

文章编号: 1000-0887(2004) 04-0379-06

# 关于薄板的无网格局部边界积分 方程方法中的友解\*

龙述尧, 熊渊博

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(刘人怀推荐)

摘要: 无网格局部边界积分方程方法是最近发展起来的一种新的数值方法, 这种方法综合了伽辽金有限元、边界元和无单元伽辽金法的优点, 是一种具有广阔应用前景的、真正的无网格方法。把无网格局部边界积分方程方法应用于求解薄板问题, 给出了薄板无网格局部边界积分方程方法所需要的友解及其全部公式。

关键词: 薄板; 友解; 无网格局部边界积分方程方法

中图分类号: O241 文献标识码: A

## 引 言

由 Atluri 等人提出的无网格局部边界积分方程方法首先应用于求解由泊松方程控制的位势问题<sup>[1]</sup>。我们首先将这种方法应用于求解弹性力学平面问题<sup>[2]</sup>。

无网格局部边界积分方程方法不需要在域内或边界上划分任何单元或网格, 它只需要节点信息, 是一种真正的无网格方法, 它具有有限元法、整体边界元法和无单元伽辽金法的优点, 所求问题的解精度高、收敛快且稳定性好。

在用无网络局部边界积分方程方法求解由微分算子所控制的边值问题时, 除了需要所求问题微分算子在无限空间中的基本解外, 还需要所求问题微分算子在球域上(对三维问题)或圆域上(对二维问题)的“友解”(companion solution)。Atluri 等人给出了二维位势问题的友解<sup>[1]</sup>, 我们给出了二维弹性力学问题的友解<sup>[2]</sup>。为了把无网格局部边界积分方程方法应用于求解薄板问题中, 在这篇文章中, 我们推导出了薄板问题的友解及其无网格局部边界积分方程方法中的全部公式。

## 1 薄板的局部边界积分方程

弹性薄板的整体边界积分方程为<sup>[3]</sup>

\* 收稿日期: 2001\_08\_13; 修订日期: 2003\_12\_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19972019)

作者简介: 龙述尧(1945—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86\_731\_8822114; E\_mail: sylong@hnu.edu.cn);

熊渊博(1959—), 男, 湖南湘潭人, 副教授。

$$C(\xi) w_k(\xi) = \int_{\Gamma} [w_k^*(\xi, x) V_n(x) - \theta_{nk}^*(\xi, x) M_n(x) - V_{nk}^*(\xi, x) w(x) + M_{nk}^*(\xi, x) \theta_n(x)] d\Gamma + \sum_T \left\{ w_k^*(\xi, x) [M_t(x)]_-^+ - w(x) [M_{tk}^*(\xi, x)]_-^+ \right\} + \int_{\Omega} w_k^*(\xi, x) q(x) d\Omega \quad (k = 1, 2), \tag{1}$$

式中  $\xi$  为源点,  $x$  为场点,

$$w_2(\xi) = \frac{\partial w_1(\xi)}{\partial n(\xi)}, \quad w_2^*(\xi, x) = \frac{\partial w_1^*(\xi, x)}{\partial n(\xi)},$$

$C(\xi)$  是与边界几何形状有关的系数, 为

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in \Omega, \\ 1/2, & \xi \in \Gamma \text{ 且 } \xi \text{ 为光滑边界点,} \\ \gamma/2\pi, & \xi \in \Gamma \text{ 且 } \xi \text{ 为角点,} \\ 0, & \xi \in (\Omega + \Gamma), \end{cases} \tag{2}$$

式中,  $\gamma$  为角点  $\xi$  处所张内角, 如图 1 所示. 方程(1)中其他符号含义如下:

$$\begin{cases} \theta_n(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial n(x)}, \\ M_n(x) = -\frac{D}{2}(1-\mu) \left[ \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot^2 w + \cos 2\beta L_1(w) + 2\sin 2\beta L_2(w) \right], \\ M_t(x) = D(1-\mu) \left[ \frac{1}{2} \sin 2\beta L_1(w) - \cos 2\beta L_2(w) \right], \\ V_n(x) = Q_n(x) + \frac{\partial M_t}{\partial s} = -D \frac{\partial}{\partial n(x)} (\cdot^2 w) + L_3(M_t), \end{cases} \tag{3}$$

