

文章编号: 1000-0887(2005) 07-0801-09

# 非线性发展方程的小模板简化 Padé 格式\*

刘儒勋, 吴玲玲

(中国科学技术大学 数学系, 合肥 230026)

(我刊原编委戴天民推荐)

**摘要:** 在有理逼近的紧致格式的理论基础上, 采用特别的统一的 Padé 逼近形式, 构造了针对高阶非线性发展方程的、简单小模板的差商格式。不仅保持了格式的四阶精度, 而且还可以采用追赶法求解得到的 3 对角矩阵, 或者采用三阶 Runge-Kutta 法直接求解积分。计算效果通过多种算例表明是十分令人满意的。相对于其他差分格式, 此方法具有模板较小而精度保持四阶的优点。

**关键词:** 发展方程; 紧致格式; Padé 逼近; 节点模板; 孤立子

**中图分类号:** O175.5      **文献标识码:** A

## 引 言

高阶非线性发展方程具有广泛而深刻的物理背景和现实意义。发展方程数值解的困难在于含有高阶导数。而且人们很看重孤立子守恒数值研究, 历史上有很多有名的数值数学家从事各种高阶、守恒、保形格式的研究。尽管有很多成功的算例, 详细可以参考文献[1]和文献[2], 但是不尽满意的工作也是有的。问题在于精度难以提高, 也在于模板过宽和实施的难度。

本文在前人有理逼近和紧致格式研究和应用<sup>[3~8]</sup>的基础上提出了一种简单有效的 Padé 格式。对于方程中不同的各阶导数采用同样分母的 Padé 逼近形式, 使节点模板达到尽可能的压缩, 而且又引入了  $\Delta$  型格式求 3 对角阵的解法。使精度既保持了四阶的要求, 而且可以实现隐式求解效果, 对稳定性、代数方程组的收敛保证都有很好的效果。本文里所得到的几组格式, 对 Burgers 方程的初边值问题得到了令人满意的结果; 对 KdV 单孤立子、双孤立子的模拟也取得了不错的效果, 衰减很小, 守恒性基本得到保证; 对 KdV\_Burgers 耗散、色散实验也很有趣, 理论结果得到了数值验证。

第 1 节我们介绍紧致格式及 Padé 格式, 并说明节点模板与各阶导数逼近精度的关系, 指出达到高阶精度与模板的矛盾。第 2 节我们推导简单的、统一的 Padé 逼近, 对 Burgers, KdV 和 KdV\_Burgers 方程提出几组可行的简化的小模板 Padé 格式。第 3 节是算例与数值结果分析。

## 1 有理逼近格式

可以证明: 为了线性逼近一个函数的  $M$  阶导数  $f^{(m)}(x)$ , 并且要求达到  $K$  阶精度, 所需要

\* 收稿日期: 2003\_09\_03; 修订日期: 2005\_03\_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371118, 90411009); 中国科学技术大学火灾科学国家重点实验室基金资助项目; 北京计算物理实验室基金资助项目

作者简介: 刘儒勋(1938—), 男, 青岛人, 教授, 博士生导师(联系人, E-mail: liurx@ustc.edu.cn)。

的该函数的模板的节点数, 至少应当等于最大导数阶与要求的精度阶之和, 即  $M + K$ . 但是如果采用有理逼近或者 Pad 逼近, 在同样的要求下, 所要求的节点模板则可以大为节省.

