

文章编号: 1000-0887(2005) 06-0707-07

松弛模型中的液气共存平衡态*

王 平¹, 唐少强²

(1. 大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;
2. 北京大学 力学与工程科学系 湍流国家重点实验室, 北京 100871)

(黄永念推荐)

摘要: 对密闭的一维有限长管道里的等温相变, 研究了松弛模型中液气共存平衡态的稳定性. 使用匹配渐近展开形式上推出了一阶扰动满足的线性系统. 理论分析发现, 初始小扰动通常会被耗散掉, 然而在一些特殊情况下, 它们会维持在一定的水平上. 数值计算也表明了松弛机制对相变演化具有稳定作用.

关键词: 相变; 松弛; 匹配渐近展开
中图分类号: O359.1 文献标识码: A

引 言

范德瓦(Van der Waals) 流体中的等温液气相变的控制方程是不适定的, 其核心问题是稳定性. 要解决这个问题, 我们需要引入耗散机制, 比如质量粘性项和动量粘性项^[1], 或者粘性项和张应力项^[2]. 这些模型以及相关问题的广泛研究极大地丰富了我们关于相变各个方面的知识^[1, 3- 6]. 例如, 用粘性项和张应力项, Chen 和 Wang 研究了在一维有限长密闭管道中液气共存平衡态附近小扰动的影响^[7]. 他们发现液气交界面以振动方式趋近于它的最终位置(由质量守恒决定). 在相变过程中, 通常初始小扰动的动能会逐渐耗散掉, 系统趋于平衡态; 但在一些特殊情况下, 初始小扰动的动能不会耗散掉, 并且线性化系统有无穷多个线性独立的周期解.

另一方面, 自从松弛模型提出以来^[8], 低阶耗散也被广泛地研究. 理论分析和数值计算都表明了合适的低阶耗散能使相变过程稳定下来, 文献[9]中提出了一系列离散 BGK 模型. 对一个特定的模型, 文献[10]给出了严格的稳定性结果, 文献[11]中给出了二维的波斑图.

1 模 型

范德瓦流体中的等温液气相变的控制方程为

$$\partial_t \tau - \partial_x u = 0, \quad \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \quad (1)$$

* 收稿日期: 2003_07_08; 修订日期: 2004_11_30

基金项目: 国家重点基础研究专项基金资助项目“非线性科学”(G2000077305); 国家自然科学基金资助项目(10002002; 90407021)

作者简介: 王平(1976—), 男, 吉林辉南人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86_411_84707608; E-mail: wangp@dlt.edu.cn);

唐少强(Tel/Fax: + 86_10_62755410; E-mail: maotang@pku.edu.cn).

其中 τ, u, t, x 分别为比体积、速度、时间和空间坐标。

存在特定比体积 $\tau_0 < \tau < \tau_1 < \tau_2 < \tau^*$, 压力函数 $p(\tau)$ 在液相 $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ 和气相 $\tau \in (\tau_2, +\infty)$ 中单调递减, 而在 $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ 区间内单调递增^[12]。 τ^* 和 τ 称为麦克斯韦态,

由 $p(\tau^*) = p(\tau)$ 和 $\int_{\tau}^{\tau^*} [p(\tau) - p(\tau^*)] d\tau = 0$ 决定。

我们用以下松弛模型研究密闭的一维管道中液气共存平衡态的稳定性

$$\begin{cases} \partial_t \tau + \partial_x v = 0, \quad \partial_t v + \lambda^2 \partial_x \tau = -\frac{1}{\varepsilon}(v + u), \\ \partial_t u + \partial_x w = 0, \quad \partial_t w + \lambda^2 \partial_x u = -\frac{1}{\varepsilon}[w - p(\tau)], \end{cases} \quad (2)$$

这里 $\varepsilon \ll 1$ 和 λ 是参数, v, w 是引入的新变量。假设管道的坐标为 $x \in [a, b]$, 则边界条件为

$$\partial_x \tau(a, t) = \partial_x \tau(b, t) = 0, \quad u(a, t) = u(b, t) = 0. \quad (3)$$

对于在液气共存平衡态上加一个小扰动的问题, 用我们的模型得到了和文献[7]中的粘性_张力模型相似的结果, 这进一步证明了低阶耗散机制的稳定作用。

2 匹配渐近展开

为了叙述的方便, 我们定义 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = (\tau(x, t), v(x, t), u(x, t), w(x, t))^T$ 。管道的坐标区间记为 $[a, b]$, 它被分成 5 个区域, 其上的解分别记为