式中

$$\begin{aligned} \cdot^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \\ L_1 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \\ L_3 &= - \left[ \sin \beta \frac{\partial}{\partial r} - \cos \beta \frac{\partial}{r \partial \theta} + \left( \frac{\cos \beta}{r} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \beta} \right]. \end{aligned}$$

上列各式中  $\rho$  为边界  $\Gamma$  的曲率半径, 以  $\rho$  在曲线凸方为正.  $s$  为边界弧线,  $n$  及  $t$  分别代表边界曲线的外法向和切向.  $r, \theta$  是极坐标系的坐标.  $r = |x - \xi|$  是源点与场点之间的距离,  $\beta$  为边界外法向与  $r$  之间的夹角, 如图 1 所示.  $[M_t(\cdot)]_-^+$  表示边界角点处扭矩的的跳跃值,  $T$  为边界角点数.  $D$  为薄板的弯曲刚度,  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ ,  $h$  为板厚,  $E$  为弹性模量,  $\mu$  为泊松比.

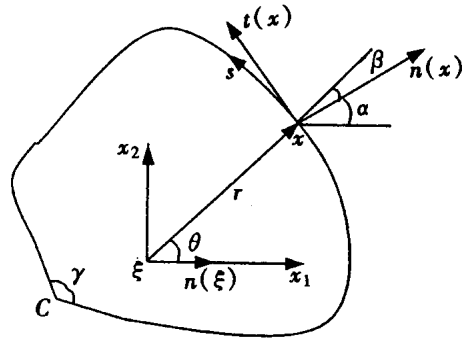


图 1

在方程(1)中,  $w_1^*$  为薄板挠度的基本解, 为

$$w_1^*(\xi, x) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r. \tag{4}$$

它是方程

$$D \cdot^4 w_1^* = \delta(\xi, x) \tag{5}$$

的解, 式中  $\delta(\xi, x)$  是二维狄拉克  $\delta$  函数.

由于薄板弯曲问题的控制方程是 4 阶微分算子, 用 (1) 式的一个边界积分方程 ( $k = 1$ ) 还不能定解, 还需要与式 (1) 线性无关的另一个边界积分方程 ( $k = 2$ ), 式 (1) 中  $k = 2$  的边界积分方程是转角边界积分方程, 它的基本解  $w_2^*(\xi, x)$  为

$$w_2^*(\xi, x) = \frac{\partial w_1^*(\xi, x)}{\partial n(\xi)} = -\frac{1}{8\pi D}(2\ln r + 1)\cos\theta. \quad (6)$$

方程 (1) 不但对所求问题的域  $\Omega$  内和边界  $\Gamma$  上都成立, 而且对于所求问题的域内的任一子域  $\Omega_s$  及其边界  $\partial\Omega_s$  也是成立的, 对于任一子域  $\Omega_s$  及其边界  $\partial\Omega_s$ , 方程 (1) 变为

$$C(\xi)w_k(\xi) = \int_{\partial\Omega_s} [w_k^*(\xi, x)V_n(x) - \theta_{nk}^*(\xi, x)M_n(x) - V_{nk}^*(\xi, x)w(x) + M_{nk}^*(\xi, x)\theta_n(x)] d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_k^*(\xi, x)q(x) d\Omega \quad (k = 1, 2). \quad (7)$$

在这里, 由于子域  $\Omega_s$  通常选取为简单的规则形状, 在子域边界  $\partial\Omega_s$  上一般无角点, 所以删去了表示角点扭矩跳跃的项. 对于二维薄板问题, 子域  $\Omega_s$  是半径为  $r_0$  的圆. 方程 (7) 就是薄板的局部边界积分方程.