例如在线性差分逼近情况下, 一般地

$$(f_x)_i = af_{i-2} + bf_{i-1} + cf_i + df_{i+1} + ef_{i+2} + O(\Delta x^4),$$

其中,  $u_i = u(x_i)$  是未知函数在空间网格  $x = x_i$  上的函数近似值, 差分网格空间步长  $h = \Delta x$ . 利用 Taylor 展开, 比较系数, 我们可以得到:

$$a + b + c + d + e = 0,$$

$$-2a - b + d + 2e = \frac{1}{\Delta x},$$

$$4a + b + d + 4e = 0,$$

$$-8a - b + d + 8e = 0.$$

从上面的式子可以看出为了达到四阶精度, 我们至少需要一个 5 节点模板. 如此等等, 不必赘述. 但是采用有理逼近的形式, 根据 Lele 等的有理逼近形式<sup>[3]</sup>, 欲达 4 阶精度只需

$$\frac{1}{4}f'_{i-1} + f'_i + \frac{1}{4}f'_{i+1} = \frac{3}{2} \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}.$$

在本文中, 我们采用一种紧凑的分式 Pad 逼近形式代替. 首先引入以下算子符号:

$$Eu_i = u_{i+1}, E^{-1}u_i = u_{i-1}; \mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}),$$

$$\nu = \frac{1}{2}(E + E^{-1}), \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}, \delta = \frac{1}{2}(E - E^{-1}),$$

它们分别是移位算子, 平均算子和中心差分算子. 利用上述算子符号, 上式又可以转化为 Pad 逼近形式

$$(f_x)_i = \frac{1}{h} \frac{\mu\delta}{1 + \delta^2/6} f'_i.$$

利用 Pad 逼近, 对于守恒方程

$$u + f(u)_x = 0, \quad (1)$$

我们就有半离散 Pad 型格式

$$u + \frac{1}{h} \frac{\mu\delta}{1 + \delta^2/6} f_i^{n+1/2} = 0, \quad (2)$$

这时可以采用 Runge\_Kutta 方法直接进行积分求解. 或者全离散 Pad 型格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{1}{h} \frac{\mu\delta}{1 + \delta^2/6} f_i^{n+1/2} = 0, \quad (3)$$

可以利用  $\Delta'$  差分方法<sup>[8]</sup> 和 3 对角方程组的追赶法计算.

问题在于当方程中存在多项不同阶的数值导数时. 对于诸如 Burgers, KdV, RLW 和 KdV\_Burgers 等非线性方程, 如果不能够推导出相同商式的 Pad 逼近形式, 则节点模板并不能节省, 甚至可能增大.

现以下例 Burgers 型方程加以说明:

$$u_t + f(u)_x = \frac{1}{Re} u_{xx}, \quad (4)$$

这是 Navier-Stokes 方程数值研究中一个很好的模型方程. 如果采用一阶和二阶不同商算子的 Pad 形式, 对方程的空间导数进行逼近, 则差分方程为

$$u_{it} + \frac{1}{h} \frac{\mu\delta}{1 + \delta^2/6} f'_i = \frac{1}{h^2 Re} \frac{\delta^2}{1 + \delta^2/12} u_{ii}, \quad (5)$$

和

$$\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right)\left(1 + \frac{1}{12}\delta^2\right)u_{ii} + \frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{12}\delta^2\right)\mu g_i = \frac{1}{h^2 Re}\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right)\delta^2 u_i, \quad (6)$$

显然, 方程左边模板比较大, 需要 5 个节点, 并没有达到前面所述的减小节点模板的效果, 实际上仍然是 5 节点的模板, 需要求解 5 对角系数阵的常微分方程组。或者需要采用分数步方法

$$\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right)v_i + \frac{1}{h}\left(1 + \frac{1}{12}\delta^2\right)\mu g_i = \frac{1}{h^2 Re}\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right)\delta^2 u_i, \quad \left(1 + \frac{1}{12}\delta^2\right)u_{ii} = v_i,$$

同样是大大增加了求解的困难。对于更高阶的发展方程, 模板的结点数还要进一步的扩充。

分析格式, 我们可以发现, 模板增大的原因是 Pad 逼近的分式中分母算子不统一, 为此我们试图寻求一种统一的形式以便得到压缩的模板。

## 2 Pad 逼近和紧致(Compact)格式

Lele<sup>[3]</sup>, Kobayashi<sup>[4]</sup>等给出了一般情况下的 Compact 格式形式:

$$\beta(f'_{i-2} + f'_{i+2}) + \alpha(f'_{i-1} + f'_{i+1}) + f'_i = c\frac{f_{i+3} - f_{i-3}}{6h} + b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a\frac{\mu\delta}{2h}f'_i, \quad (7)$$

$$\beta(f''_{i-2} + f''_{i+2}) + \alpha(f''_{i-1} + f''_{i+1}) + f''_i = c\frac{f_{i+3} - 2f_i + f_{i-3}}{9h^2} + b\frac{\delta^2}{4h}f_i + a\frac{\delta^2}{h}f_i. \quad (8)$$