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^A(x, t), & \text{当 } x \in [a, a + 2\varepsilon^\mu] \text{ (边界层区)}, \\ \mathbf{u}^-(x, t), & \text{当 } x \in [a + \varepsilon^\mu, s - \varepsilon^\mu] \text{ (气相区)}, \\ \mathbf{u}^l(x, t), & \text{当 } x \in [s - 2\varepsilon^\mu, s + 2\varepsilon^\mu] \text{ (交界面区)}, \\ \mathbf{u}^+(x, t), & \text{当 } x \in [s + \varepsilon^\mu, b - \varepsilon^\mu] \text{ (液相区)}, \\ \mathbf{u}^B(x, t), & \text{当 } x \in [b - 2\varepsilon^\mu, b] \text{ (边界层区)}, \end{cases}$$

这里我们假设气相在边界层的左面。边界层的位置 $s = s(t)$ 将会在后面决定, $\mu \in (0, 1)$ 是对交界面和边界层厚度的一个粗略的估计。

在两个边界层区和交界面区分别作变量替换 $z = (x - a)/\varepsilon, z = (x - b)/\varepsilon$ 和 $z = (x - s)/\varepsilon$ 。为简单起见, 我们在不同的区间仍使用同一符号 z

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}^A(z, t), & \text{当 } z \in [0, +\infty), \\ \mathbf{u}^-(x, t), & \text{当 } x \in [a + \varepsilon^\mu, s - \varepsilon^\mu], \\ \mathbf{u}^l(z, t), & \text{当 } z \in (-\infty, +\infty), \\ \mathbf{u}^+(x, t), & \text{当 } x \in [s + \varepsilon^\mu, b - \varepsilon^\mu], \\ \mathbf{u}^B(z, t), & \text{当 } z \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

现在将 \mathbf{u} 和 s 展成 ε 的级数, 也就是

$$\begin{cases} \mathbf{u}^A = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{u}_j^A, \quad \mathbf{u}^- = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{u}_j^-, \quad \mathbf{u}^l = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{u}_j^l, \\ \mathbf{u}^+ = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{u}_j^+, \quad \mathbf{u}^B = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \mathbf{u}_j^B, \quad s = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j s_j. \end{cases} \quad (4)$$

一个 $O(\varepsilon)$ 阶的扰动将会被加到液气共存平衡态上, 将(4)式代入(2)式, 我们可以得到 $\mathbf{u}_j^A, \mathbf{u}_j^-, \mathbf{u}_j^l, \mathbf{u}_j^+, \mathbf{u}_j^B$ 的一组常微分方程。通过匹配重叠区间的渐近展开式, 我们可以得到这组

常微分方程的初始条件和边界条件。

2.1 气相和液相区

在气相区, 我们将 $u^- = \sum_{j=0}^{\infty} \dot{\epsilon} u_j^-$ 代入(2)式进行求解, 其首阶方程是

$$\partial_t \tau_0 + \partial_x v_0 = 0, v_0 + u_0 = 0, \partial_t u_0 + \partial_x w_0 = 0, w_0 - p(\tau_0) = 0 \quad (5)$$

它的解为 $(\tau_0(x, t), v_0(x, t), u_0(x, t), w_0(x, t)) = (\tau, 0, 0, p(\tau))$ 。

从其一阶方程我们可能直接得到 $v_1 = -u_1, w_1 = -(c^-)^2 \tau_1$, 以及

$$\partial_t \tau_1 - \partial_x u_1 = 0, \partial_t u_1 - (c^-)^2 \partial_x \tau_1 = 0 \quad (6)$$

同样在液相区, 我们有 $v_1^+ = -u_1^+, w_1^+ = -(c^+)^2 \tau_1^+$, 以及

$$\partial_t \tau_1^+ - \partial_x u_1^+ = 0, \partial_t u_1^+ - (c^+)^2 \partial_x \tau_1^+ = 0 \quad (7)$$

2.2 边界层区间

注意到 $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial z}$, 将 $u^A = \sum_{j=0}^{\infty} \dot{\epsilon} u_j^A$ 代入(2)式, 利用边界条件(3)和气相区间的结果, 从