## 2 薄板问题的“友解”

由方程 (7) 可知, 在子域边界  $\partial\Omega_s$  上有未知边界函数  $w(x)$ 、 $\theta_n(x)$ 、 $M_n(x)$  和  $V_n(x)$ . 由于  $M_n(x)$  和  $V_n(x)$  通常是函数  $w(x)$ 、 $\theta(x)$  及其导数的组合, 难于求出, 为此我们在这里引进“友解” (companion solution), 以消去子域边界  $\partial\Omega_s$  上的未知函数  $M_n(x)$  和  $V_n(x)$ . 友解与基本解相关且是下列边值问题的解

$$D \cdot \cdot \cdot \cdot w_k^* = 0, \quad \text{在 } \Omega_s \text{ 内 } (k = 1, 2), \quad (8)$$

$$\begin{cases} w_k^* = w_k^*, \\ \frac{\partial w_k^*}{\partial n(x)} = \frac{\partial w_k^*}{\partial n(x)} \end{cases} \quad \text{在 } \partial\Omega_s \text{ 上 } (k = 1, 2). \quad (9)$$

令  $w_k^{**}(\xi, x) = w_k^*(\xi, x) - w_k^*(\xi, x),$

则  $\frac{\partial w_k^{**}(\xi, x)}{\partial n(x)} = \frac{\partial w_k^*(\xi, x)}{\partial n(x)} - \frac{\partial w_k^*(\xi, x)}{\partial n(x)},$

于是有

$$\begin{cases} D \cdot \cdot \cdot \cdot w_1^{**} = D \cdot \cdot \cdot \cdot (w_1^* - w_1^*) = D \cdot \cdot \cdot \cdot w_1^* = \delta(\xi, x), \\ D \cdot \cdot \cdot \cdot w_2^{**} = D \cdot \cdot \cdot \cdot (w_2^* - w_2^*) = D \cdot \cdot \cdot \cdot w_2^* = \frac{\partial \delta(\xi, x)}{\partial n(\xi)}, \end{cases} \quad \text{在 } \Omega_s \text{ 内}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} w_k^{**} = 0, \\ \frac{\partial w_k^{**}}{\partial n(x)} = 0, \end{cases} \quad \text{在 } \partial\Omega_s \text{ 上 } (k = 1, 2). \quad (11)$$

由微分方程 (10) 和相应边界条件 (11) 的解  $w_k^{**}$  代入方程 (7) 中, 则方程 (7) 变为

$$C(\xi)w_k(\xi) = \int_{\Omega_s} w_k^{**}(\xi, x)q(x) d\Omega - \int_{\partial\Omega_s} [V_{nk}^{**}(\xi, x)w(x) - M_{nk}^{**}(\xi, x)\theta_n(x)] d\Gamma \quad (k = 1, 2). \quad (12)$$

当源点  $\xi$  的子域  $\Omega_s$  完全位于整体域  $\Omega$  内时, 则利用方程 (12) 建立局部边界积分方程, 未知函数为子域边界上的  $w(x)$  和  $\theta_n(x)$ ; 当源点  $\xi$  位于整体边界  $\Gamma$  上, 因而它的子域  $\Omega_s$  与整体域边

界  $\Gamma$  相交时, 则子域边界由  $L_s$  和  $\Gamma_s$  组合而成, 其中  $L_s$  为子域  $\Omega_s$  完全位于  $\Omega$  内的边界部分,  $\Gamma_s$  为子域  $\Omega_s$  与整体域边界  $\Gamma$  重合部分. 由于  $\Gamma_s$  是整体域边界  $\Gamma$  的一部分, 在这部分边界上  $M_n(x)$  和  $V_n(x)$  不为零, 故须采用方程 (7), 只须用  $w_k^{**}(\xi, x)$ 、 $\theta_{nk}^{**}(\xi, x)$ 、 $V_{nk}^{**}(\xi, x)$ 、 $M_{nk}^{**}(\xi, x)$  分别取代方程 (7) 中的  $w_k^*(\xi, x)$ 、 $\theta_{nk}^*(\xi, x)$ 、 $V_{nk}^*(\xi, x)$ 、 $M_{nk}^*(\xi, x)$  建立局部边界积分方程. 在整体域边界  $\Gamma_s$  上, 4 个未知函数  $w(x)$ 、 $\theta_n(x)$ 、 $M_n(x)$  和  $V_n(x)$  中, 其中 2 个未知函数通常由边界条件给定, 因此在整体域边界上仍只有两个未知函数.

