_i \sum_j W_i W_j [B^{EFG}(x(\xi, \eta_k))]^T DB^{EFG}(x(\xi, \eta_k)) |J(\xi, \eta_k)|, \end{aligned}$$

载荷矩阵 $f = f^{FE} + f^{EFG} + f^{INT}$, 积分与上面的积分相似。

3 算 例

设一个在 x 方向承受均匀拉伸的平板, 拉应力 $p = 10 \text{ N/m}$, 板中有一半径为 1 m 的小圆孔。材料的弹性模量 $E = 3 \times 10^5 \text{ Pa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 按平面应力分析, 考虑到结构的对称性, 取结构的四分之一作为计算模型。应力、位移的理论解参见文献[14], 计算中采用线性基, 区域划分如图 3。域 $\Omega_F, \Omega_I, \Omega_E$ 内分别采用 $2 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 3$ 高斯积分, 节点 i 的影响半径 $d_m = 3.5$ 。收敛研究采用以下位移误差^[15]形式:

$$\|E\|_u = \left[\int_{\Omega} (u - u^{\text{exact}})^T (u - u^{\text{exact}}) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (13)$$

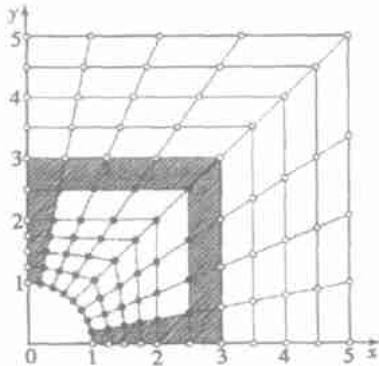


图 3 无限大圆孔板计算的区域布置

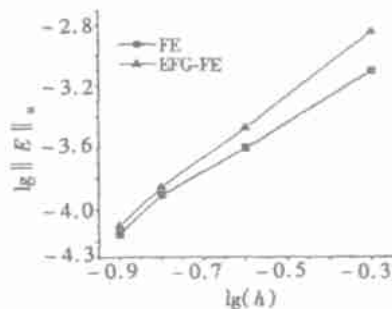


图 4 与有限元计算的收敛性结果比较 (h 表示结点间距)

