应用数学和力学, 第 26 卷 第 7 期(2005 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0867_08

大应变固结理论的分区变分原理及其广义变分原理*

罗晓辉[1], 李永乐[2], 罗 昕[1]

(1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074;
2. 华北水利水电学院 岩土工程系, 郑州 450008)

(陈正汉推荐)

摘要: 土体材料本构特性的差异问题与大变形问题是分析岩土材料变形特性的基本问题• 根据有限变形的描述方法构筑土体结构大变形固结方程, 证明了大变形固结的变分原理• 应用分区子结构的连续条件, 推导固结理论的分区变分原理• 引用 Lagrange 乘子法构筑并证明了大变形固结问题在无约束状态下的广义分区变分原理•

关 键 词: 大应变固结; 变分原理; 分区变分; 广义变分
中图分类号: O176 文献标识码: A

引 言

饱和软粘性土的变形是岩土工程核心问题之一• 其显著的特征是应变量级通常大于10% 以上• 数值分析计算与实际不能较好吻合的原因之一[1] 是位移与应变的关系视为线性关系, 即小应变假定• 因而采用位移与应变呈非线性关系的大应变分析是十分必要的• 另外, 岩土体的结构形式、岩土体与结构的相互作用分析等, 因岩土体性质的差异, 岩土体的非线性特性可能服从于不同的屈服准则• 即便采用相同的屈服准则, 其计算参数, 如内聚力 c、内摩擦角 φ 值也可以不同• 如图 1 所示, 基坑开挖土钉支护结构由土钉、土体及钢筋网混凝土面板 3 种子结构组成• 土钉为钢筋材料, 采用 Mises 屈服准则; 钢筋网混凝土面板采用弹性本构描述; 土体可考虑分别为服从 Drucker 公设的稳定材料, 如饱和软粘土, 和服从于 Ilyushin 公设的非稳定材料, 如超固结砂质粘土• 因此将分析区域划分为若考虑干个子结构, 采用子结构分析方法更为简便• 本文在已有研究工作[2] 基础之上建立反映子结构特性[3, 4] 的大应变固结理论的分区变分原理及其广义变分原理•

1 结构分区的大应变固结系统方程

设结构分区的边界有: 位移边界 $\Gamma_{u\alpha}$, 应力边界 $\Gamma_{\sigma\alpha}$, 孔隙压力边界 $\Gamma_{p\alpha}$, 孔隙流边界 $\Gamma_{q\alpha}$ 及其分区界面 $\Gamma_{\alpha\beta}$, 且分区边界为 $\Gamma = \Gamma_{u\alpha} \cup \Gamma_{\sigma\alpha} \cup \Gamma_{\alpha\beta} = \Gamma_{p\alpha} \cup \Gamma_{q\alpha} \cup \Gamma_{\alpha\beta}$• 对于大应变问题

* 收稿日期: 2003_10_19; 修订日期: 2005_03_08
作者简介: 罗晓辉(1960—) , 男, 武汉人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_27_87795745; Fax: + 86_27_61272619; E_mail: luohexh@ public. wh. hb. cn、luo8045@ sina. com)•

的构形描述, 选择以初始构形为参考构形, 其相应的应力、应变描述称为 Lagrange 描述. 在分析区域内假定岩土介质的骨架为均质弹性体或弹塑性体, 孔隙水流动服从达西定律, 则大应变固结理论的系统方程可表述如下:

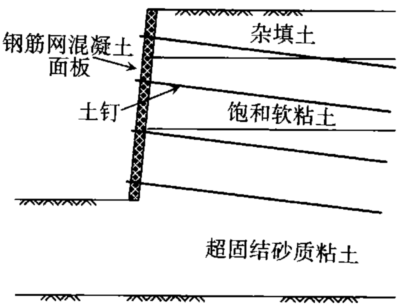

图 1　基坑开挖模拟计算的子结构类型

平衡方程:

$$[U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)]_{,j}+\rho_1 f_i=0. \tag{1}$$

几何方程:

$$e_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})/2. \tag{2}$$

本构方程:

$$\frac{\partial A(e)}{\partial e_{ij}}=S_{ij}. \tag{3}$$

渗流方程:

$$q_i=K_{ij}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]. \tag{4}$$

连续性方程

$$q_{i,i}+\dot{u}_{i,i}+\dot{u}_{k,i}u_{k,i}=0. \tag{5}$$

位移边界条件:

$$u_i=u_i\qquad(\Gamma\in\Gamma_u). \tag{6}$$

应力边界条件:

$$U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)n_j=T_{0i}\qquad(\Gamma\in\Gamma_\sigma). \tag{7}$$