为了计算积分方程 (12) 或 (7) 时更加方便和简单, 通常我们选择形状规则的子域  $\Omega_s$  和  $\partial\Omega_s$ , 对于二维板问题子域  $\Omega_s$  选择半径为  $r_0$  的圆, 这样也便于求出微分方程 (8) 及相应边界条件 (9) 的友解  $w_k^*$ . 在极坐标系下方程 (8) 及相应边界条件 (9) 变为

$$D \cdot \Delta^2 w_k^* = D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dw_k^*}{dr} \right] \right) \right] = 0, \quad \text{在半径为 } r_0 \text{ 的圆内 } (k = 1, 2), \quad (13)$$

$$\begin{cases} w_k^* = w_k^*, \\ \frac{\partial w_k^*}{\partial r} = \frac{\partial w_k^*}{\partial r}, \end{cases} \quad \text{在半径为 } r_0 \text{ 的圆上 } (k = 1, 2). \quad (14)$$

对微分方程 (13) 积分, 得一般解为

$$w_k^* = c_1 r^2 + c_2 + c_3 \ln r + c_4 r^2 \ln r. \quad (15)$$

由于在  $r = 0$  处, 薄板的挠度和内力应为有限值, 故  $c_3 = c_4 = 0$ , 一般解变为

$$w_k^* = c_1 r^2 + c_2. \quad (16)$$

由边界条件 (14) 可以确定系数  $c_1$  和  $c_2$ , 于是可求得“友解”为

$$w_1^* = \frac{r^2 \ln r_0}{8\pi D} + \frac{r_0^2}{16\pi D} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right], \quad (17)$$

$$w_2^* = -\frac{r_0}{8\pi D} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} \ln r_0 + \frac{3r^2}{2r_0^2} + \ln r_0 - \frac{1}{2} \right] \cos \theta, \quad (18)$$

于是有

$$w_1^{**} = w_1^* - w_1^* = \frac{r_0^2}{8\pi D} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{2} \left[ \frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right] \right], \quad (19)$$

$$w_2^{**} = w_2^* - w_2^* = -\frac{r \cos \theta}{8\pi D} \left[ 2 \ln r + 1 - \frac{r}{r_0} \left[ \ln r_0 + \frac{3}{2} \right] - \frac{r_0}{r} \left[ \ln r_0 - \frac{1}{2} \right] \right], \quad (20)$$

式中,  $\cos \theta = \cos(n(\xi), r)$ , 见图 1.

