

文章编号: 1000-0887(2005) 06-0683-11

# 滩海地区运移聚集的精细 数值模拟和分析

袁益让<sup>1</sup>, 杜 宁<sup>1</sup>, 韩玉笈<sup>2</sup>

(1. 山东大学 数学研究所, 济南 250100;

2. 胜利石油管理局 物探研究院, 山东 东营 257022)

(戴世强推荐)

**摘要:** 对滩海地区三层油资源运移聚集进行高精度精细平行数值模拟, 提出数学模型和精细平行算子分裂隐式迭代格式, 设计了并行计算程序, 提出了并行计算的信息传递和交替方向网格剖分方法. 并对不同的 CPU 组合进行并行计算和分析, 对滩海地区数值模拟结果和实际情况吻合. 对模型问题进行数值分析, 得到最佳阶误差估计, 成功地解决了这一困难问题

**关键词:** 运移和聚集; 滩海地区; 精细数值模拟; 平行程序; 数值分析

**中图分类号:** O241.82 **文献标识码:** A

## 引 言

沉积盆地中油的生成、排烃、运移、聚集和最后形成油藏是研究油气勘探中的核心问题之一。油是如何运移并聚集到现今的圈闭中, 油在盆地中是如何分布的, 这是油资源二次运移聚集过程数值模拟所研究的中心内容<sup>[1~4]</sup>。随着油田勘探不断深入, 人们已经着眼于寻找隐蔽性和土豆块的圈闭, 这就要求盆地模拟向精细方向发展。传统的利用串行计算机来研究盆地模拟, 尤其是二次运移聚集已经是难以解决这个问题。

油资源运移聚集史的数学模型, 具有很强的双曲特性, 且需长达数百万年乃至数千万年稳定、可靠、高精度的模拟, 其数值方法在数学上和渗流力学上都是十分困难的<sup>[4~8]</sup>。到目前为止仅对二维剖面问题国内外有一些初步的数值结果<sup>[4,5]</sup>。

本文对滩海地区三层问题的油资源运移聚集进行高精度精细平行数值模拟, 提出数学模型、精细平行修正算子分裂迭代格式、并行计算程序设计、并行计算的信息传递、交替方向网格剖分方法。我们应用胜利油田现有的 32 个 CPU 组成的, 基于 TurboLinux 操作系统的、高性能的微机集群和 MPI 信息传递编程系统, 实现了油资源二次运移定量模拟技术的并行化计算。我们还对不同 CPU 组合进行并行计算和分析, 得到的结果和实际情况相吻合, 成功实现了数

收稿日期: 2003\_02\_15; 修订日期: 2005\_02\_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372052; 10271066); 国家重点基础研究发展规划资助项目(G1999032803); 教育部博士点基金资助项目(20030422047)

作者简介: 袁益让(1935), 男, 汉, 江苏靖江人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86\_531\_8364732; Fax: + 86\_531\_8564652; Email: yryuan@sdu.edu.cn)

值模拟尺寸从千米级降至百米级的高精度数值模拟 对模型问题的计算格式进行理论分析, 得到最佳阶  $l^2$  误差估计, 成功地解决了这一计算石油地质、渗流力学的困难问题<sup>[6-10]</sup> 它对油资源的精细评估、油藏位置的确定, 寻找新的油田, 均具有重要的理论和实用价值

## 1 数学模型和数值方法

在三层运移聚集数值模拟时, 当第 1、3、5 层近似地认为水平流动, 它们中间层(弱渗透层)仅有垂直流动, 经过严谨的模型分析和科学的数学试验, 提出三层问题的数学模型是下述非线性偏微分方程组的初边值问题<sup>[6, 11, 12]</sup>

(第 1 层)

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} K_1 \frac{k_{ro}}{o} & \\ & o \end{array} \right] + B_o q - \left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_1} = \\ & - s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \\ & \mathbf{x} = (x, y)^T, \quad 1, \quad t \quad J = (0, T], \quad (1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} K_1 \frac{k_{rw}}{w} & \\ & w \end{array} \right] + B_w q - \left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{rw}}{w} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_1} = \\ & s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} \quad 1, \quad t \quad J; \quad (1b) \end{aligned}$$

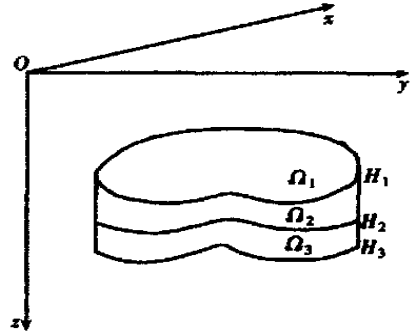


图 1 三层问题示意图

(第 2 层)

$$-\frac{\left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]}{z} = - s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad 2, \quad t \quad J, \quad (2a)$$

$$-\frac{\left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{rw}}{w} & - \\ & z \end{array} \right]}{z} = s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} \quad 2, \quad t \quad J; \quad (2b)$$

(第 3 层)

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} K_3 \frac{k_{ro}}{o} & \\ & o \end{array} \right] + B_o q + \left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_2} - \left[ \begin{array}{cc} K_4 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_2} = \\ & - s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} = (x, y)^T, \quad 1, \quad t \quad J, \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cc} K_3 \frac{k_{rw}}{w} & \\ & w \end{array} \right] + B_w q + \left[ \begin{array}{cc} K_2 \frac{k_{rw}}{w} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_2} - \left[ \begin{array}{cc} K_4 \frac{k_{rw}}{w} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_2} = \\ & s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} \quad 1, \quad t \quad J; \quad (3b) \end{aligned}$$

