应用数学和力学,第 26 卷 第 7 期(2005 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0861_06

二阶耗散动力系统的降维对解长期行为的误差估计*

张家忠[1], 刘 雁[2], 陈党民[1]

(1. 西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049;
2. 西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

(鲁传敬推荐)

摘要: 基于非线性动力学理论, 对一类高维二阶耗散自治动力系统的降维及其对解的长期行为的影响进行了理论分析• 该分析将方程的解投影到控制方程的线性算子的特征向量所张成的完备空间中, 并在相空间中引入一距离的概念, 方便地解决了缩减后系统与原始系统解之间的误差或距离的描述• 基于此距离定义, 首先, 分析了由于高阶模态的截取对解的长期行为的影响, 并推导出了相应的误差估计, 该估计表明由于降维对系统长期行为的影响不仅与系统的高阶子空间中的固有频率和阻尼比乘积的最小值有关, 并且与高阶子空间中的某一最大固有频率有关• 然后, 将一般的模态截取视为对原系统的解的一个扰动, 对一些文献中由于降维程度的不同而造成解的拓扑性质发生变化的现象进行了定性的解释•

关 键 词: 非线性动力系统; 耗散系统; 投影算子; 长期行为
中图分类号: O322; TB123 文献标识码: A

引 言

对于一些非线性动力系统, 尤其是在机械振动及流_固耦合系统中, 由于结构的复杂性而难以用解析式表示其结果, 因此一般采用有限元等离散方法逼近方程的解, 而采用有限元等离散方法后, 系统将成为一高维的动力系统, 一般为关于时间的二阶耗散发展方程• 对于这类方程的求解已有许多经典的方法, 如 Newmark 法、Wilson_ θ 法、Houbelt 法, 以及将此二阶方程化为一阶方程, 可以使用的精度较高的 Runge_Kutta 法等• 但所有这些方法在分析非线性动力系统的长期行为时, 都是一种非常耗机时的方法, 并随着自由度的增加而变得更加突出• 因此, 很有必要在进行数值分析之前, 将离散后的高维系统进行降维或缩减, 并使得缩减后系统解的性质和解的长期行为不发生拓扑性变化• 虽然对于连续系统, 已建立了一些降维方法, 但难以应用于具有多自由度的离散系统中[1]• 基于这种背景, 一些学者相继发展了许多很有实用价值的算法, 并给出了相应的数值分析结果[2~ 5]• 尽管有许多这方面的数值实验分析结果, 但所有这些文献都没有对此类二阶非线性耗散动力系统所采用的降维方法进行严格的理论分析或

* 收稿日期: 2003_09_25; 修订日期: 2004_12_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272089)
作者简介: 张家忠(1968—), 男, 山西, 副教授, 博士(联系人. Tel/Fax: + 86_29_82668723; E_mail: jzzhang@mail.xjtu.edu.cn)•

对解精度的误差估计• 而事实上, 由于某些耗散自治动力系统的强非线性(如随着参数变化发生 Hopf 分岔, 继而发生的系列分岔等), 对同一问题采用不同的降维方法有时会出现“面目皆非”的结果, 并且降维成功与否主要取决于经验• 这种对初值或数值分析方法的敏感性表现为微小的初值变化, 或数值扰动将最终导致运动轨迹发生完全变化, 即系统解的定性性态(拓扑结构)发生变化• 因此, 很有必要对此类问题进行严格的数学分析, 以便更加充分合理地使用上面所列的降维方法, 而得到一个满意的近似解•

本文的主要内容就是对这类问题给出一个数学上的证明和解释, 以完善该问题• 根据这类方程解的性质, 将解投影到由控制方程的线性算子的特征向量所张成的完备空间中, 并将该空间分解成分别由低阶模态分量和高阶模态分量所构成的子空间, 其中低阶与高阶模态的定义是由无阻尼固有频率与相应的阻尼比乘积决定, 然后分析了由于高阶模态的截取对解的长时间行为的影响, 进一步给出了误差估计及其证明•

1　基本方程

不失一般性, 本文主要讨论如下形式的二阶高维耗散自治非线性发展方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}), \\ \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \dot{\boldsymbol{x}}_0, \ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为 $n \times n$ 的质量、阻尼及刚度矩阵, 而 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ 为系统的非线性载荷向量•

为分析方便, 给出下面的一些假设和约定:

设 H 为一有限维的内积空间, 具有内积 $(\cdot, \cdot)$ 和范数 $|\cdot|$, 并且矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 都是对称的、正定的, 而阻尼矩阵 $\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{M} + \beta\boldsymbol{K}$, 即比例阻尼, 载荷向量 $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})| \leqslant M$, M 为一有限正数• 对于方程(1), 其相应的线性算子为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$, 则存在一组构成标准正交基的、完备的特征向量 $\{\phi_j\}_{j \in n}$ 和特征值 $\{\omega_j\}_{j \in n}$, 即系统的无阻尼固有频率, 所有的特征向量将组成 n 阶主模态 Φ_n, 并且满足下面的性质:

$$\Phi_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \Phi_n = \boldsymbol{I}, \tag{2}$$

$$\Phi_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \Phi_n = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{K}}, \tag{3}$$

$$\Phi_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C} \Phi_n = \begin{bmatrix} 2\omega_1\xi_1 & & & \\ & 2\omega_2\xi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\omega_n\xi_n \end{bmatrix} = \overline{\boldsymbol{C}}, \tag{4}$$

其中 ξ_j 为相应的阻尼比, 并且设 $\xi_j > 0$, $\overline{\boldsymbol{K}}$、$\overline{\boldsymbol{C}}$ 分别为模态主刚度阵、模态主质量阵•

在此约定:

$$0 < 2\omega_1\xi_1 \leqslant 2\omega_2\xi_2 \leqslant \cdots \leqslant 2\omega_n\xi_n < +\infty,$$

并且

$$\min\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} \geqslant 1, \tag{5}$$

P_m 为 $\mathrm{Span}\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$ 上的正交投影算子, $Q_m = I - P_m$, 即 $H = P_m H \oplus Q_m H$• 需要指出

的是, 本文的模态是按式(5) 排序的, 与一般的排序方式不同, 主要是为了分析方便。 其中 P_mH 称为低阶子空间, 而 Q_mH 称为高阶子空间。

取 $\boldsymbol{x} = \Phi_n\boldsymbol{a}$, 其中 $\boldsymbol{a}$ 为模态坐标, 代入方程(1), 然后左乘 Φ_n^{T} 得到在模态坐标下的控制方程, 即:

$$\ddot{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{C}}\dot{\boldsymbol{a}} + \overline{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{a} = \Phi_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}, \tag{6}$$

将 P_m、Q_m 分别作用于方程(1) 上, 将得到如下的方程:

$$\ddot{\boldsymbol{p}} + \overline{\boldsymbol{C}}_1\dot{\boldsymbol{p}} + \overline{\boldsymbol{K}}_1\boldsymbol{p} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{7}$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{C}}_2\dot{\boldsymbol{q}} + \overline{\boldsymbol{K}}_2\boldsymbol{q} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{p}} + \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{p} = P_m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{q} = Q_m\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{h} = \Phi_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f},\ \boldsymbol{g} = \Phi_{n-m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}$。

在分析非线性动力系统时, 由于位形空间的局限性, 而引入了相空间的概念。 本文将在相空间中分析系统的特性, 因此将引入一距离的概念, 用来度量相空间中任意两点间的距离。

定义 1 设在模态坐标下的相空间中任意一点为 $\boldsymbol{y}(t) = \left\{\boldsymbol{a}(t), \dot{\boldsymbol{a}}(t)\right\}$, 则两点间距离可为

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(\boldsymbol{y}_1(t), \boldsymbol{y}_2(t)) = [(|\boldsymbol{a}_1(t)|^2 + |\dot{\boldsymbol{a}}_1(t)|^2) - (|\boldsymbol{a}_2(t)|^2 + |\dot{\boldsymbol{a}}_2(t)|^2)]^{1/2}, \tag{9}$$

可以容易地证明以上定义满足《泛函分析》中距离的定义。

2 系统的降维对解长期行为的影响

对于多自由度的非线性耗散动力系统, 一般的降维方法是将解投影到 P_mH 空间中, 即原始方程的解由 $\boldsymbol{p}$ 来逼近, 从而导致存在一个误差 $\boldsymbol{q}$, 并且在某种程度上被视为小量而不引起大的误差。 而实事上, 对于一些复杂的强非线性系统, 如具有非双曲结构的动力系统, 结果并非如此。 本文的中心目标就是对误差 $\boldsymbol{q}$ 进行估计分析。

下面以定理的形式给出一结果, 然后再对其进行详细地证明, 该定理描述了降维后系统对原始系统的逼近程度。

定理 1 假设 $|\boldsymbol{a}| \leqslant \rho$(由于系统的耗散性, 这一假设是可行的), $|\boldsymbol{g}| \leqslant M_0$, 则当 $t \to +\infty$ 时, 有

$$\mathrm{dist}_{|\cdot|}(\boldsymbol{a}(t), P_mH) \leqslant \left(\frac{M_1^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}\right)^{1/2}, \tag{10}$$