一般有理逼近或紧致格式的解法, 是全隐式的方法。譬如对于守恒方程

$$f_t + gf_x = 0 \quad (9)$$

的求解过程, 一般说来, 可以分为下面的两个步骤:

1) 在  $t = t^n$  时间层上, 根据前面的有理逼近方程, 它可以写成矩阵形式

$$AF' = \frac{1}{h}BF,$$

其中  $A$ 、 $B$  是  $N \times N$  矩阵,  $N$  为  $t = t_n$  时间层上的未知节点  $\{x = x_i\}$  个数,  $F'$ 、 $F$  分别是相应的未知函数导数, 及函数值向量。对于上述简单线性方程情况那是不必预先求解的; 然而在通常, 特别是非线性问题时, 就必须预先解出  $F'$ 。

2) 如果是上述的线性方程情况, 可以直接写出有理逼近或者紧致(Compact)格式

$$A\frac{dF'}{dt} = \frac{1}{h}BF.$$

即使再进行时间离散, 它也是完全隐式型差分格式。如果采用常微分方程的 Runge\_Kutta 方法求解, 它也是不方便的。在非线性的情况下, 则根据解出的  $F'$  或者  $f'_i (\forall i)$  代入方程(9)的差分格式, 得

$$u_i^{n+1} = L(u_i^n, f'(u_i^n)).$$

根据在第 1 节的讨论和分析, 我们可以提出以下的小模板简化的 Pad 四阶逼近格式。

根据文献[3]和文献[4], 要求减小节点模板可以选取  $\beta = 0, c = 0$ 。而且为了保证对于一阶和二阶微商  $f', f''$  得到同样分母算子的 Pad 逼近形式, 下面取左端相同的系数  $\alpha$ , 右端的差商系数则分别取  $a, b$  和  $a, b$

$$g'_{i-1} + f'_i + g'_{i+1} = b\frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \quad (10)$$

$$g''_{i-1} + f''_i + g''_{i+1} = b\frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \quad (11)$$

又如果仅仅须要达到 4 阶逼近精度, 就只要满足下述系数关系

$$a = \frac{2}{3}(\alpha + 2), \quad b = \frac{1}{3}(4\alpha - 1), \quad a = \frac{4}{3}(1 - \alpha), \quad b = \frac{1}{3}(10\alpha - 1),$$

可见,  $\alpha$  的不同选择能够导致各种不同格式, 我们考虑其中两种比较特殊的格式

1) 选  $b = 0$  则  $\alpha = 1/4, a = 3/2, b = 0, a = 1, b = 1/2$ , 就有 Pad 逼近形式

$$u_x = \frac{1}{h} \frac{\mu\delta}{1 + \delta^2/6} u_i, \quad u_{xx} = \frac{1}{h^2} \frac{\delta^2/3 + 2\delta^2/3}{1 + \delta^2/6} u_i \quad (12)$$

2) 选  $b = 0$  则  $\alpha = 1/10, a = 7/5, b = -1/5, a = 6/5, b = 0$ , 又有另一组 Pad 逼近形式

$$u_x = \frac{1}{h} \frac{7\delta^2/6 - \delta^2/6}{1 + \delta^2/12} u_i, \quad u_{xx} = \frac{1}{h^2} \frac{\delta^2}{1 + \delta^2/12} u_i \quad (13)$$

由于对于一阶和二阶微商  $f', f''$  有了相同分母算子的 Pad 逼近形式, 所以可以对方程 (4) 采用上面得到的两组 Pad 逼近进行离散. 考虑到通量函数的复杂性, 取第一组, 得

$$\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right) u_i + \frac{1}{h}\mu g_i = \frac{1}{h^2 Re} \left(\frac{1}{3}\delta^2 + \frac{2}{3}\delta^2\right) u_i, \quad (14)$$

这是 3 对角的方程组. 也可以采用方程组的 R\_K 迭代法求解.