(第 4 层)

$$-\frac{\left[ \begin{array}{cc} K_4 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]}{z} = - s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} = (x, y, z)^T, \quad 3, \quad t \quad J, \quad (4a)$$

$$-\frac{\left[ \begin{array}{cc} K_4 \frac{k_{rw}}{w} & - \\ & z \end{array} \right]}{z} = s \left[ \begin{array}{cc} - & \\ t & - \\ & t \end{array} \right], \quad \mathbf{x} \quad 3, \quad t \quad J; \quad (4b)$$

(第 5 层)

$$\left[ \begin{array}{cc} K_5 \frac{k_{ro}}{o} & \\ & o \end{array} \right] + B_o q + \left[ \begin{array}{cc} K_4 \frac{k_{ro}}{o} & - \\ & z \end{array} \right]_{z=H_3} =$$

$$-s \left[ \frac{o}{t} - \frac{w}{t} \right], \quad \mathbf{x} = (x, y)^T \quad 1, t \quad J, \quad (5a)$$

$$\begin{pmatrix} K_5 \frac{k_{rw}}{w} \\ w \end{pmatrix} + B_w q + \begin{pmatrix} K_4 \frac{k_{rw}}{w} \\ z \end{pmatrix}_{z=H_3} = s \left[ \frac{o}{t} - \frac{w}{t} \right], \quad \mathbf{x} \quad 1, t \quad J; \quad (5b)$$

此处  $o$ 、 $w$  分别为油、水位势, 是需要寻求的基本未知函数;  $K_i (i = 1, \dots, 5)$  为相应层的地层渗透率;  $o$ 、 $w$  分别为油相、水相粘度;  $k_{ro}$ 、 $k_{rw}$  分别为油相、水相的相对渗透率;  $s = ds/dp_c$ ,  $s$  为含水饱和度,  $p_c(s)$  为毛管力函数;  $B_o$ 、 $B_w$  为流动系数,

$$B_o = \frac{k_{ro}}{o} \left[ \frac{k_{ro}}{o} + \frac{k_{rw}}{w} \right]^{-1}, \quad B_w = \frac{k_{rw}}{w} \left[ \frac{k_{ro}}{o} + \frac{k_{rw}}{w} \right]^{-1};$$

$q(x, t)$  为源(汇函数), 按渗流力学的达西定律,

$$-K \frac{k_{ro}}{o} \frac{o}{z} = q_{h,o}, \quad -K \frac{k_{rw}}{w} \frac{w}{z} = q_{h,w};$$

此外还必须给出初始和边界条件

由于一般运载层的实际厚度比水平方向模拟区域尺寸小得多, 我们对第 1、3、5 层, 分别按二维问题求解, 我们提出新的修正算子分裂隐式迭代格式:

在  $x$  方向:

$$x(A_{x_o} x_o^*) + y(A_{y_w} y_o^{(l)}) + G_w^* - G_o^* = H_{l+1}(A_o)(o^* - o^{(l)}) - B_o^m q^{m+1} + G_w^m - G_o^m, \quad (6a)$$

$$x(A_{x_w} x_w^*) + y(A_{y_w} y_w^{(l)}) - G_w^* + G_o^* = H_{l+1}(A_w)(w^* - w^{(l)}) - B_w^m q^{m+1} - G_w^m + G_o^m; \quad (6b)$$

在  $y$  方向:

$$x(A_{x_o} x_o^*) + y(A_{y_o} y_o^{(l+1)}) + G_w^{(l+1)} - G_o^{(l+1)} = H_{l+1}(A_o)(o^{(l+1)} - o^*) - B_o^m q^{m+1} + G_w^m - G_o^m, \quad (7a)$$

$$x(A_{x_w} x_w^*) + y(A_{y_w} y_w^{(l+1)}) - G_w^{(l+1)} + G_o^{(l+1)} = H_{l+1}(A_w)(w^{(l+1)} - w^*) - B_w^m q^{m+1} + G_w^m + G_o^m; \quad (7b)$$

式中

$$x(A_{x_o} x_o) = A_{x, i+1/2, j}(o_{i+1, j} - o_{ij}) - A_{x, i-1/2, j}(o_{ij} - o_{i-1, j}),$$

$$A_{x, i+1/2, j} = \left[ K \frac{k_r}{x} \frac{y}{x} \right]_{i+1/2, j},$$

系数按偏上游原则取值,  $G = -V_p s/t$ ,  $V_p = x y H_{l+1}$  为迭代因子,  $A_w = (A_{w, i+1/2, j} + A_{w, i-1/2, j} + A_{w, ij})$ ,  $A_o =$

对于第 2、4 层(弱渗透层)由于其厚度  $H_2 - H_1, H_3 - H_2$  很小, 因此可用达西定理代替, 用它将第 1 与第 3 层, 第 3 与第 5 层耦合起来, 代替原来的微分方程(2)、(4) 也就是此时注意

$$- \left[ K \frac{k_{ro}}{o} \frac{o}{z} \right]_{z=H_i}, \quad - \left[ K \frac{k_{rw}}{w} \frac{w}{z} \right]_{z=H_i}$$