其首阶展式的方程我们可以直接得到 $v_0^A(z, t) = 0, w_0^A(z, t) = p(\tau)$, 以及

$$\begin{cases} \lambda^2 \partial_z \tau_0^A = -u_0^A, \partial_z \tau_0^A(0, t) = 0, \tau_0^A(+\infty, t) = \tau, \\ \lambda^2 \partial_z u_0^A = p(\tau_0^A) - p(\tau), u_0^A(0, t) = 0, u_0^A(+\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

既然 τ_0^A 在 τ 的附近, 仅有的临界点 $(\tau_0^*, u_0^*) = (\tau, 0)$ 是一个鞍点, 相平面分析显示只有当 $\tau_0^A(0, t) = \tau$ 时, $(\tau_0^A(0, t), 0)$ 才能位于该鞍点的稳定流型上。这意味着 $\tau_0^A(z, t) = \tau, u_0^A(z, t) = 0$ 。

从第二阶方程和边界条件可以得到 $v_1^A(z, t) = -u_1^A(a, t), w_1^A(z, t) = -(c^-)^2 \tau_1^A(a, t)$, 所以有

$$\begin{cases} \lambda^2 \partial_z \tau_1^A = u_1^A(a, t) - u_1^A, \partial_z \tau_1^A(0, t) = 0, \tau_1^A(+\infty, t) = \tau_1^A(a, t), \\ \lambda^2 \partial_z u_1^A = (c^-)^2 [\tau_1^A(a, t) - \tau_1^A], u_1^A(0, t) = 0, u_1^A(+\infty, t) = u_1^A(a, t) \end{cases} \quad (9)$$

用在 $x = 0$ 处的边界条件, 从方程(9)的第一式我们得到一个兼容性条件, $u_1^A(a, t) = 0$ 。我们说它是(6)式的一个边界条件。相平面分析同样可以证明方程(9)的解只能是 $(\tau_1^A(z, t), v_1^A(z, t), u_1^A(z, t), w_1^A(z, t)) = (\tau_1^A(a, t), 0, 0, -(c^-)^2 \tau_1^A(a, t))$ 。

同样地, 我们得到(7)式的边界条件 $u_1^+(b, t) = 0$ 。

2.3 交界面区

对于交界面区我们类似地处理。从其首阶方程可以得到 $s_0(t) = 0$ 。于是 $s_0(t) = s_0(0) = 0, v_0^I(z, t) = 0, w_0^I(z, t) = p(\tau) = p(\tau^+)$, 以及

$$\begin{cases} \lambda^2 \partial_z \tau_0^I = -u_0^I, \tau_0^I(\pm\infty, t) = \tau^\pm, \\ \lambda^2 \partial_z u_0^I = p(\tau_0^I) - p(\tau), u_0^I(\pm\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

对于 $s_0(t) = 0$, 我们可以固定原点处比体积为 $\tau_0^I(0, t) = \tau^0$, 这里 $\tau^0 \in (\tau_1, \tau_2)$ 且满足 $p(\tau^0) = p(\tau) = p(\tau^+)$ 。因此我们有 $\tau_0^I(z, t) = U(z), v_0^I(z, t) = 0, u_0^I(z, t) = -\lambda^2 U_z, w_0^I(z, t) = p(\tau) = p(\tau^+)$ 。这里 $U(z)$ 是静态的波形, 它满足

$$\lambda^4 \partial_z^2 U + p(U) = p(\tau^0), U(\pm\infty) = \tau^\pm, U(0) = \tau^0 \quad (11)$$

从一阶方程组和边界条件, 我们可以得到

$$\begin{cases} v_1' = \mathfrak{A}(\tau_0 - \tau) - u_1^-(s_0, t), \\ w_1' = \mathfrak{A}u_0' - (c^-)^2 \tau_1(s_0, t); \\ \lambda^2 \partial_z \tau_0' = -u_1' - \mathfrak{A}(\tau_0 - \tau) + u_1^-(s_0, t), \\ \lambda^2 \partial_z u_1' = p'(\tau_0) \tau_1' - \mathfrak{A}u_0' + (c^-)^2 \tau_1(s_0, t). \end{cases}$$

消去 u_1' 得

$$\lambda^4 \partial_z^2 \tau_1' + p'(\tau_0) \tau_1' = -2\lambda^2 \partial_z U \mathfrak{A} - (c^-)^2 \tau_1(s_0, t). \quad (12)$$