孔隙水压力边界条件:

$$p=p\qquad(\Gamma\in\Gamma_p). \tag{8}$$

孔隙流边界条件:

$$q_i n_i=Q_i\qquad(\Gamma\in\Gamma_q). \tag{9}$$

交界面位移连续条件:

$$u_i^{(1)}=u_i^{(2)}\qquad(\Gamma\in\Gamma_{12}). \tag{10}$$

交界面应力连续条件:

$$\sum_{m=1}^{2}[U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}=0\qquad(\Gamma\in\Gamma_{12}). \tag{11}$$

交界面孔隙水压力连续条件:

$$p^{(1)}=p^{(2)}\qquad(\Gamma\in\Gamma_{12}). \tag{12}$$

交界面孔隙水流连续条件:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}q_i^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}=0\qquad(\Gamma\in\Gamma_{12}). \tag{13}$$

2　耦合分区变分原理

首先考虑将固结耦合分析域 Ω 划分为两个区域的情况进行讨论, 即 $\Omega=\Omega_1+\Omega_2$. 在 $\Omega_\alpha(\alpha=1,2)$ 的表面分别有 $\Gamma_{\sigma\alpha}$、$\Gamma_{u\alpha}$、$\Gamma_{p\alpha}$、$\Gamma_{q\alpha}$, 其中 $\Gamma_{\sigma\alpha}$ 为外荷载已知的边界, $\Gamma_{u\alpha}$ 为位移已知的边界, $\Gamma_{p\alpha}$ 为孔隙水压力已知的边界, $\Gamma_{q\alpha}$ 为孔隙水流量已知的边界. 记 Ω_1 和 Ω_2 的交界面为 Γ_{12}, 在 Γ_{12} 上从 Ω_1 指向 Ω_2 的单位法向矢量为 $\boldsymbol{n}_i^{(1)}$, 从 Ω_2 指向 Ω_1 的单位法向矢量为 $\boldsymbol{n}_i^{(2)}$, 则必有 $\boldsymbol{n}_i^{(1)}=-\boldsymbol{n}_i^{(2)}$. 因而分为两个区域的耦合固结问题的弹性分区变分原理可表述为:

在 Ω_α 中满足几何方程式(2) 的一切可能的位移 $u_i^{(\alpha)}(i=1,2,3;\alpha=1,2)$ 和孔隙水压力 $p^{(\alpha)}$, 在边界 $\Gamma_{u\alpha}$ 上满足位移边界条件式(6), 在边界 $\Gamma_{p\alpha}$ 上满足孔隙水压力边界条件式(8), 在

Γ_{12} 上满足位移、孔隙水压力连续条件式(10)、(12),其真实解使下列泛函:

$$\Pi_1 = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left\{A^{(\alpha)}(e) - u_i^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j} + \rho_1 f_i]^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}} u_i^{(\alpha)} T_{0i}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{14}$$

$$\Pi_2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left[\frac{1}{2}(U_{ik}p_{,i})^{(\alpha)}K_{ij}^{(\alpha)}(U_{ik}p_{,j})^{(\alpha)} - (U_{ik}p)^{(\alpha)}(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)} + \dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)}) - \right.$$
$$\left. K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_{j,i})^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\right]\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{q\alpha}} Q_i(U_{ik}p)^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{15}$$

取驻值的 $u_i^{(\alpha)}$ 和 $p^{(\alpha)}$ 必须满足平衡方程式(1),本构方程式(3),连续方程式(5),交界面应力、孔隙流连续条件式(11)、(13)•

证明　变分式(14)、(15),分别得到:

$$\delta\Pi_1 = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left\{\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}\delta e_{ij}^{(\alpha)} - [(U_{i,k}p)_{,j} + \rho_1 f_i]^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}}\delta u_i^{(\alpha)} T_{0i}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{16}$$

由几何方程

$$\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}\delta e_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta u_{i,j}^{(\alpha)} + u_{k,i}^{(\alpha)}\delta u_{k,j}^{(\alpha)}) = \frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_{k,j}^{(\alpha)} =$$
$$\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_k^{(\alpha)}\right]_{,j} - \left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\right]_{,j}\delta u_k^{(\alpha)}, \tag{17}$$