分别为油相、水相的达西速度,由于  $H_2 - H_1, H_3 - H_2$  很小,因此可用差分公式代替

$$\left\{ \begin{aligned} & -K \frac{k_{ro}}{o} \frac{o}{z} - \frac{1}{2} \left\{ K_1 \left( \frac{k_{ro}}{o} \right)_1 + K_2 \left( \frac{k_{ro}}{o} \right)_2 \right\} \frac{o, 2 - o, 1}{z}, \\ & z = H_2 - H_1, \end{aligned} \right. \quad (8a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -K \frac{k_{rw}}{w} \frac{w}{z} - \frac{1}{2} \left\{ K_1 \left( \frac{k_{rw}}{w} \right)_1 + K_2 \left( \frac{k_{rw}}{w} \right)_2 \right\} \frac{w, 2 - w, 1}{z}, \\ & z = H_2 - H_1 \end{aligned} \right. \quad (8b)$$

这样用式(8)代替第2层方程(2)将第1、3层耦合起来,同理用达西公式将第3、5层耦合起来对  $s$  的第  $(l+1)$  次将迭代由下述公式计算:

$$s^{(l+1)} = \frac{1}{\left[ \frac{s^{(l)} - s^m}{p^c - p^c} \right]} + (1 - \alpha) s^{(l)}, \quad (9)$$

此处  $l$  是迭代次数,  $0 < \alpha < 1$  是平滑因子

若能求出  $t^{m+1}$  时刻的  $\frac{m+1}{o}, \frac{m+1}{w}$ , 则饱和度按下述公式计算:

$$S^{m+1} = S^m + s \left( \frac{m+1}{o} - \frac{m}{o} - \frac{m+1}{w} + \frac{m}{w} \right) \quad (10)$$

## 2 并行算法与并程序序设计

我们考虑到交替方向算法具有本性的并行计算特性,提出交替方法一维条分解算法,并在程序设计中实现,获得比较理想的结果 下面详细叙述按条形区域分解的并行算法

分析方程(6),假定第  $l$  次迭代已经完成 此时  $\frac{(l)}{w}, \frac{(l)}{o}$  是已知的 在  $x$  方向的每条线上,方程(6)组成二阶块三角方程组,待求的未知函数为  $\frac{*}{w}, \frac{*}{o}$ , 可以用二阶块追赶法隐式求解 各条线相互之间都是完全独立的,可以并行处理

例如,若有 50 条线,每条线分配一个处理器,则有 50 个处理器一起进行并行计算 目前,我们还没有那么多处理器,假设使用 5 个处理器,则我们把求解区域分为 5 条,每 10 条线为一组分配一个处理器 方程(6)处理完,再转向沿  $y$  方向计算

方程(7) 这时待求的未知函数为  $\frac{(l+1)}{w}, \frac{(l+1)}{o}$  而  $\frac{*}{w}, \frac{*}{o}$  是已知的,但是,它们分别存在沿着  $x$  方向,横条形区域的各个处理器的内存中 现在,要沿  $y$  方向竖条各个处理器中计算  $\frac{(l+1)}{w}, \frac{(l+1)}{o}$ , 就要把  $\frac{*}{w}, \frac{*}{o}$  在有关的处理器间进行传送 如图 2 所示

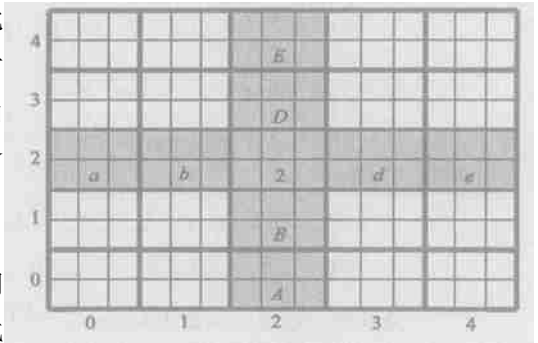


图 2 条形区域分解算法

我们把区域分为 5 块,对应 0、1、2、3、4 处理器 例如 2 号处理器对应图中央部分 在  $x$  方向计算完以后,就要把  $a$  区域送到 0 号处理器# 把  $b$  区域送到 1 号处理器,把  $d$  区域送到 3 号处理器,把  $e$  区域送到 4 号处理器# 同时,从 0 号处理器把  $A$  区域接收过来,从 1 号处理器把  $B$  区域接收过来,从 3 号处理器把  $D$  区域接收过来,从 4 号处理器把  $E$  区域接收过来# 这样,各个处理器的  $W^*, W^*$  准备好了,就可以对方程(7) 进行求解# 当然,  $y$  方向求解完毕,又要进行处理器信息交换,为下一次  $x$  方向计算做好准备,这样就完成了一次迭代#

还有当迭代收敛以后,层内计算结果如何拼装,层间断层或通道的垂向窜流量如何计算等

也都与通信有关,均需进行处理#

油资源二次运移定量数值模拟的核心是求解大型二阶的偏微分方程组(1)~(5)# 它包括求解每个层的油相势和水相势所满足的微分方程和沿着断层或不整合面等通道垂向窜流量的微分方程# 从软件系统体系结构来看,其核心部分是一个三重循环的结构(见图3)# 第1层循环是盆地发育各地质时期循环# 例如按时间顺序划分,下第三系的沙河街组、东营组、沉积间断,上第三系的馆陶组、明化镇组以及第四系的平原组# 第2层循环是在一个地质时期内时间步长的循环# 由于我们计算格式的强稳定性,一般时间步取1 000 a或500 a# 第3层循环是迭代循环# 每个节点进行并行追赶法求解计算,对差分方程组使用交替方向隐式迭代格式法求解,当计算满足误差要求时,进行层内拼装和断层、通道垂向窜流量计算,再转入下一个时间步计算# 当计算机不满足误差要求时,要重新进行迭带计算,误差满足以后,进行层内拼装和断层、通道垂向窜流量计算,再转入下一个时间步计算#