在(12)式两端乘上 $\partial_z U$ 然后在 \mathbf{R} 上积分得到

$$\begin{cases} \mathfrak{A} = -\frac{(c^-)^2 \tau_1(s_0, t) \sigma}{(\tau^+ - \tau^-)}, \text{ 这里 } \sigma = \frac{(\tau^+ - \tau^-)^2}{2\lambda^2 \int_{\mathbf{R}} (\partial_z U)^2 dz} = \frac{(\tau^+ - \tau^-)^2}{2 \int_{\tau^-}^{\tau^+} \sqrt{2Q(s)} ds}, \\ Q(u) = \int_{\tau^-}^u [p(\tau) - p(s)] ds. \end{cases} \quad (13)$$

最后我们可以得到相区域展式的两个边界条件:

$$u_1^+(s_0, t) - u_1^-(s_0, t) = \sigma (c^-)^2 \tau_1(s_0, t) = \sigma (c^+)^2 \tau_1(s_0, t). \quad (14)$$

(14) 式以及 $u_1^-(a, t) = 0$ 和 $u_1^+(b, t) = 0$, 给出了相区域展式方程(6)和(7)足够的边界条件.

3 一阶展式的解

我们知道首阶方程的解恰好是液气共存平衡态, 我们现在考虑以下一阶扰动方程的解

$$\begin{cases} \partial_t \tau_1 - \partial_x u_1^- = 0, \quad \partial_t \tau_1 - \partial_x u_1^+ = 0, \\ \partial_x u_1^- - (c^-)^2 \partial_x \tau_1 = 0, \quad \partial_x u_1^+ - (c^+)^2 \partial_x \tau_1 = 0, \\ u_1^-(a, t) = u_1^+(b, t) = 0, \\ u_1^+(s_0, t) - u_1^-(s_0, t) = \sigma (c^-)^2 \tau_1(s_0, t) = \sigma (c^+)^2 \tau_1(s_0, t). \end{cases} \quad (15)$$

为了进一步了解扰动的发展, 把解展成 Fourier 模式 $\tau_1 = e^{\lambda \phi(x, \lambda)}$, $u_1 = e^{\lambda \psi(x, \lambda)}$. 这里 ϕ 和 ψ 一般来说在 $x = s_0(t) = 0$ 是不连续的, 然后我们解关于 ϕ 和 ψ 的特征值问题

$$\begin{cases} \lambda \phi - \phi' = 0, \quad \lambda \phi - (c^\pm)^2 \phi = 0, \\ \phi(a) = \phi(b) = 0, \quad \phi(s_0^+) - \phi(s_0^-) = \sigma (c^\pm)^2 \phi(s_0^\pm). \end{cases} \quad (16)$$

令 $T^+ = (b - s_0)/c^+$, $T^- = (s_0 - a)/c^-$ 分别为以音速在各自的相里从交界面 $x = s_0$ 传到各自的边界 $x = a$, $x = b$ 所需的时间. 方程(16)的通解可以写为

$$\begin{cases} \phi(x, \lambda) = \begin{cases} c^- A^- \sinh[\lambda(x - a)/c^-], & \text{若 } x \in [a, s_0], \\ c^+ A^+ \sinh[\lambda(x - b)/c^+], & \text{若 } x \in (s_0, b], \end{cases} \\ \psi(x, \lambda) = \begin{cases} A^- \cosh[\lambda(x - a)/c^-], & \text{若 } x \in [a, s_0], \\ A^+ \cosh[\lambda(x - b)/c^+], & \text{若 } x \in (s_0, b], \end{cases} \end{cases}$$

这里 A^\pm 是常数并且满足

$$\begin{aligned} \sigma (c^+)^2 A^+ \cosh(\lambda T^+) &= \sigma (c^-)^2 A^- \cosh(\lambda T^-) = \\ &= c^- A^- \sinh(\lambda T^-) - c^+ A^+ \sinh(\lambda T^+). \end{aligned}$$