现在, 我们介绍一种“ $\Delta$ ”方案的全离散解法. 记

$$v_i = u_i^{n+1} - u_i^n,$$

“ $\Delta$ ”方法即进行如下两步过程

$$\left(1 + \frac{1}{6}\delta^2\right) v_i = \frac{\Delta t}{h} \mu g_i^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{h^2 Re} \left(\frac{1}{3}\delta^2 + \frac{2}{3}\delta^2\right) u_i^{n+1/2}, \quad (15)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + v_i, \quad (16)$$

其中

$$f_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(f(u_i^n) + f(u_i^{n+1})), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^{n+1}),$$

开始的  $f(u_i^{n+1})$  和  $u_i^{n+1}$  可以用  $f(u_i^n)$  和  $u_i^n$  代替, 作为予估值; 而后进行迭代校正. 格式是时间二阶, 空间四阶的. 考虑到方程有二阶微商项, 一般要求  $\Delta t = O(h^2)$ , 所以可以说是空间四阶的.

对于三阶的发展方程, 我们依然采用文献[3]的形式, 选择达到四阶精度  $\beta = 0$  的 3 对角形式. 同前面 (10) 和 (11) 一样, 对于三阶微商也取类似形式

$$\begin{cases} \alpha(f'_{i-1} + f'_{i+1}) + f'_i = b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{4h} + a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}, \\ \alpha(f''_{i-1} + f''_{i+1}) + f''_i = b \frac{f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}}{4h^2} + a \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}, \\ \alpha(f^{\circlearrowleft}_{i-1} + f^{\circlearrowleft}_{i+1}) + f^{\circlearrowleft}_i = \\ b \frac{f_{i+3} - 3f_{i+1} + 3f_{i-1} - f_{i-3}}{8h^3} + a \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3}, \end{cases} \quad (17)$$

显然可以看出, 如果  $\alpha$  取值相同, 在计算中可以缩小模板. 利用 Taylor 展开比较两边系数, 为达到四阶精度, 则需要满足如下关系:

$$a = \frac{2}{3}(2 + \alpha), \quad b = \frac{1}{3}(-1 + 4\alpha),$$

$$a = \frac{4}{3}(1 - \alpha), \quad b = \frac{1}{3}(-1 + 10\alpha),$$

$$\hat{a} = 2, \quad \hat{b} = 2\alpha - 1.$$

为得到较小的模板, 如果我们选择  $b = 0$ , 代入上式解出相应的各系数得

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{5}{3}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{4}{3}, \quad \hat{a} = 2, \quad \hat{b} = 0, \quad (18)$$

从而可以得到一组 Pad 逼近形式, 写成算子形式就是

$$f' = \frac{1}{h} \frac{1}{1 + \delta^2/4} \left\{ \frac{1}{6} \mu \delta + \frac{5}{6} \mu \delta \right\} f_i, \quad (19)$$

$$f'' = \frac{1}{h^2} \frac{1}{1 + \delta^2/4} \left\{ \frac{2}{3} \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^2 \right\} f_i, \quad (20)$$

$$f \ominus = \frac{1}{h^3} \frac{1}{1 + \delta^2/4} \mu \delta^3 f_i. \quad (21)$$

### 3 数值算例与结果分析

#### 3.1 Burgers 方程的初边值问题

首先考虑如下特殊初值的 Burgers 方程初边值问题

$$u_t + \left( \frac{u^2}{2} \right)_x = \frac{1}{Re} u_{xx}, \quad (22)$$

$$u(0, x) = \frac{1}{2} \sin(\pi x) + \sin(2\pi x), \quad (23)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (24)$$

这是在 Navier-Stokes 方程数值研究中的一个很好的模型方程, 既有非线性对流项  $(u^2/2)_x$ , 又含有扩散项  $u_{xx}/Re$ ,  $Re = 10^4$ . 由于在上述的初值条件下解将迅速地形成激波, 而且随着时间的进行发展成边界层, 所以构造上述 Burgers 定解的差分格式要求很高, 技巧性很强.