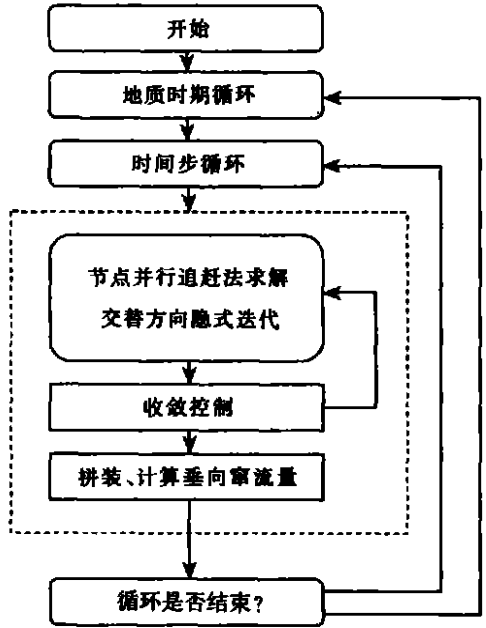


图3 系统核心部分循环结构图

### 3 并行计算效果分析

我们采用胜利油田滩海地区的实际地质参数,滩海地区的工区范围为(20 611 700 m, 4 199 000 m)、(2 071 700 m, 4 253 000 m),盆地面积为8 845.2 km<sup>2</sup>,模拟包括沙三下段、沙三中段、沙三上段3个层位# 从滩海地区构造单元划分图看,自西北向东南依次有呈子口\_庆云凸起、义和庄\_无棣宁津凸起、陈家庄\_滨县凸起,青坨子\_垦东凸起# 其间平着呈北凹陷、黄河口凹陷、渤南洼陷和孤南洼陷等生油洼陷#

模拟计算采用两个实例:

**例1**  $x$  方向网格步长1 620 m,分为65个网格#  $y$  方向网格步长1 680 m,分为50个网格# 平面上每层有网格数为3 250个#

**例2** 对例1进行网格加密,由原来1个网格细分为4个网格#  $x$  方向130个网格,网格步长810 m#  $y$  方向100个网格,网格步长840 m,1层拥有13 000个网格,3层拥有39 000个网格#

计算从东营组时期开始模拟,经过上、下第三系的沉积间断,再经过馆陶组、明化镇组,最后到现今的第四系,总共经历3 000万年的地质时间#

表1 不同CPU组合的运行时间表

CPU 数	1	3	6	9	12	18	24	30
时间 $t$ /min	661	367	288	304	328	376	431	498
$S_p$ 加速比	1.00	1.80	2.30	2.17	2.02	1.76	1.53	1.33

表1 显示例 1 从沉积间断开始到现今总共经历了 2 600 万年,我们使用不同 CPU 组合进行并行计算,列出了计算机运行时间与 CPU 组合之间的关系#

由表 1 中可以看出,使用 6 个处理器计算时间最少# 加速比( $S_p = T/T_p$ ,  $T_1$  是串行计算时间、 $T_p$  是并行计算时间)最大(2.30),而 3 个处理器和 18 个处理器机时持平,以后计算时间随着处理器个数的增加呈单调上升趋势# 其原因是:虽然并行计算可以提高计算速度,但随着处理器个数的增加,节点之间所需传输信息而消耗的时间也增加#

例 2 把例 1 的计算网格数增加 4 倍,模拟的地质时期为明化镇时期和第四系# 所以选择这个时期,是因为此时有大量的烃类在运移,共有 12 个百万年#

表 2 不同 CPU 组合的运行时间表

CPU 数	1	3	6	9	18	30
例 1 运行时间 $t/\text{min}$	4 168	1 572	1 139	988	926	1 234
例 2 运行时间 $t/\text{min}$	373	203	155	154	185	299
$S_p$ 加速比	1.00	2.65	3.66	4.22	4.50	3.38

计算结果有 4 点看法: 1) 计算网格数增加 4 倍,但是计算时间呈非线性增加,在 9 个处理器之前大约是 8 倍,18 个处理器以后也增加 5 倍# 2) 计算时间极小点由 6 个处理器向 18 个处理器移动,这是因为计算消耗的时间比通讯消耗的时间增长更快# 3) 串行计算对于计算网格未加密用了 6 h 13 min(373 min),加密用了 69 h 28 min(4 168 min),网格数增加 4 倍,计算时间增加约 11 倍# 由此,可以看出:网格越细,串行计算所需时间大大增加,很难完成大规模运移聚集精细模拟计算的任务# 4) 粗网格加速比较小(2.30),加密网格加速比较大(4.50)# 由此,可以看出:( ) 并行计算对于加密网格可以提高计算效率# ( ) 并行计算可以扩大计算规模,这为我们展示了大规模的运移聚集模拟进行精细模拟的可行性# 例如:数十万个节点,甚至上百万个节点,在单个处理器由于计算时间特长而难以完成的事,可在多个处理器进行并行计算来完成# 因为在大规模网格节点下,网格步长可能为 500 m、甚至到 100 m 以下# 充分利用三维地震解释成果,不漏掉一个小的圈闭,进行精细的运移聚集模拟#

实际数值模拟结果显示,多个处理器并行计算出 3 个层位(沙三上、沙三中、沙三下)现今含油饱和度分布图,其结果与串行计算相吻合,这说明并行计算程序是正确的,并行计算结果是可靠的#