既然 (ϕ, ψ) 是方程(16)非奇异的解, 我们要求 $|A^+| + |A^-| > 0$. 进一步分析我们发现, 所有

的特征值都有负的实部。然而,值得注意的是当 T^+ / T^- 为无理数,这些特征值的实部没有负的上界,说明耗散可以是任意小的。

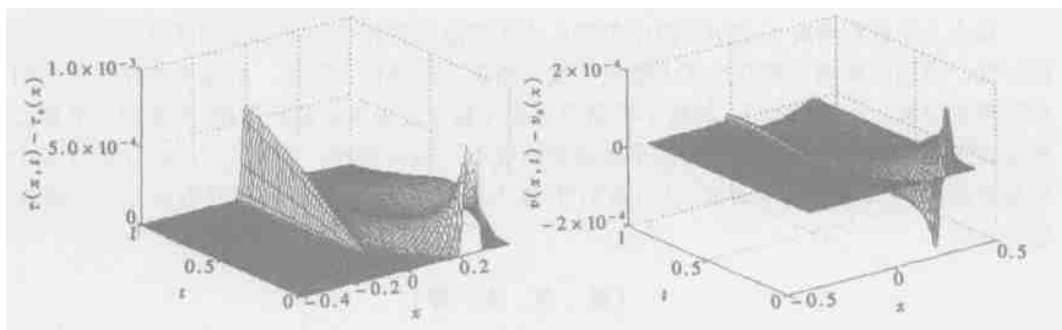
4 数值结果

我们取 $p(\tau) = 2.4/(\tau - 1/3) - 3/\tau^2$ 。下面的每一个例子,我们都在稳定解 (u_s) 上加一个扰动,然后计算它的演化过程。

例1 令 $[a, b] = [-0.4, 0.4]$, 取 $\varepsilon = 10^{-3}$ 和 $\lambda = 3.0$ 。对于一个稳定状态 (u_s), 我们用下述初值来计算演化过程

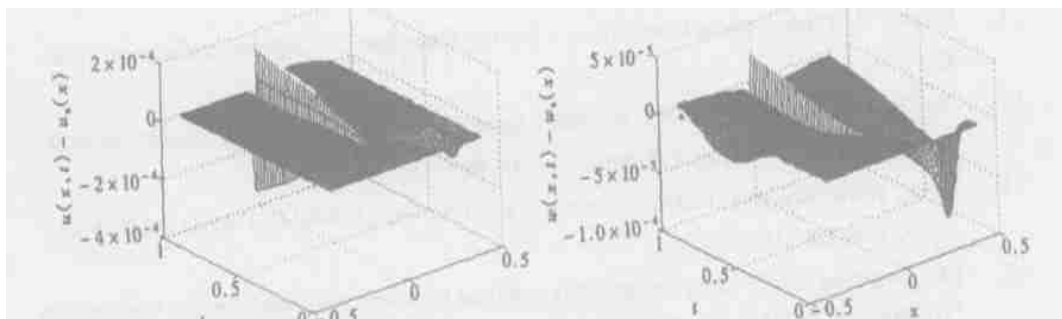
$$\begin{cases} \tau(x, 0) = \tau_s(x) + \varepsilon \sin^2[10\pi(x - 0.2)], \\ v(x, 0) = v_s(x), u(x, 0) = u_s(x), w(x, 0) = w_s(x). \end{cases} \quad (17)$$

通过数值计算我们看到扰动在各自的相中以各自的波速传播,当扰动到达边界,它会被反射然后往回传播。当扰动到达交界面,就会被反射,但同时也会被折射。有部分能量进入另一个相。图1中我们给出这个演化的短时行为。



(a) $\tau(x, t) - \tau_s(x) (t \in [0, 1])$

(b) $v(x, t) - v_s(x) (t \in [0, 1])$



(c) $u(x, t) - u_s(x) (t \in [0, 1])$

(d) $w(x, t) - w_s(x) (t \in [0, 1])$

图1 例1中解的演化的短时行为

在图2中我们画出了 $|\tau(-0.2, t) - \tau_f(-0.2)|$ 来显示演化的长时行为 ($\tau_f(x)$ 是 $\tau(x, t)$ 的渐近状态), 我们看到系统不断趋向于麦克斯韦态。

例2 我们令 $[a, b] = [-0.472, 0.328]$, $\varepsilon = 10^{-3}$ 和 $\lambda = 3.0$ 。也用初值(17), 定性地看, 我们得到和例1一样的演化结果。然而和例1对比 $|\tau(-0.2, t) - \tau_f(-0.2)|$, 我们观察到在这两个例子里系统以不同的速率趋向平衡态。这部分地表明了 T^+ / T^- 的影响。见图3。