我们利用上面的 Pad 逼近并采用“ $\Delta$ ”方法来进行. 为了保证移项后格式左边是 3 对角的对角优矩阵, 我们选择前面提到的格式(13), 即选择  $\alpha = 1/10$ , 保证  $b = 0$ . 令  $u_i = (u_i^{n+1} - u_i^n)/\Delta t = v_i/\Delta t$ , 方程可以采用两种不同方式求解:

##### 1) 全离散“ $\Delta$ ”型紧致(Compact)方式

$$\frac{1}{10} v_{i-1} + v_i + \frac{1}{10} v_{i+1} = \frac{\Delta t}{20h} (f_{i+2}^{n+1/2} - f_{i-2}^{n+1/2}) - \frac{7\Delta t}{10h} (f_{i+1}^{n+1/2} - f_{i-1}^{n+1/2}) + \frac{1}{Re} \frac{6\Delta t}{5h^2} (u_{i+1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i-1}^{n+1/2}),$$

其中  $f = u^2/2$ . 此时可以通过 3 对角阵得到  $v_i$ . 首先作预估步计算, 令  $u_i^{n+1/2} = u_i^n$ . 得到予估值  $v_i$ , 计算

$$u_i^{n+1} = u_i^n + v_i,$$

再作校正步计算, 令

$$u_i^{n+1/2} = \frac{u_i^{n+1} + u_i^n}{2},$$

得到下一时间层的校正值.

该算例波形的发展趋势是很快就发展成激波, 必须要高阶且稳定的格式才可以得到较好的结果. 如图 1 所示, 分别显示不同时间的图象, 可以看出与实际结果有较好的吻合.

##### 2) Runge-Kutta 型 Pad 方式

同样选择前面提到的格式(13), 代入到 Burgers 方程的 Pad 形式

$$\left( 1 + \frac{1}{12} \delta^2 \right) u_i + \frac{1}{h} \left( \frac{7}{6} \delta^2 - \frac{1}{6} \delta^2 \right) \left( \frac{u^2}{2} \right)_i^{n+1/2} = \frac{1}{h^2 Re} \delta^2 u_i^{n+1/2},$$