## 4 模型问题的数值分析

关于在第 1 节中提出的多层油资源二次运移聚数值模拟计算格式,对简化了的模型问题,我们得到严谨的理论分析结果,使软件系统建立在坚实的数学基础上# 模型问题是要求下述对流\_扩散耦合系统的初边值问题<sup>[11~ 14]</sup>:

$$5_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a}(x, y, t) \cdot \nabla u - \nabla \cdot (K_1(x, y) \nabla u) + K_2(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=1} = Q_1(x, y, t, u), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad t \in [0, T], \quad (11a)$$

$$5_2(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( K_2(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (x, y, z) \in \Omega_2, \quad t \in [0, T], \quad (11b)$$

$$5_3(x, y) \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{b}(x, y, t) \cdot \nabla v - \nabla \cdot (K_3(x, y) \nabla v) - K_2(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} =$$

$$Q_3(x, y, t, v), \quad (x, y)^T \in \Omega_1, \quad t \in I, J, \quad (11c)$$

此处  $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$ ,  $\Omega_1 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ,  $S$  和  $S_1$  分别为  $\Omega$  和  $\Omega_1$  的边界曲面和曲线

边界条件是不渗透的, 即

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{S} = 0, \quad t \in I, J, \quad (12a)$$

$$w(x, y, z, t) \Big|_{z=1} = u(x, y, t), \quad w(x, y, z, t) \Big|_{z=0} = v(x, y, t), \quad (x, y)^T \in \Omega_1, \quad t \in I, J \text{ (内边界条件)}, \quad (12b)$$

此处  $\mathbf{C}$  是边界曲线  $S_1$  的外法向矢量,  $\mathbf{n}$  是曲面  $S$  的外法向矢量

初始条件:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y)^T \in \Omega_1, \\ w(x, y, z, 0) = w_0(x, y, z), & (x, y, z)^T \in \Omega, \\ v(x, y, 0) = v_0(x, y), & (x, y)^T \in \Omega_1 \end{cases} \quad (13)$$

在渗流力学上  $u(x, y, t)$ 、 $w(x, y, z, t)$ 、 $v(x, y, t)$  为位势函数,  $u$ 、 $v$  和  $5w/5z$  为达西速度, 均为待求的函数,  $5A$  ( $A = 1, 2, 3$ ) 为孔隙度函数,  $KA$  ( $A = 1, 2, 3$ ) 为渗透率函数,  $\mathbf{a}(x, y, t) = (a_1(x, y, t), a_2(x, y, t))^T$ ,  $\mathbf{b}(x, y, t) = (b_1(x, y, t), b_2(x, y, t))^T$  为相应的对流系数,  $Q_1(x, y, u)$ 、 $Q_2(x, y, v)$  均为产量项

记  $h = 1/N$ ,  $t^n = n\Delta t$ ,  $U(x_i, y_j, t^n) = U_{ij}^n$ ,  $V(x_i, y_j, t^n) = V_{ij}^n$ ,  $W(x_i, y_j, z_k, t^n) = W_{ijk}^n$ ,  $D_x$ 、 $D_y$ 、 $D_z$ 、 $D_x$ 、 $D_y$ 、 $D_z$  分别为  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的向前、向后差商算子,  $d_{i,j}^n$  为网格函数  $u_{ij}^n$  在  $t$  方向的向前差商

特征分数步长差分格式对方程(11a)是:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1,j} \frac{U_{ij}^{n+1/2} - U_{ij}^n}{\Delta t} &= D_x(K_{1D_x} U^{n+1/2})_{ij} + D_y(K_{1D_y} U^n)_{ij} - K_{2,j,N-1/2}^n W_{ij,N}^{n+1/2} + \\ &Q(x_i, y_j, t^n, U_{ij}^n), \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\mathcal{S}_{1,j} \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} = D_y(K_{1D_y} (U^{n+1} - U^n))_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (14b)$$

此处  $\mathcal{S}_1(x, y, h) = \mathcal{S}_1(x, y) + 0.5h\mathcal{S}_2(x, y, 1)$ ,  $U^n(X)$  是按节点值  $\{U_{ij}^n\}$  的分片双二次插值函数,  $U_{ij}^n = U^n(X_{1,ij})$ ,  $X_{1,ij} = X_{ij} - \mathbf{a}_{ij}^{n+1} \Delta t / \mathcal{S}_{1,ij}$

对方程(11b)的差分格式是:

$$\mathcal{S}_{2,ijk} \frac{W_{ijk}^{n+1} - W_{ijk}^n}{\Delta t} = D_z(K_{2D_z} W^{n+1})_{ijk}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (15)$$

对方程(11c)的特征分数步差分格式:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3,j} \frac{V_{ij}^{n+1/2} - V_{ij}^n}{\Delta t} &= D_x(K_{3D_x} V^{n+1/2})_{ij} + D_y(K_{3D_y} V^n)_{ij} + K_{2,j,1/2}^n W_{ij,0}^{n+1/2} + \\ &Q(x_i, y_j, t^n, V_{ij}^n), \quad 1 \leq i \leq N, \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\mathcal{S}_{3,j} \frac{V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^{n+1/2}}{\Delta t} = D_y(K_{3D_y} (V^{n+1} - V^n))_{ij}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (16b)$$

此处  $\mathcal{S}_3(x, y, h) = \mathcal{S}_2(x, y) + 0.5h\mathcal{S}_2(x, y, 0)$ ,  $V^n(X)$  是按节点值  $\{V_{ij}^n\}$  的分片双二次插值函