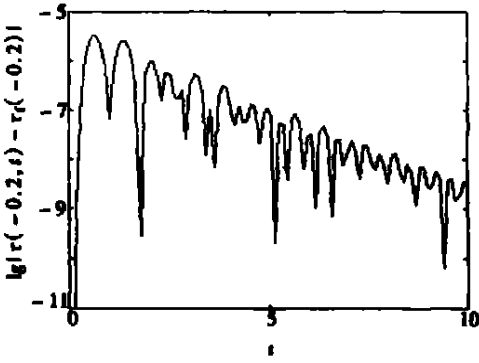


图2 例1解的演化的长时行为

$$\lg |\tau(-0.2, t) - \tau(-0.2)| \quad (t \in [0, 10])$$

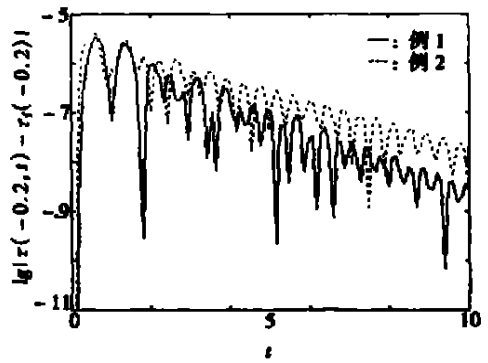


图3 例1和例2中的收敛速度对比

$$\lg |\tau(-0.2, t) - \tau(-0.2)| \quad (t \in [0, 10])$$

5 结 论

在本文中我们研究了密闭管道中范德瓦流体等温液气相变松弛模型的液气共存平衡态的稳定性。应用匹配渐近展开形式上推出了扰动所满足的线性方程组。对这个线性系统我们进行了理论分析。一般情况下, 初始小扰动的动能在相变过程中会被耗散掉, 系统趋于平衡态。然而, 在无穷多个例外情形下, 初始小扰动的动能不会被耗散掉。实际上, 系统有无穷多个线性独立的时间周期解。本研究表明, 跟粘性_张力模型一样, 松弛模型也具有稳定相变系统的能力。

[参 考 文 献]

- [1] HSIEH Din_yu, WANG Xiao_ping. Phase transition in Van der Waals fluid[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1997, 57(4): 871—892.
- [2] Slemrod M. Dynamic phase transitions in a Van der Waals fluid[J]. Differential Equations, 1984, 52: 1—23.
- [3] Zumbrun K. Dynamical stability of phase transitions in the p_system with viscosity_capillarity [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, 60(6): 1913—1924.
- [4] Fife P, WANG Xiao_ping. Periodic structures in a Van der Waals system[J]. Pro Roy Soc Edinburgh Sect A, 1998, 128: 235—250.
- [5] HE Chang_hong, WANG Xiao_ping. Symmetric solutions for a two dimensional Van der Waals system [D]. Mphil Thesis. Math Dept HKUST, 1998.
- [6] FAN Hai_tao. Traveling waves, Riemann problems and computations of the dynamics of liquid/ vapor phase transitions[J]. Differential Equations, 1998, 150: 385—437.
- [7] CHEN Xin_fu, WANG Xiao_ping. Phase transition near a liquid_gas coexistence equilibrium[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, 61(2): 454—471.
- [8] JIN Sin, XING Zhou_ping. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1995, 48(3): 1—43.
- [9] Natalini R, TANG Shao_qiang. Discrete kinetic models for dynamical phase transitions[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2000, 7(2): 1—32.
- [10] TANG Shao_qiang, ZHAO Hui_jiang. Stability of solid model for phase transitions[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2004, 3(4): 545—556.

- [11] TANG Shao_qiang. Patterns in 2_D dynamic phase transitions[A]. In: CHIEN Wei_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 820—823.
- [12] HSIEH Ding_yu, TANG Shao_qiang, WANG Xiao_ping. On hydrodynamic instabilities, chaos and phase transition[J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, 12(1): 1—14.

Liquid_Gas Coexistence Equilibrium in a Relaxation Model

WANG Ping¹, TANG Shao_qiang²

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P. R. China;

2. LTCS, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: Stability of liquid-gas coexistence equilibrium in a relaxation model for isothermal phase transition in a sealed one-dimensional tube was discussed. With matched asymptotic expansion, a linear system for first order perturbations was derived formally. By solving this system analytically, it is shown that small initial perturbations are damped out in general; yet they may maintain at certain level for special cases. Numerical evidence is presented. This manifests the regularization effects of relaxation.

Key words: phase transition; relaxation; matched asymptotic expansion