利用 Gauss 公式,并注意到 $\Gamma = \Gamma_{\sigma\alpha} + \Gamma_{u\alpha} + \Gamma_{12}$, 则有

$$\int_{\Gamma_\alpha}\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_k^{(\alpha)}\right]_{,j}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_{\sigma\alpha}}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_k^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma +$$
$$\int_{\Gamma_{u\alpha}}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_k^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{12}}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\delta u_k^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma\bullet \tag{18}$$

因为在 $\Gamma_{u\alpha}$ 上有 $u_k^{(\alpha)} = u_k$, 所以 $\delta u_k^{(\alpha)} = 0$, 且 $\delta u_k^{(1)} = \delta u_k^{(2)} = \delta u_k^{(\alpha)}$, 则将式(18)代入式(16),得

$$\delta\Pi_1 = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha} - \left\{\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\right]_{,j} + [(U_{ik}p)_{,j} + F_i]^{(\alpha)}\right\}\delta u_k^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Omega +$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}}\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)}) + (U_{ik}p)^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)} - T_{0i}\right]\delta u_k^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma +$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)}) + (U_{ik}p)^{(\alpha)}\right]n_j^{(\alpha)}\delta u_k^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{19}$$

若记交界面上的位移为 $u_i^{(12)}$, 则

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)}) + (U_{ik}p)^{(\alpha)}\right]n_j^{(\alpha)}\delta u_k^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma =$$
$$\int_{\Gamma_{12}}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)}) + (U_{ik}p)^{(\alpha)}\right]n_j^{(\alpha)}\right\}\delta u_k^{(12)}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{20}$$

将式(20)代入式(19),并考虑到 $\delta u_k^{(\alpha)}$ 在 Ω_α 内以及 $\delta u_k^{(12)}$ 在相邻区域的交界面 Γ_{12} 上都是独立的•　所以由 $\delta\Pi_1 = 0$ 的极值条件就可给出:

分区的平衡方程

$$\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\right]_{,j} + [(U_{ik}p)_{,j} + \rho_1 f_i]^{(\alpha)} = 0$$

或表示为:

$$[U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)]_{,j}^{(\alpha)}+\rho_1 f_i=0,\qquad \Omega\in\Omega_\alpha \tag{21}$$

分区的应力边界条件:

$$\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki}+u_{k,i}^{(\alpha)})+(U_{ik}p)^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-T_{0i}=0$$

或表示为

$$[U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}=T_{0i},\qquad \Gamma\in\Gamma_{\sigma\alpha} \tag{22}$$

交界面的应力连续条件:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}}(\delta_{ki}+u_{k,i}^{(\alpha)})+(U_{ik}p)^{(\alpha)}\right]n_j^{(\alpha)}=0$$

或表示为

$$\sum_{\alpha=1}^{2}[U_{ik}(S_{kj}+\delta_{kj}p)]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}=0,\qquad \Gamma\in\Gamma_{12} \tag{23}$$

在式(15)中应用Gauss公式

$$-\int_{\Omega_\alpha}K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_{j,i})^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega_\alpha}K_{ij}^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}(\rho_2 f_j)^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega+$$
$$\int_{\Gamma_{q\alpha}+\Gamma_{12}}K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_j)^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma,$$

将常数$-\int_{\Omega_\alpha}\frac{1}{2}(\rho_2 f_i)^{(\alpha)}K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_j)^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega$加到式(15)中并取变分

$$\delta\Pi_2=\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\int_{\Omega_\alpha}\left[K_{ij}^{(\alpha)}((U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j)_{,i}^{(\alpha)}+(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})\right]U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega+\right.$$
$$\left.\int_{\Gamma_{q\alpha}}\left[K_{ij}^{(\alpha)}((U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j)^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-Q_i\right]U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma\right\}+$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{12}}K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma, \tag{24}$$

类似的记交界面Γ_{12}上的孔隙压力为$p^{(12)}$，且在$\Gamma_{p\alpha}$上有$p^{(\alpha)}=p$，$\delta p^{(\alpha)}=0$，$\delta p^{(1)}=\delta p^{(2)}=\delta p^{(\alpha)}$，则