数,  $V_{ij}^n = V^n(X_{2,j}), X_{2,j} = X_j - b_{ij}^{n+1} s t / 5_{3,j} \#$

差分格式(14)、(15)、(16)的计算程序是:若已知  $t = t^n$  时刻的差分解  $\{U_{ij}^n, W_{ijk}^n, V_{ij}^n\}$ , 需要寻求下一时刻  $t = t^{n+1}$  的差分解  $\{U_{ij}^{n+1}, W_{ijk}^{n+1}, V_{ij}^{n+1}\} \#$  首先由(14a)用追赶法求出过渡层的解  $\{U_{ij}^{n+1/2}\}$ , 再由(14b)求出  $U_{ij}^{n+1} \#$  与此同时可并行计算由(16a)用追赶法求出过渡层的解  $\{V_{ij}^{n+1/2}\}$ , 再由(16b)求出  $V_{ij}^{n+1} \#$  最后利用内边界条件(12b)由(15)求出  $\{W_{ijk}^{n+1}\} \#$  由于问题是正定的, 此差分解存在且唯一#

下面讨论收敛性分析, 设  $u, v, w$  为问题(11)的精确解,  $U, W, V$  为特征修正分数步差分格式(14)、(15)、(16)的解, 设误差函数  $N = u - U, F = v - V, X = w - W \#$  首先研究第1层, 对方程(14a)、(14b)消去  $U^{n+1/2}$  可得下述等价的差分方程:

$$5_{1,j} \frac{U_{ij}^{n+1} - U_{ij}^n}{s t} - h(K_{1-h} U^{n+1})_{ij} = -K_{2,ij,N-1/2} D_z W_{ij,N}^{n+1} + Q_1(X_{ij}, t^n, U_{ij}^n) - (\$t)^2 D_x(K_{1D_x}(\mathcal{T}^{-1} D_y(K_{1D_y} d_t U^n)))_{ij}, \quad 1 [ i, j [ N, \tag{17}$$

此处

$$h(K_{1-h} U^{n+1})_{ij} = D_x(K_{1D_x} U^{n+1})_{ij} + D_y(K_{1D_y} U^{n+1})_{ij} \#$$

若问题(11)~(13)的精确解  $u, v, w$  是正则的, 对方程(11a) ( $t = t^{n+1}$ ) 和差分格式(17)可得:

$$5_{1,j} \frac{N_{ij}^{n+1} - (u^n(X_{1,ij}) - U_{ij}^n)}{\$t} - h(K_{1-h} N^{n+1})_{ij} = -K_{2,ij,N-1/2} D_z W_{ij,N}^{n+1} + Q_1(x_{ij}, t^{n+1}, U_{ij}^{n+1}) - Q_1(x_{ij}, t^n, U_{ij}^n) - (\$t)^2 D_x(K_{1D_x}(\mathcal{T}_1^{-1} D_y(K_{1D_y} d_t N^n)))_{ij} + E_{1,j}^{\dagger}, \quad 1 [ i, j [ N, \tag{18}$$

此处

$$| E_{1,j}^{\dagger} | [ M \{ h^2 + \$t \} \#$$

首先分析对应于第1层的误差函数  $N_j^n$ , 注意到此时  $N^n(X)$  为节点值  $\{N_j^n\}$  的分片双二次插值函数, 可将其分解为

$$N_j^{n+1} - (u^n(X_{1,ij}) - U_{ij}^n) = (N_j^{n+1} - N_j^n) - (I - I_2) u^n(X_{1,ij}), \tag{19}$$

此处  $I$  为恒等算子,  $I_2$  为双线性插值算子# 假定时间和空间剖分参数满足限制性条件:

$$\$t = O(h^2), \tag{20}$$

对(18)可得

$$5_{1,j} \frac{N_{ij}^{n+1} - N_j^n}{s t} - h(K_{1-h} N^{n+1})_{ij} [ M \{ | N_j^n | + h^2 + \$t \} - K_{2,ij,N-1/2} D_z W_{ij,N}^{n+1} - (\$t)^2 D_x(K_{1D_x}(\mathcal{T}_1^{-1} D_y(K_{1D_y} d_t N^n)))_{ij}, \quad 1 [ i, j [ N \# \tag{21}$$

对上式乘以  $D_t N_j^n = N_j^{n+1} - N_j^n = d_t N_j^n s t$ , 作内积分部求和可得:

$$3 \ 5_1 \left[ \frac{N^{n+1} - N^n}{s t} \right], d_t N^n \ 4 \ s t + \frac{1}{2} \left\{ 3K_{1-h} N^{n+1}, \ h N^{n+1} \ 4 - 3K_{1-h} N^n, \ h N^n \ 4 \right\} [ 3 \ 5_1 \left[ \frac{N^n - N^n}{s t} \right], d_t N^n \ 4 \ s t + E | d_t N^n | \ 0_s^2 t + M \left\{ | N^n | \ 0_s^2 t + h^4 + (\$t)^2 \right\} - \sum_{i,j=1}^N K_{2,ij,N-1/2} D_z W_{ij,N}^{n+1} d_t N_j^n h^2 s t -$$



$$(\$t)^2_3 D_x(K_1 D_x(\mathcal{S}_1^{-1} D_y(K_1 D_y d_t^n))), d_t^{n+4} \leq t\# \tag{22}$$

对上式右端第 1 项经估算可得

$$\left| 3 \mathcal{S}_1 \left( \frac{N^n - N^n}{s t} \right), d_t^{n+4} \leq t \right| [ E | d_t^{n+2} |_0^2 s + M | h^n |_0^2 s t\# \tag{23}$$