把式 (19) 和 (20) 代入式 (3) 中, 便得到了局部积分方程 (12) 或 (7) 中的所需要的全部已知函数

$$\begin{cases} \theta_{n1}^{**}(\xi, x) = \frac{\partial w_1^{**}}{\partial n(x)} = \frac{r}{4\pi D} \ln \frac{r}{r_0} \cos \beta, \\ M_{n1}^{**}(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi} \left[ (1 + \mu) \left( 2 \ln \frac{r}{r_0} + 1 \right) + (1 - \mu) \cos 2\beta \right], \\ M_{t1}^{**}(\xi, x) = \frac{1 - \mu}{8\pi} \sin 2\beta, \\ V_{n1}^{**}(\xi, x) = -\frac{\cos \beta}{4\pi r} \left[ 2 + (1 - \mu) \cos 2\beta \right] + \frac{1 - \mu}{4\pi \rho} \cos 2\beta, \end{cases} \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 \theta_{n2}^{**}(\xi, x) &= -\frac{1}{8\pi D} \left[ \left( 2\ln r + 1 - \frac{r}{r_0} \ln r_0 - \frac{3r}{2r_0} \right) \cos \alpha + \right. \\
 &\quad \left. \left( 2 - \frac{r}{r_0} \ln r_0 - \frac{3r}{2r_0} \right) \cos \beta \cos \theta - \left( \frac{r_0}{r} \ln r_0 - \frac{r_0}{2r} \right) \sin \beta \sin \theta \right], \\
 M_{n2}^{**}(\xi, x) &= -\frac{1}{16\pi r_0} \left[ (1-\mu) \sin 2\beta \sin \theta \left( 4 \frac{r_0}{r} - 2\ln r_0 - 3 + \frac{2r_0^2}{r^2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \right. \\
 &\quad (1+\mu) \cos \theta \left( 4 \frac{r_0}{r} - 3\ln r_0 - \frac{9}{2} + \frac{r_0^2}{r^2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{2r^2} \right) + \\
 &\quad \left. (1-\mu) \cos 2\beta \cos \theta \left( \ln r_0 + \frac{3}{2} + \frac{r_0^2}{r^2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{2r_0} \right) \right], \\
 M_{r2}^{**}(\xi, x) &= -\frac{1-\mu}{8\pi r_0} \left[ \cos 2\beta \sin \theta \left( \frac{2r_0}{r} - \ln r_0 - \frac{3}{2} + \frac{r_0^2}{r^2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{2r^2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \theta \left( \ln r_0 + \frac{3}{2} + \frac{r_0^2}{r^2} \ln r_0 - \frac{r_0^2}{2r_0} \right) \right], \\
 V_{n2}^{**}(\xi, x) &= -\frac{1}{4\pi r} \left\{ \frac{\cos(\beta-\theta)}{r} [2 + (1-\mu) \cos 2\beta] + \right. \\
 &\quad 2(1-\mu) \left[ \frac{\cos \beta}{r} - \frac{1}{\rho} \right] \sin 2\beta \sin \theta \left. \right\} - \frac{r_0}{8\pi r^3} \left\{ (2\ln r_0 - 1) \cos(\beta-\theta) - \right. \\
 &\quad \left[ \left( \ln r_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{3r^2}{r_0^2} \left( \ln r_0 + \frac{3}{2} \right) \right] \sin \beta \sin \theta - \\
 &\quad (1-\mu)(2\ln r_0 - 1) \left[ \sin(2\beta-\theta) \sin \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \sin \beta \cos \theta \right] - \\
 &\quad (1-\mu) \left[ \frac{r^2}{r_0^2} \left( \ln r_0 + \frac{3}{2} \right) \left( \cos(2\beta+\theta) \cos \beta + \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \beta \sin \theta \right) - \right. \\
 &\quad \left. \left( \ln r_0 - \frac{1}{2} \right) \left( \cos(2\beta-\theta) \cos \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \cos \beta \sin \theta \right) \right] + \\
 &\quad (1-\mu) \left[ \cos \beta - \frac{r}{\rho} \right] \left[ \frac{r^2}{r_0^2} \left( \ln r_0 + \frac{3}{2} \right) (\cos(2\beta+\theta) - \sin 2\beta \sin \theta) + \right. \\
 &\quad \left. \left( \ln r_0 - \frac{1}{2} \right) (\cos(2\beta-\theta) + \sin 2\beta \sin \theta) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

至此,弹性薄板的局部边界积分方程中所需的全部已知函数都已给出。以后的工作将是利用移动最小二乘函数来近似位移函数,编制程序进行计算,以检验方法的可靠性、收敛性和稳定性,以及结果的精度。这将在以后的文章中给出。

### [参 考 文 献]

- [1] Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A local boundary integral equation(LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach[J]. Computational Mechanics, 1998, 21(2): 223—235.
- [2] 龙述尧,许敬晓. 弹性力学问题的局部边界积分方程方法[J]. 力学学报, 2000, 32(5): 566—578.
- [3] 布瑞比亚,泰勒斯,诺贝尔. 边界单元法的理论和工程应用[M]. 龙述尧,刘滕喜,蔡松柏译. 北京:国防工业出版社, 1988.

# Research on the Companion Solution for a Thin Plate in the Meshless Local Boundary Integral Equation Method

LONG Shu\_yao, XIONG Yuan\_bo

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,  
Changsha 410082, P. R. China)

**Abstract:** The meshless local boundary integral equation method is a currently developed numerical method, which combines the advantageous features of Galerkin finite element method (GFEM), boundary element method (BEM) and element free Galerkin method (EFGM), and is a truly meshless method possessing wide prospects in engineering applications.

The companion solution and all the other formulas required in the meshless local boundary integral equation for a thin plate were presented, in order to make this method apply to solve the thin plate problem.

**Key words:** thin plate; companion solution; meshless local boundary integral equation method