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{12}}K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma=$$
$$\int_{\Gamma_{12}}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}\right\}U_{ik}\delta p^{(12)}\mathrm{d}\Gamma, \tag{25}$$

将式(25)代入式(24)，且由于$\delta p^{(\alpha)}$在Ω_α内和$\delta p^{(12)}$在邻域的交界面Γ_{12}上都是独立的· 所以由$\delta\Pi_2=0$的极值条件并考虑到渗流方程就可给出:

分区的连续方程

$$\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)}+K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]_{,i}^{(\alpha)}=0$$

或表示为

$$q_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)}=0\qquad(\Omega\in\Omega_\alpha) \tag{26}$$

分区的孔隙流边界条件:

$$K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-Q_i=0\qquad(\Gamma\in\Gamma_{q\alpha}) \tag{27}$$

交界面的孔隙流连续条件:

$$\sum_{\alpha=1}^{2}K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}=0$$

或表示为

$$\sum_{\alpha=1}^{2} q_i^{(\alpha)} n_i^{(\alpha)} = 0 \qquad (\Gamma \in \Gamma_{12})\bullet \tag{28}$$

证毕•

上述分析说明，只要在交界面上保证位移、应力及孔隙流的连续性，大应变固结变分原理就可以分区计算• 从而当分析域被分成 N 个区域的大应变固结变分原理可表述为：

在一切允许的位移 $u_i^{(\alpha)}(i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, \cdots, N)$ 和孔隙水压力 $p^{(\alpha)}$ 中，即在 $\Gamma_{u\alpha}$ 上满足位移边界条件式(6)，在 $\Gamma_{p\alpha}$ 上满足孔隙水压力边界条件式(8)，在 Ω_α 中满足几何方程式(2)，而在诸邻域间的交界面 $\Gamma_{\alpha\beta}(\beta = \alpha + 1, \alpha + 2, \cdots, N)$ 上满足位移和孔隙水压力的连续条件式(10)与式(12)，并在满足给定初始条件下的位移 $u_i^{(\alpha)}$ 和孔隙水压力 $p^{(\alpha)}$ 中，使下列泛函

$$\Pi_1 = \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Omega_\alpha}\left\{A^{(\alpha)}(e) - u_i^{(\alpha)}[(U_{i,k}p)_{,j} + \rho_1 f_i]^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}} u_i^{(\alpha)} T_{0i}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{29}$$

$$\Pi_2 = \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Omega_\alpha}\Big[\frac{1}{2}(U_{ik}p_{,i})^{(\alpha)} K_{ij}^{(\alpha)} (U_{ik}p_{,j})^{(\alpha)} - (U_{ik}p)^{(\alpha)}(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)} + \dot{u}_{k,i}^{(\alpha)} u_{k,i}^{(\alpha)}) -$$

$$K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_{j,i})^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\Big]\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{q\alpha}} Q_i(U_{ij}p)^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{30}$$

取驻值的 $u_i^{(\alpha)}$ 和 $p^{(\alpha)}$，必满足平衡方程式(1)、本构方程式(3)、连续方程式(5)、应力与孔隙流边界条件式(7)与式(9)，交界面的应力与孔隙流边界条件式(11)与式(13)•

3　耦合分区广义变分原理

由前述的分区变分原理，其应变 e_{ij} 与位移 u_i 必须满足几何方程式(2)和位移边界条件式(6)，孔隙水压力 p 必须满足其边界条件式(8)，以及分区界面的孔隙水压力连续条件式(12)• 将这一系列的约束条件，根据 Lagrange 乘子法引入到泛函之中，并使之成为变分取驻值的自然条件，从而得到无条件的分区广义变分原理• 设 λ_{ij}、μ_i、γ_i、ξ 和 ζ 为待定的 Lagrange 乘子，因而可以构造出新的泛函

$$\Pi_1^* = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left\{A^{(\alpha)}(e) - u_i^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j} + \rho_1 f_i]^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left\{\left[e_{ij}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(\alpha)} + u_{j,i}^{(\alpha)} + u_{k,j}^{(\alpha)} u_{k,i}^{(\alpha)})\right]\lambda_{ij}^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{u\alpha}}(u_i^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)})\mu_i^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}} u_i^{(\alpha)} T_{0i}\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{12}}\gamma_i(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{31}$$