其中
$$M_1^2 = \frac{M_0^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}} + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}\omega_l^2\rho^2,$$

$$\omega_l = \max\left\{\omega_{m+1}, \omega_{m+2}, \cdots, \omega_n\right\}。$$

证明 方程(8) 与 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 作内积得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{C}}_2\dot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}}_2\boldsymbol{q} = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}, \tag{11}$$

进一步有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + 2\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{C}}_2\dot{\boldsymbol{q}} + 2\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}}_2\boldsymbol{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + |\overline{\boldsymbol{q}}|^2) + 2|\overline{\overline{\boldsymbol{q}}}|^2 \leqslant |\overline{\overline{\boldsymbol{q}}}|^2 + |\overline{\boldsymbol{g}}|^2, \tag{12}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{q}} = \left\{\omega_{m+1}q_1, \omega_{m+2}q_2, \cdots, \omega_nq_{n-m}\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{q}}} = \left\{\sqrt{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}\dot{q}_1,\ \sqrt{2\omega_{m+2}\xi_{m+2}}\dot{q}_2,\ \cdots,\ \sqrt{2\omega_n\xi_n}\dot{q}_{n-m}\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\bar{\boldsymbol{g}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}}g_1,\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_{m+2}\xi_{m+2}}}g_2,\ \cdots,\ \frac{1}{\sqrt{2\omega_n\xi_n}}g_{n-m}\right\}^{\mathrm{T}}.$$

根据约定(5),由公式(12)可得到下列关系式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}|^2) + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 \leqslant \frac{1}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}|\boldsymbol{g}|^2, \tag{13}$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}|^2) + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}(|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}|^2) \leqslant \frac{1}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}|\boldsymbol{g}|^2 + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}|\bar{\boldsymbol{q}}|^2. \tag{14}$$

因为所研究的动力系统为一非线性的耗散系统,在模态坐标下存在吸引集 $B = \left\{\boldsymbol{a} \in D(A) \mid |\boldsymbol{a}| \leqslant \rho\right\}$[6],即存在 T,当 $t \geqslant T$ 时,$\boldsymbol{a}(t) \in B$.

所以有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}| + |\bar{\boldsymbol{q}}|^2) + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}(|\dot{\boldsymbol{q}}|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}|^2) \leqslant \frac{M_0^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}} + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}\omega_l^2\rho^2, \tag{15}$$

在此

$$\omega_l = \max\left\{\omega_{m+1},\ \omega_{m+2},\ \cdots,\ \omega_n\right\}.$$

根据 Gronwall 不等式得到:

$$\begin{aligned}|\dot{\boldsymbol{q}}(t)|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}(t)|^2 &\leqslant \mathrm{e}^{-2\omega_{m+1}\xi_{m+1}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}(0)|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}(0)|^2) + \\ &\int_0^t\left(\frac{M_0^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}} + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}\omega_l^2\rho^2\right)\mathrm{e}^{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}(\tau-t)}\mathrm{d}\tau = \\ &\mathrm{e}^{-2\omega_{m+1}\xi_{m+1}t}(|\dot{\boldsymbol{q}}(0)|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}(0)|^2) + \\ &\frac{M_1^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}(1 - \mathrm{e}^{-2\omega_{m+1}\xi_{m+1}t}),\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $M_1^2 = \dfrac{M_0^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}} + 2\omega_{m+1}\xi_{m+1}\omega_l^2\rho^2$,

进一步根据约定(5),当 $t \to +\infty$ 时,有:

$$|\dot{\boldsymbol{q}}(t)|^2 + |\boldsymbol{q}(t)|^2 \leqslant |\dot{\boldsymbol{q}}(t)|^2 + |\bar{\boldsymbol{q}}(t)|^2 \leqslant \frac{M_1^2}{2\omega_{m+1}\xi_{m+1}}, \tag{17}$$

其中 $(|\dot{\boldsymbol{q}}(t)|^2 + |\boldsymbol{q}(t)|^2)^{1/2}$,即 $\boldsymbol{a}(t)$ 与 P_mH 之间在相空间中的距离,其正是由于自由度缩减对原始系统长期行为造成的误差.

即定理 1 证毕.