计算结果见图 4 和图 5。从图 4 可见, 在同样的结点数下, 无网格与有限元的耦合算法具

有比有限元更高的精度, 而且实际使用的计算时间比无网格 Galerkin 法明显减少。

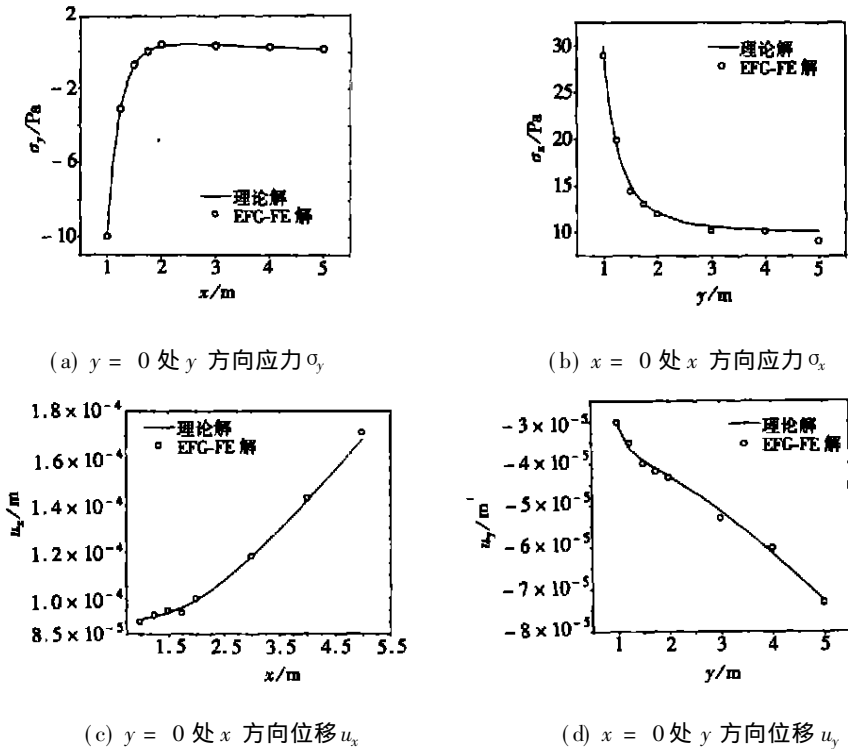


图 5 应力、位移计算结果

图 5 分别给出了耦合法、理论解下 $x = 0$ 和 $y = 0$ 处相关应力和位移分布曲线, 结果说明耦合法具有很高的计算精度。

4 结 论

本文研究了无网格 Galerkin 与有限元耦合的新算法, 构造了斜坡函数, 使耦合法能适用于复杂全域的计算, 并利用自编程序对实例进行了计算。计算说明, 这种耦合法是可行和有效的, 不但可以节约很多的计算时间, 同时也发挥了无网格法的优势, 得到了较高的计算精度。此种方法对复杂、不规则的及计算面变化的结构分析具有实际应用价值。

[参 考 文 献]

- [1] Nayroles B, Touzot G, Villon P. Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements[J]. Computational Mechanics, 1992, 10(5): 307—318.
- [2] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element_free Galerkin method[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1994, 37(2): 229—256.
- [3] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L, et al. Element_free Galerkin methods for static and dynamic fracture[J]. Internat J Solids Structure, 1995, 32(17/ 18): 2547—2570.
- [4] Wang Y H, Li W D. Parametric study for an efficient meshless method in vibration analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 255(2): 261—279.
- [5] Mukherjee S, YU Xie. On boundary conditions in the element free Galerkin method[J]. Computational Mechanics, 1997, 19(4): 264—270.

- [6] Zhu T, Atluri. A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in element free Galerkin method[J]. Computational Mechanics, 1998, **21**(3): 211—221.
- [7] Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. A new implementation of the element free Galerkin method[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1994, **113**(3/4): 397—414.
- [8] Krongauz Y, Belytschko T. Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximation using finite element[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, **131**(1/2): 133—145.
- [9] Belytschko T, Organ D Y, Krongauz Y. A Coupled finite element_element free Galerkin methods[J]. Computational Mechanics, 1995, **17**(3): 186—195.
- [10] Hegan D. Element free Galerkin method in combination with finite element approaches[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, **135**(1/2): 143—166.
- [11] 王卫东, 赵国群, 栾贻国. 无网格方法中本质边界条件的处理[J]. 力学季刊, 2002, **23**(4): 521—527.
- [12] Belytschko T. Meshless method: an overview and recent developments[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 1996, **139**(1/4): 3—47.
- [13] Dolbow T, Belytschko T. Volumetric locking in the element free Galerkin method[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1999, **46**(6): 925—942.
- [14] Atkinand R J, Fox N. An Introduction to the Theory of Elasticity [M]. London: Longman, 1980.
- [15] Chung HJ, Belytschko T. An error estimate in the EFG method[J]. Computational Mechanics, 1998, **21**(2): 91—100.

New Algorithm of Coupling Element-Free Galerkin With Finite Element Method

ZHAO Guang_ming^{1,2}, SONG Shun_cheng¹

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P. R. China;

2. Department of Resource Exploration and Management Engineering,
Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001, P. R. China)

Abstract: Through the construction of a new ramp function, the element_free Galerkin method and finite element coupling method were applied to the whole field, and was made fit for the structure of element nodes within the interface regions, both satisfying the essential boundary conditions and deploying meshless nodes and finite elements in a convenient and flexible way, which can meet the requirements of computation for complicated field. The comparison between the results of the present study and the corresponding analytical solutions shows this method is feasible and effective.

Key words: element_free Galerkin method; coupling; ramp function; finite element