$$\Pi_2^* = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\Big[\frac{1}{2}(U_{ik}p_{,i})^{(\alpha)} K_{ij}^{(\alpha)}(U_{ik}p_{,j})^{(\alpha)} - (U_{ik}p)^{(\alpha)}(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)} + \dot{u}_{k,i}^{(\alpha)} u_{k,i}^{(\alpha)}) -$$

$$K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_{j,i})^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\Big]\mathrm{d}\Omega - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{q\alpha}} Q_i(U_{ik}p)^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma +$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{p\alpha}}\xi^{(\alpha)}(p^{(\alpha)} - p^{(\alpha)})\,\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{12}}\zeta(p^{(1)} - p^{(2)})\,\mathrm{d}\Gamma, \tag{32}$$

把式(31)中的 Lagrange 乘子 λ_{ij}、μ_i 和 γ_i 当作独立变量进行变分，有

$$\delta\Pi_1^* = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left\{\left(\frac{\partial A^{(\alpha)}}{\partial e_{ij}^{(\alpha)}} + \lambda_{ij}\right)\delta e_{ij}^{(\alpha)} - (\delta_{ki} + u_{k,i}^{(\alpha)})\lambda_{ij}^{(\alpha)}\delta u_{i,j}^{(\alpha)} -\right.$$

$$u_i^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_1 f_i]^{(\alpha)}+\left[e_{ij}^{(\alpha)}-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(\alpha)}+u_{j,i}^{(\alpha)}+u_{k,j}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})\right]\delta\lambda_{ij}^{(\alpha)}\Bigg\}\mathrm{d}\Omega-$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}}\delta u_i^{(\alpha)}T_{0i}\mathrm{d}\Gamma+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{u\alpha}}(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)})\delta\mu_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{u\alpha}}\mu_i^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_{12}}(u_i^{(1)}-u_i^{(2)})\delta\gamma_i\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{12}}\gamma_i\delta u_i^{(1)}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_{12}}\gamma_i\delta u_i^{(2)}\mathrm{d}\Gamma, \tag{33}$$

利用 Green 公式

$$\int_{\Omega_\alpha}(U_{ik}\lambda_{kj})^{(\alpha)}\delta u_{i,j}^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega=$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}+\Gamma_{u\alpha}+\Gamma_{12}}(U_{ik}\lambda_{kj})^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega_\alpha}(U_{ik}\lambda_{kj})_{,j}^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega, \tag{34}$$

将式(34)代入式(33),并应用本构方程式(3)得到

$$\delta\Pi_1^*=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\Bigg\{(S_{ij}+\lambda_{ij})\delta e_{ij}^{(\alpha)}-(U_{ik}\lambda_{kj})_{,j}^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}-$$

$$u_i^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_1 f_i]^{(\alpha)}+\left[e_{ij}^{(\alpha)}-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(\alpha)}+u_{j,i}^{(\alpha)}+u_{k,j}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})\right]\delta\lambda_{ij}^{(\alpha)}\Bigg\}\mathrm{d}\Omega-$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{12}}[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{kj}p)^{(\alpha)}+T_{0i}]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\delta u_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{u\alpha}}(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)})\delta\mu_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{u\alpha}}[\mu_i^{(\alpha)}-(U_{ik}\lambda_{kj})^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}]\delta u_i^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_{12}}\Big\{\gamma_i-[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{ij}p)^{(2)}]n_j^{(2)}\Big\}\delta u_i^{(2)}\mathrm{d}\Gamma-$$

$$\int_{\Gamma_{12}}\Big\{\gamma_i+[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{ij}p)^{(1)}]n_j^{(1)}\Big\}\delta u_i^{(1)}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{12}}(u_i^{(1)}-u_i^{(2)})\delta\gamma_i\mathrm{d}\Gamma, \tag{35}$$

根据变分基本定理 $\delta\Pi_1^*=0$, 得到

分区的平衡方程

$$[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{kj}p)]_{,j}^{(\alpha)}-\rho_1 f_i=0,\qquad \Omega\in\Omega_\alpha\cdot \tag{36}$$

分区的几何方程

$$e_{ij}^{(\alpha)}=(u_{i,j}^{(\alpha)}+u_{j,i}^{(\alpha)}+u_{k,j}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})/2,\qquad \Omega\in\Omega_\alpha\cdot \tag{37}$$