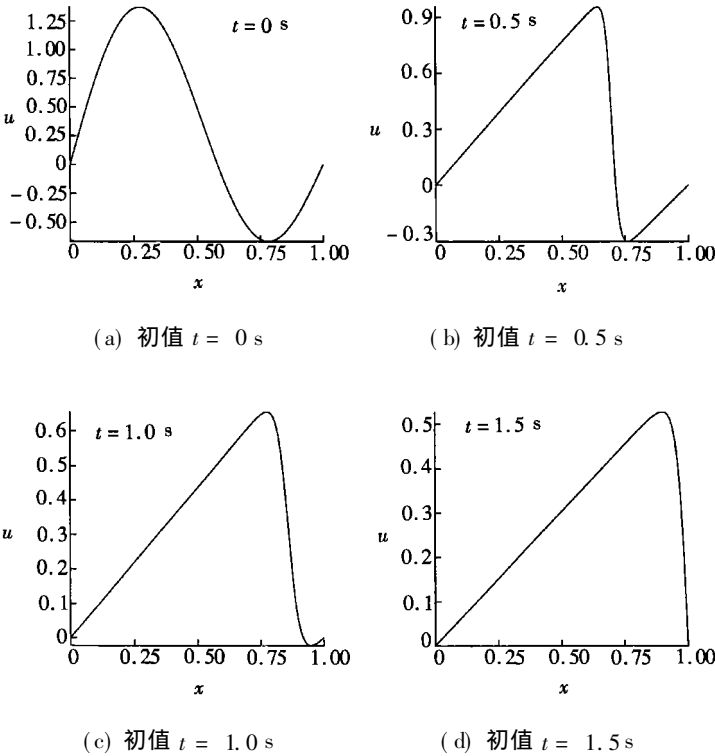


图 1 Burgers 方程的初边值问题

或者展开为

$$\frac{1}{12}(u_{i+1})_t + \frac{5}{6}u_{it} + \frac{1}{12}(u_{i-1})_t = \frac{1}{h^2 Re} \delta^2 u_i^{n+1/2} - \frac{1}{6h}(7\delta^2 - \delta^2) \left( \frac{u^2}{2} \right)_i^{n+1/2},$$

显然, 这是对角占优的, 完全能够保证数值解的稳定性。

### 3.2 KdV 方程的单孤立子和双孤立子实验

对于 KdV 方程

$$u_t + uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad (25)$$

可以通过同样的处理得到小模板的格式。

可以将方程化为

$$\frac{1}{2}v_{i-1} + v_i + \frac{1}{2}v_{i+1} = -\frac{\Delta t}{3h}(f_{i+2} + 5f_{i+1} - 5f_{i-1} - f_{i-2}) + \mu \frac{\Delta t}{h^3}(u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}),$$

其中  $f_i = u_i^2/2$ , 特别地, 我们也可以取这平方项的线性化形式, 并借鉴 Zabusky 和 Kruskal 的系数平均方式<sup>[8]</sup>, 有的时候效果更好。下面对于 KdV 方程, 取不同的两种初值条件分别进行数值模拟实验。

#### (i) 单孤立子实验

$$u(x, 0) = \frac{12}{\cosh(x-15)^2}, \quad (26)$$

如图 2 所示, 表现出单孤立子传播衰减很小。

#### (ii) 双孤立子实验

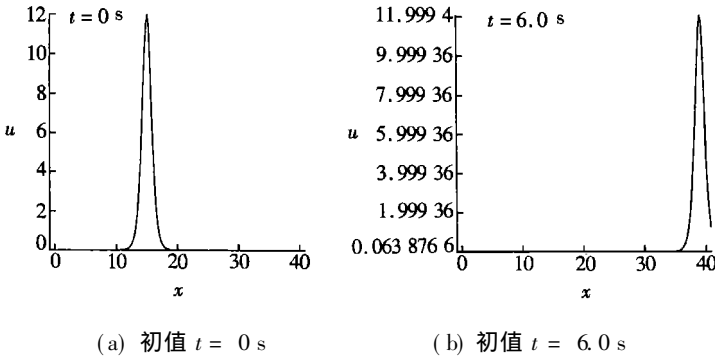


图2 KdV方程的初边值问题

$$u(x, 0) = \frac{48}{\cosh(2(x - 15))^2} + \frac{12}{\cosh(x - 25)^2}, \tag{27}$$

如图3显示双孤立子的追赶和碰撞的发展情形, 同样也有较好的守恒性.