定理 1 定量地给出了由于降维导致的缩减系统与原始系统解之间的距离或误差,可以看出该误差不仅与高阶子空间 Q_mH 中 $m+1$ 阶的固有频率及阻尼比之积有关,还与高阶子空间中某一最大固有频率的值有关.

3 讨论及分析

以上给出了由于模态截取造成的解的误差估计,基于上面的定理可以进一步解释一些有关这方面的数值模拟中出现的问题. 事实上,从数学角度,模态的截取可以视为对原始问题的

精确解的一个扰动• 一方面,如果此类扰动满足数学上的无穷小,并且原始方程的解(如平衡点、Hopf 分岔生成的周期解等)稳定,则此模态截取不会对解的拓扑性质造成影响,这也就是在有些情况下,模态截取不影响解的性质的原因,文献[2]给出了基于模态分析与综合方法,截取不同数目的模态,而解的拓扑性质不变的数值实验结果• 另一方面,如果原始方程的解稳定,但此由模态截取造成的扰动过大,即过分地缩减系统,则将导致降维后的系统方程的解与原始方程的解相比发生拓扑性变化,文献[3]中的一些数值算例就可能属于此类问题的反映•

综上所述,根据定理 1 的结果可以看出:多自由度非线性耗散自治动力系统的降维造成的误差与原始系统的高阶子空间中的固有频率和阻尼比乘积的最小值以及高阶子空间中的某一最大固有频率有关• 另外,在进行非线性特性分析时,由于所研究问题的强非线性以及众所周知的非线性动力系统对初边值等引起的扰动极端敏感,因此在研究分析高维非线性动力系统时,特别是在分析具有多种分岔现象的动力系统时,在进行降维之前,应对系统的线性算子所对应的特征向量、特征值以及阻尼比进行详细地分析•

4 结 论

对于二阶高维耗散自治非线性动力系统,由于降维对解的长期行为造成的影响进行了理论分析• 在分析过程中,通过在相空间中引入一距离的概念,方便地解决了缩减后系统与原始系统解之间的误差或距离的描述• 研究结果表明:该误差估计不仅与高阶子空间中的固有频率及阻尼比之积的最小值有关,还与高阶子空间中固有频率的某一最大值有关• 最后,将模态的截取视为对原始问题精确解的一个数学扰动,基于非线性动力学,定性地对此扰动对解的拓扑性质的影响进行了分析和解释•

[参 考 文 献]

[1] Seydel R. Practical Bifurcation and Stability Analysis: From Equilibrium to Chaos[M]. New York: Springer_Verlag, 1994, 322—326.

[2] 张家忠,许庆余,郑铁生. 具有局部非线性动力系统周期解及稳定性方法[J]. 力学学报, 1998, **30**(5): 572—579.

[3] Friswell M I, Penny J E T, Garvey S D. The application of the IRS and balanced realization methods to obtain reduced models of structures with local nonlinearities[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **196**(4): 453—468.

[4] Slaats P M A, de Jongh J, Sauren A A H J. Model reduction tools for nonlinear structural dynamics[J]. Computers & Structures, 1995, **54**(6): 1155—1171.

[5] Fey R H B, van Campen D H, de Kraker A. Long term structural dynamics of mechanical system with local nonlinearities[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1996, **118**(2): 147—163.

[6] Temam R. Infinite_Dimensional Dynamical System in Mechanics and Physics[M]. New York: Springer_Verlag, 1997, 20—23.

Error Estimate for the Influence of Model Reduction of Nonlinear Dissipative Autonomous Dynamical System on the Long_Term Behaviours

ZHANG Jia_zhong[1], LIU Yan[2], CHEN Dang_min[1]

(1. School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China;

2. Department of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

Abstract: From viewpoint of nonlinear dynamics, the model reduction and its influence on the long_term behaviours of a class of nonlinear dissipative autonomous dynamical system with higher dimension are investigated theoretically under some assumptions. The system was analyzed in the state space with an introduction of a distance definition which can be used to describe the distance between the full system and the reduced system, and the solution of the full system was then projected onto the complete space spanned by the eigenvectors of the linear operator of the governing equations. As a result, the influence of mode series truncation on the long_term behaviours and the error estimate are derived, showing that the error is dependent on the first products of frequencies and damping ratios in the subspace spanned by the eigenvectors with higher modal damping. Furthermore, the fundamental understanding for the topological change of the solution due to the application of different model reduction is interpreted in a mathematically precise way, using the qualitative theory of nonlinear dynamics.

Key words: nonlinear dynamical system; dissipative system; projection operator; long_term behaviour