分区位移边界条件

$$u_i=u_i,\qquad \Gamma\in\Gamma_{u\alpha}\cdot \tag{38}$$

分区应力边界条件

$$[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{kj}p)]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}+T_{0i}=0,\qquad \Gamma\in\Gamma_{\sigma\alpha}\cdot \tag{39}$$

分区界面位移连续条件

$$u_i^{(1)}=u_i^{(2)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{12}\cdot \tag{40}$$

求得 Lagrange 乘子条件为

$$S_{ij}+\lambda_{ij}=0,\qquad \Omega\in\Omega_\alpha \tag{41}$$

$$\mu_i=(U_{ik}\lambda_{kj})^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{u\alpha}, \tag{42}$$

$$\gamma_i=-[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{kj}p)]^{(1)}n_j^{(1)}=[U_{ik}(\lambda_{kj}-\delta_{kj}p)]^{(2)}n_j^{(2)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{u\alpha}, \tag{43}$$

显然式(43)就是分区应力连续条件• 类似的将式(32)中 Lagrange 乘子 ξ和 ζ作为独立变量, 并与 p 独立变量同时参与变分, 可以得到

$$\begin{aligned}\delta\Pi_2^* = &\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega_\alpha}\left[K_{ij}^{(\alpha)}((U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j)_{,i}^{(\alpha)}+(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})\right]U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Omega+\\ &\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{q\alpha}}\left\{K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_i]_{,i}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}-Q_i\right\}U_{ik}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+\\ &\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{p\alpha}}(p^{(\alpha)}-\bar{p}^{(\alpha)})\delta\xi^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{12}}(p^{(1)}-p^{(2)})\delta\zeta\mathrm{d}\Gamma+\\ &\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_{p\alpha}}\left\{K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]_{,i}^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}+\xi^{(\alpha)}\right\}\delta p^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma+\\ &\int_{\Gamma_{12}}\left\{K_{ij}^{(1)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]_{,i}^{(1)}n_j^{(1)}+\zeta\right\}\delta p^{(1)}\mathrm{d}\Gamma+\\ &\int_{\Gamma_{12}}\left\{K_{ij}^{(2)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]_{,i}^{(2)}n_j^{(2)}-\zeta\right\}\delta p^{(2)}\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned}\tag{44}$$

由 $\delta\Pi_2^*=0$ 得到

分区的连续性方程:

$$q_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)}+\dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)}=0,\qquad \Omega\in\Omega_\alpha.\tag{45}$$

分区的孔隙流边界条件:

$$q_i^{(\alpha)}n_i^{(\alpha)}=Q_i,\qquad \Gamma\in\Gamma_{q\alpha}.\tag{46}$$

分区的孔隙水压力边界条件:

$$p^{(\alpha)}=\bar{p}^{(\alpha)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{p\alpha}.\tag{47}$$

分区界面的孔隙水压力连续条件:

$$p^{(1)}=p^{(2)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{12}.\tag{48}$$

求得 Lagrange 乘子条件为:

$$\xi^{(\alpha)}=-K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{p\alpha},\tag{49}$$

$$\zeta=-K_{ij}^{(1)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(1)}n_j^{(1)}=K_{ij}^{(2)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_2 f_j]^{(2)}n_j^{(2)},\qquad \Gamma\in\Gamma_{12},\tag{50}$$

由此可见, 式(50)就是分区界面上的孔隙流连续条件.

这样, 在两个新的泛函 Π_1^* 和 Π_2^* 中, 变量 u_i、e_{ij}、S_{ij} 和 p 除仍受本构方程与渗流方程的约束外, 不再受其他任何约束条件的限制, 并当泛函达到驻值时这些变量自然满足耦合固结问题的其余一切关系与边界条件, 即通常意义下的完全的广义变分原理. 将上述泛函推广到 N 个计算区域时, 其一般形式的完全的耦合固结广义变分原理可表述为:

在满足所给定的初始条件的位移 $u_i^{(\alpha)}(i=1,2,3;\ \alpha=1,2,\cdots,N)$ 和孔隙水压力 $p^{(\alpha)}$ 的一切允许的 $u_i^{(\alpha)}$、$e_{ij}^{(\alpha)}$、$S_{ij}^{(\alpha)}$ 和 $p^{(\alpha)}$ 中, 使下列泛函

$$\begin{aligned}\Pi_1^* = &\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Omega_\alpha}\left\{A^{(\alpha)}(e)-u_i^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j}+\rho_1 f_i]^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega-\\ &\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Omega_\alpha}\left\{\left[e_{ij}^{(\alpha)}-\frac{1}{2}(u_{i,j}^{(\alpha)}+u_{j,i}^{(\alpha)}+u_{k,j}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)})\right]S_{ij}^{(\alpha)}\right\}\mathrm{d}\Omega+\\ &\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{u\alpha}}(u_i^{(\alpha)}-\bar{u}_i^{(\alpha)})(U_{ik}S_{ki})^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}\mathrm{d}\Gamma-\\ &\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{\alpha\beta}}\frac{1}{2}[U_{ik}(S_{ki}-\delta_{ki}p)]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}(u_i^{(\alpha)}-u_i^{(\beta)})\mathrm{d}\Gamma-\sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{\sigma\alpha}}u_i^{(\alpha)}T_{0i}\mathrm{d}\Gamma,\end{aligned}\tag{51}$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2^* = {} & \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Omega_\alpha}\Big[\frac{1}{2}(U_{ik}p_{,i})^{(\alpha)}K_{ij}^{(\alpha)}(U_{ik}p_{,j})^{(\alpha)} - (U_{ik}p)^{(\alpha)}(\dot{u}_{i,i}^{(\alpha)} + \dot{u}_{k,i}^{(\alpha)}u_{k,i}^{(\alpha)}) - \\
& K_{ij}^{(\alpha)}(\rho_2 f_{j,i})^{(\alpha)}(U_{ik}p)^{(\alpha)}\Big]\,\mathrm{d}\Omega - \\
& \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{p\alpha}} K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j} + \rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}(p^{(\alpha)} - \bar{p}^{(\alpha)})\,\mathrm{d}\Gamma - \\
& \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{\alpha\beta}} \frac{1}{2}K_{ij}^{(\alpha)}[(U_{ik}p)_{,j} + \rho_2 f_j]^{(\alpha)}n_j^{(\alpha)}(p^{(\alpha)} - p^{(\beta)})\,\mathrm{d}\Gamma - \\
& \quad \sum_{\alpha=1}^{N}\int_{\Gamma_{q\alpha}} \bar{Q}_i(U_{ik}p)^{(\alpha)}\,\mathrm{d}\Gamma,
\end{aligned} \tag{52}
$$

取驻值的$u_i^{(\alpha)}$、$e_{ij}^{(\alpha)}$、$S_{ij}^{(\alpha)}$和$p^{(\alpha)}$，必满足耦合固结问题的所有方程与所有边界条件• 其中在β最一般的情况下有$\beta = 1, 2, \cdots, \alpha - 1, \alpha + 1, \cdots, N$•

[参 考 文 献]

[1] 殷有泉. 固体力学非线性有限元引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 清华大学出版社, 1987, 195—210.

[2] 罗晓辉. 解 Biot 固结方程的有限变形有限元方法[A]. 见: 曹洪、陈晓文、廖建三 主编. 第五届全国青年岩石力学与工程学术会议论文集[C]. 广州: 华南理工大学出版社, 1999, 163—170.

[3] 钱伟长. 广义变分原理[M]. 北京: 知识出版社, 1985, 89—107.

[4] 钱伟长, 卢文达, 王蜀. 动力学分区变分原理及其广义变分原理[J]. 力学学报, 1989, **21**(3): 300—305.

Region_Wise Variational Principles and Generalized Variational Principles on Large Strain for Consolidation Theory

LUO Xiao_hui[1], LI Yong_le[2], LUO Xin[1]

(1. School of Civil Engineering, Huazhong University of Science &Technology, Wuhan 430074, P.R.China;

2. Department of Geotechnique, Huabei Hydraulic and Hydroelectric Engineering Institute, Zhengzhou 450008, P.R.China)

Abstract: The difference of constitutive character and large deformation as to soil mass are basic questions to analyze deformational feature. According to the description method of limited deformation, the large deformation consolidation equations of soil mass were created and its variational principles were rigorous testimony. The region_wise variational principles of consolidation theory were deduced using sub_structure continuous condition of region_wise. Quoting the method of Lagrangian multiplier operator, generalized variational principles of region_wise of large deformation consolidation in the constrained condition were created and approved.

Key words: large strain consolidation; variational principle; region_wise variation; generalized variational principle