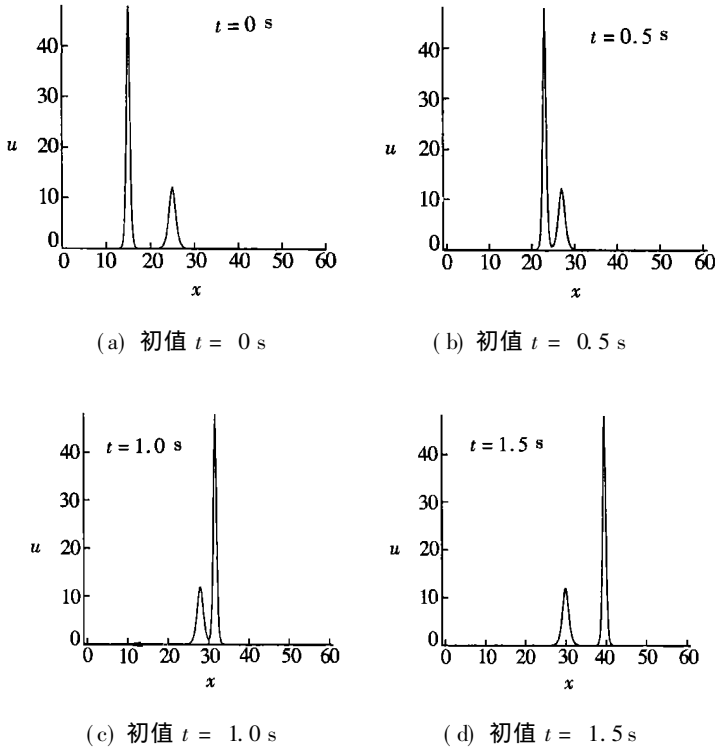


图3 KdV方程的初边值问题

### 3.3 KdV\_Burgers 方程的耗散和色散实验

考察如下形式的 KdV\_Burgers 方程

$$u_t + 2uu_x - \nu u_{xx} + \mu u_{xxx} = 0, \tag{28}$$

这个方程具有多种模型方程的耦合特征, 当  $\mu = 0$  时是 Burgers 方程或者 Convection\_diffusion 方程, 当  $\nu = 0$  时是 KdV 方程, 是典型的色散型方程. 当  $\mu, \nu$  在不同范围内变化时候, 将产生色散、耗散的耦合效应, 呈现不同的情况具有不同的性质.

类似地, 利用(19)~(21)式, 我们有 Pad 型“ $\Delta$ ”格式

$$\frac{1}{2}v_{i-1} + v_i + \frac{1}{2}v_{i+1} = -\frac{\Delta t}{3h}(f_{i+2} + 5f_{i+1} - 5f_{i-1} - f_{i-2}) +$$

$$v \frac{\Delta t}{3h^2} (u_{i+2} + 2u_{i+1} - 6u_i + 2u_{i-1} + u_{i-2}) -$$

$$\mu \frac{\Delta t}{h^3} (\Delta u_{i+2} - 2\Delta u_{i+1} + 2\Delta u_{i-1} - \Delta u_{i-2}),$$

仍然是采用隐式迭代的“ $\Delta$ ”型格式, 具体操作步骤如下:

1) 预估步计算• 取

$$f_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(f_i^n + f_i^n), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^n), \quad \forall i,$$

利用上述格式, 计算出  $v_i$  的第 1 次校正值, 代入

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2} + v_i,$$

得到  $t = t_{n+1}$  时刻的第 1 次近似值  $u_i^{n+1}$ 。

2) 校正步计算• 取

$$f_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(f_i^n + f_i^{n+1}), \quad u_i^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^{n+1}), \quad \forall i,$$

再利用上述格式, 计算出  $v_i$  的第 2 次校正值, 得校正结果:

$$u_i^{n+1} = u_i^{n+1/2} + v_i.$$

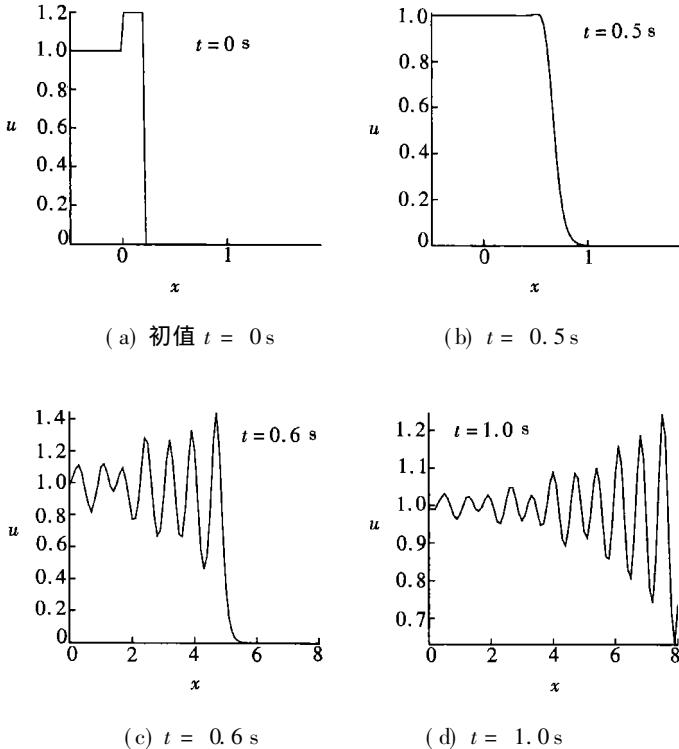


图 4 KdV\_Burgers 方程的色散和耗散实验

如图 4 所示, 显示出 KdV\_Burgers 方程的色散和耗散性质。当  $v^2 \gg 4\mu$ , 方程呈现耗散优势。其中图 4(a) 是耗散实验的初值波形, 可以看到仅仅经过 0.5 s 的时间, 原来波头上的小方波很快就被抹平了(图 4(b))。而当  $v^2 \ll 4\mu$  的方程色散实验中, 我们采用的初值是没有波头上的小方波的初值。图 4(c) 和图 4(d) 分别就是经过 0.6 s 和 1.0 s 后的结果。表现了方程的色散优势性质, 由于方程内在的强色散效应, 很快就造成波头上的激烈振荡, 并且在极短的时间内就向上游发展, 使图形面目全非。这与理论上的结果是完全吻合的<sup>[9]</sup>。这对于我们设计



和构造数值方法是很有借鉴意义的。也就是说, 在设计和构造格式的时候, 应当具有适当的数值耗散和数值色散的效果, 就必须控制和调节它的数值余项, 特别是偶阶余项和奇阶余项的系数强度<sup>[10]</sup>。

### [参 考 文 献]

- [1] Kahan W, Li Ren\_chang. Unconventional schemes for a class of ordinary differential equations with applications to the Korteweg\_de Vries equation[J]. J Math Phys, 1997, **134**(6): 316—331.
- [2] Gardner L R T, Gardner G A. Solitary waves of regularised long\_wave equation[J]. J Math Phys, 1990, **91**: 441—459.
- [3] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral\_like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, **103**: 16—42.
- [4] Kobayashi M H. On a class of Pade finite volume methods[J]. Journal of Computational Physics, 1999, **156**(1): 137—180.
- [5] Hixon R. Prefactored small\_stencil compact schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2000, **165**(2): 522—541.
- [6] Carpenter M H. Methodology and application to high\_order compact schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1994, **111**: 220—236.
- [7] Goedheer W J, Potters J H H M. A compact finite scheme on a non\_equidistant mesh[J]. Journal of Computational Physics, 1985, **61**: 269—279.
- [8] Ganosa J, Gazdag J. The Korteweg\_de Vries\_Burgers equation[J]. Journal of Computational Physics, 1977, **23**: 293—403.
- [9] 忻孝康, 刘儒勋, 蒋伯城. 计算流体力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1989.
- [10] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的某些新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

## Small\_Stencil Padé Schemes to Solve Nonlinear Evolution Equations

LIU Ru\_xun, WU Ling\_ling

(Department of Mathematics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, P. R. China)

**Abstract:** A set of small\_stencil new Padé schemes with the same denominator are presented to solve high\_order non\_linear evolution equations. Using this scheme, the fourth\_order precision cannot only be kept, but also the final three\_diagonal discrete systems are solved by simple Doolittle methods, or ODE systems by Runge\_Kutta technique. Numerical samples show that the schemes are very satisfactory. And the advantage of the schemes is very clear compared to other finite difference schemes.

**Key words:** evolution equation; compact scheme; Padé scheme; node stencil; soliton