现估计最后一项:

$$\begin{aligned} & - (\$t)^3_3 D_x(K_1 D_x(\mathcal{S}_1^{-1} D_y(K_1 D_y d_t^n))), d_t^{n+4} = \\ & (\$t)^3_3 K_1 D_x(\mathcal{S}_1^{-1} D_y(K_1 D_y d_t^n)), D_x d_t^{n+4} = \\ & - (\$t)^3 \left\{ 3 K_1 D_x D_y d_t^n + D K_1 \# D_y d_t^n, \mathcal{S}_1^{-1} K_1 D_x D_y d_t^n + \right. \\ & D(\mathcal{S}_1^{-1} K_1) \# D d_t^{n+4} + 3 K_1 D_y d_t^n, D_x D_x \mathcal{S}_1^{-1} \# K_1 D_x d_t^n + \\ & D_x \mathcal{S}_1^{-1} \# D_y K_1 \# D_x d_t^n + D_x \mathcal{S}_1^{-1} \# K_1 D_x D_y d_t^{n+4} \left. \right\} = \\ & - (\$t)^3_6 \sum_{i,j=1}^N \left\{ K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{ij} [ D_x D_y d_t^n ]^2 + \right. \\ & [ K_{1,i,j+1/2} D_y(\mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} K_{1,i+1/2,j}) \# D d_t^n ] + K_{1,i+1/2,j} \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} D_x K_{1,i,j+1/2} D_y d_t^n \\ & K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} D_x \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} \# D_y d_t^n ] D_x d_t^n + \\ & [ D K_{1,i,j+1/2} D_y(\mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{ij} K_{1,i+1/2,j}) + K_{1,i,j+1/2} D_y K_{1,i+1/2,j} D_x \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} + \\ & K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} D_x D_y \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} \# D d_t^n ] \left. \right\} h^2, \tag{24} \end{aligned}$$

其中  $K_{1,i+1/2,j}, K_{1,i,j+1/2}, \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j}, D K_{1,i,j+1/2}, D_y(\mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{ij} \# K_{1,i+1/2,j}),$  , 有界# 由于  $K_1, \mathcal{S}_1^{-1}$  的正定性可分离出高阶差商项  $D_x D_y d_t^n$ , 现应用 Cauchy 不等式消去与此有关的项, 可得

$$\begin{aligned} & - (\$t)^3_6 \sum_{i,j=1}^N \left\{ K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{ij} [ D_x D_y d_t^n ]^2 + \right. \\ & [ K_{1,i,j+1/2} D_y(\mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} K_{1,i+1/2,j}) \# D d_t^n ] + \\ & K_{1,i+1/2,j} \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} D_x K_{1,i,j+1/2} D_y d_t^n + \\ & K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} D_x \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} \# D_y d_t^n \left. \right\} D_x d_t^n [ \\ & M \$t \left\{ | h^{n+1} |_0^2 + | h^n |_0^2 \right\}, \tag{25a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - (\$t)^3_6 \sum_{i,j=1}^N \left\{ D_x K_{1,i,j+1/2} D_y(\mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} K_{1,i+1/2,j}) + \right. \\ & [ K_{1,i,j+1/2} D_y K_{1,i+1/2,j} D_x \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} + \\ & K_{1,i,j+1/2} K_{1,i+1/2,j} D_x D_y \mathcal{S}_1^{-1} \frac{1}{j} \left. \right\} D_x d_t^n D_y d_t^n h^2 [ \\ & M \$t \left\{ | h^{n+1} |_0^2 + | h^n |_0^2 \right\} \# \tag{25b} \end{aligned}$$

对估计式(22) 利用式(23)~ (25) 可得:

$$\begin{aligned} & | d_t^{n+2} |_0^2 + 3 K_1 h^{n+1}, h^{n+1} - 3 K_1 h^n, h^{n+4} [ \\ & M \left\{ | N^n |_0^2 + h^4 + (\$t)^2 \right\} \$t - \sum_{i,j=1}^N K_{2,ij,N-1/2} D_x W_{ij}^n, N d_t^n h^2 \leq t\# \tag{26a} \end{aligned}$$

类似的分析对第 3 层的误差函数  $F_{ij}^n$  可得

$$\begin{aligned} & | d_t^{n+2} |_0^2 + 3 K_3 h^{n+1}, h^{n+1} - 3 K_3 h^n, F^{n+4} [ \\ & M \left\{ | F^n |_0^2 + h^4 + (\$t)^2 \right\} s t + \sum_{i,j=1}^N K_{2,\bar{j},1/2} D_x W_{\bar{j},0}^n d_t^n h^2 \leq t\# \tag{26b} \end{aligned}$$

对中间层, 由方程(11b) ( $t = t^{n+1}$ ) 和差分格式(15) 可得下述误差方程:

$$2_{, \bar{y}k} \frac{X_{\bar{y}k}^{n+1} - X_{\bar{y}k}^n}{\$t} = D(K_2 D_x X^{n+1})_{\bar{y}k} + E_{2, \bar{y}k}^{n+1}, \quad 1 [ i, j, k [ N, \quad (27)$$

此处  $E_{2, \bar{y}k}^{n+1} [ M \{ h^2 + \$t \} \#$

对上式乘以  $D_x X_{\bar{y}k}^n = X_{\bar{y}k}^{n+1} - X_{\bar{y}k}^n = dt X_{\bar{y}k}^n \$t$  作内积, 并分部求和, 经估算可得:

$$+ d_t X^{n+2} \$t + D_x X^{n+1+2} + D_x X^{n+1} [ M \{ h^4 + (\$t)^2 \} + \\ \$t \sum_{i,j=1}^N \left\{ K_{2, \bar{y}, N-1/2 D_x} W_{\bar{y}, N}^{n+1} d_t N_{\bar{y}}^n - K_{2, ij, 1/2 D_x} W_{\bar{y}, 0}^{n+1} d_t i_{ij}^n \right\} h^2 \# \quad (28)$$

将(26)、(27)、(28)相加, 并对时间  $t$  求和( $0 [ n [ L$ ), 应用 Gronwall 引理可得:

$$\sum_{n=0}^L \left\{ |d_t N^n|_0^2 + |d_t F^n|_0^2 + d_t X^n + \sum_0^2 + N^{n+1} + \sum_1^2 + F^{n+1} + \sum_1^2 + D_x X^{L+1} + \sum_2 [ \right. \\ \left. M \{ h^4 + (\$t)^2 \} \# \quad (29)$$

**定理** 假定问题(11)~(13)的精确解满足光滑性条件, 采用分数步长修正特征差分格式(14)~(16)逐层计算, 若剖面参数满足限制性限制条件(20), 则下述误差估计式成立:

$$+ u - U + L^J(J, h^1) + v - V + L^J(J, h^1) + w - W + L^J(J, h^1) + \\ + d_t(u - U) + L^2(J, t^2) + d_t(v - V) + L^2(J, t^2) + d_t(w - W) + L^2(J, t^2) [ \\ M \{ h^2 + \$t \}, \quad (30)$$

此处

$$+ g + L^J(J, X) = \sup_{n \leq t} g^n + X, + g^n + L^2(J, X) = \sup_{n \leq t} \left\{ \sum_{n=0}^N \left( \frac{6}{n} + g^n + \frac{2}{X} \$t \right) \right\}^{1/2},$$

常数  $M$  依赖于  $u$ 、 $v$ 、 $w$  及其导函数

### [参 考 文 献]

- [1] Dembicki H Jr. Secondary migration of oil experiments supporting efficient movement of separate, buoyant oil phase along limited conduits[J]. AAPG Bull, 1989, 73(8): 1018) 1021.
- [2] Catalan L. An experimental study of secondary oil migration[J]. AAPG Bull, 1992, 76(5): 638) 650.
- [3] 艾伦 P A, 艾伦 J R. (盆地分析)) 原理及应用[M]. 陈全茂译. 北京: 石油工业出版社, 1995, 281) 342.
- [4] 王捷, 关德范. 油气生成运移聚集模型研究[M]. 北京: 石油工业出版社, 1999, 215) 222.
- [5] 张厚福. 油气运移研究的回顾与展望[A]. 见: 张厚福 主编. 油气运移研究论文集[C]. 东营: 石油大学出版社, 1995, 3) 6.
- [6] Ewing R E. The Mathematics of Reservoir Simulation [M]. Philadelphia: SIAM, 1983, 3) 106.
- [7] Ungerer P, Burous J, Doligez B, et al. A 2\_D model of basin petroleum by two\_phase fluid flow, application to some case studies[A]. In: Doligez Ed. Migration of Hydrocarbon in Sedimentary Basins [C]. Paris: Editions Technip, 1987, 414) 455.
- [8] Ungerer P. Fluid flow, hydrocarbon generation, and migration[J]. AAPG Bull, 1990, 74(3): 309) 335.
- [9] Walte D H, Yukler M A. Petroleum origin and accumulation in basin evolution) A quantitative model [J]. AAPG Bull, 1981, 65(8): 1387) 1396.
- [10] 查明. 断陷盆地油气二次运移与聚集[M]. 北京: 地质出版社, 1997, 93) 118.
- [11] 袁益让, 赵卫东, 程爱杰, 等. 油水运移聚集数值模拟和分析[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(4): 386) 392.

- [12] 袁益让, 赵卫东, 程爱杰, 等. 二维油资源运移聚集的模拟和分析[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(9): 933) 942.
- [13] 袁益让. 可压缩两相驱动问题的分数步长特征差分格式[J]. 中国科学, A 辑, 1998, 28(10): 893) 902.
- [14] 袁益让. 多层渗流方程组合系统的迎风分数步差分方法[J]. 中国科学, A 辑, 2001, 31(9): 791) 806.

C a r e f u l N u m e r i c a l S i m u l a t i o n a n d A n a l y s i s o f  
M i g r a t i o n \_ A c c u m u l a t i o n o f T a n h a i R e g i o n

YUAN Yi\_ran<sup>1</sup>, DU Ning<sup>1</sup>, HAN Yu\_ji<sup>2</sup>  
(1. Institute of Mathematics, Shandong University,

Jinan 250100, P. R. China;

2. Physical Exploration Institute, Shengli Petroleum Administration,  
Dongying, Shandong 257022, P. R. China)

Abstract: Numerical simulation of careful parallel arithmetic of oil resources migration\_accumulation of Tanhai Region (three\_layer) was done. Careful parallel operator splitting\_up implicit iterative scheme, parallel arithmetic program, parallel arithmetic information and alternating\_direction mesh subdivision were put forward. Parallel arithmetic and analysis of different CPU combinations were done. This numerical simulation test and the actual conditions are basically coincident. The convergence estimation of the model problem has successfully solved the difficult problem in the fields of permeation fluid mechanics, computational mathematics and petroleum geology.

Key words: migration\_accumulation; Tanhai region; careful numerical simulation; parallel arithmetic program; numerical analysis