

文章编号: 1000_0887(2005) 06_0671_06

赤潮藻类非线性动力学模型的分岔及稳定性研究^{*}

王洪礼, 冯剑丰, 沈菲, 孙景

(天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

(我刊原编委李骊推荐)

摘要: 选取两种常见赤潮藻类和一种浮游动物, 考虑生态环境的富营养化及赤潮藻类与浮游动物的相互作用, 建立了多种群赤潮藻类的非线性动力学模型。首次运用现代非线性动力学理论, 对模型的稳定性及分岔行为进行了研究。得到了发生 Hopf 分岔时的分岔参数值, 判断了极限环的稳定性, 并发现了该模型通过准周期分岔产生混沌。

关键词: 赤潮; 种群动力学; Hopf 分岔; 正规型; 稳定性; 混沌

中图分类号: P76 **文献标识码:** A

引 言

海洋中经常发生以浮游藻类或原生生物大量爆发繁殖后急剧死亡为特征的海洋赤潮现象, 特别是近 20 年来, 随着工业化程度的提高, 大量的营养物质(氮、磷、硅等)入海, 造成了生态环境的富营养化, 致使中国近海每年发生赤潮几十次, 损失数十亿元, 而且呈逐年增加的趋势。频繁发生的赤潮灾害已严重影响了沿海生态环境和经济的可持续发展, 并给沿岸的海洋产业, 如渔业、养殖业、旅游业等造成了巨大的经济损失。赤潮产生的毒素通过食物链的传递也严重威胁着人类的生命安全。

目前国内对于赤潮形成机理的研究多侧重于实验分析, 或对所建模型进行数值模拟。实验分析有待于理论支持, 而数值模拟则有其本身的缺点, 特别是对于充满非线性因素的生态系统。运用非线性动力学理论可对赤潮生态模型进行严密的分析, 可以克服一些不确定因素的影响, 进而从更本质和更深层次去揭示赤潮的发生、发展和消亡的规律, 研究结果对赤潮的预测和控制也有较大的指导作用。

1 模型基本方程的建立

一般认为, 海洋富营养化是造成赤潮爆发的基本条件^[1]。而赤潮藻类之间的作用对于阐

* 收稿日期: 2003_05_10; 修订日期: 2005_01_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472077); 天津市科技发展计划资助项目(023111811)

作者简介: 王洪礼(1945—), 女, 满族, 河北人, 教授, 博士生导师;

冯剑丰(1979—), 男, 汉族, 河南人, 博士(联系人, Tel: + 86_22_27407900; Fax: + 86_22_27408018; E_mail: fjjju@hotmail.com)。

明赤潮发生机理也有重要意义。本文选取了典型赤潮藻类——硅藻和甲藻,在海洋富营养化的条件下考虑两种藻类之间的相互作用及浮游动物的捕食,参照文献[2]建立模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z), \\ \frac{dP_2}{dt} = P_2(\varepsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z), \\ \frac{dZ}{dt} = Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2), \end{cases} \quad (1)$$

其中 P_1, P_2, Z 分别代表硅藻、甲藻及浮游动物的密度, $\varepsilon_i (i = 1, 2)$ 代表两种藻类的内禀增长率, ε_3 代表浮游动物的死亡率, $a_{ii} (i = 1, 2)$ 表示藻类密度制约系数, a_{12} 及 a_{21} 分别表示两种藻类之间的相互作用系数,二者之和($a_{12} + a_{21}$)表示藻类间的作用率, $a_{13}, a_{23}, a_{31}, a_{32}$ 则表示浮游动物与藻类之间的捕食关系。

参考 Azar 等的文献[3],本文所采用的参数表示如下:

$$\varepsilon_i = a_{ii} = 1, \quad a_{23} = \mu, \quad a_{32} = d\mu, \quad a_{13} = r, \quad a_{31} = dr.$$

其中, $0 < d < 1$, 并令 $a_{12} = \alpha, a_{21} = \beta$ 。

2 模型稳定性及分岔行为分析

模型(1)有7个平衡点:

$$\begin{aligned} \text{(i) 三种群平衡点只有1个: } S_3 &= (P_1^*, P_2^*, Z^*), \\ P_1^* &= (r - dr\mu - \alpha\mu + d\mu^2) / |A|, \\ P_2^* &= (dr^2 - dr\mu - r\beta + \mu) / |A|, \\ Z^* &= (\alpha\beta + d\mu - d\mu\beta - dr + dr\alpha - 1) / |A|, \end{aligned}$$

系统(1)的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & r \\ \beta & 1 & \mu \\ -dr & -d\mu & 0 \end{pmatrix},$$

$$|A| = d[r^2 + \mu^2 - (\alpha + \beta)r\mu].$$

(ii) 两种群平衡点有3个:

$$\begin{aligned} S_{101} &= (r, 0, dr - 1) / dr^2, \\ S_{011} &= (0, \mu, d\mu - 1) / d\mu^2, \\ S_{110} &= (1 - \alpha, 1 - \beta, 0) / (1 - \alpha\beta). \end{aligned}$$

(iii) 一种群平衡点有3个:

$$S_{100} = (1, 0, 0), \quad S_{010} = (0, 1, 0), \quad S_{000} = (0, 0, 0),$$

均是不稳定的平衡点。

下面着重研究有实际意义的三种群平衡点 $S_3 = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ 的稳定性及其分岔与混沌。为此,需先求出其相应的扰动方程。令:

$$x_1 = P_1 - P_1^*, \quad x_2 = P_2 - P_2^*, \quad x_3 = Z - Z^*. \quad (2)$$

将式(2)代入式(1),则得扰动方程如下:

$$X = AX + B, \quad (3)$$

其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -P_1^* & -\alpha P_1^* & -rP_1^* \\ -\beta P_2^* & -P_2^* & -\mu P_2^* \\ drZ^* & d\mu Z^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -x_1(x_1 + \alpha x_2 + rx_3) \\ -x_2(\beta x_1 + x_2 + \mu x_3) \\ x_3(dx_1 + d\mu x_2) \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的特征值决定了 S_3 的稳定性. 其特征方程为:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (4)$$

其中

$$a_1 = P_1^* + P_2^*,$$

$$a_2 = d(r^2 P_1^* + \mu^2 P_2^*) Z^* + (1 - \alpha\beta) P_1^* P_2^*,$$

$$a_3 = (dr^2 + d\mu^2 - dr\alpha\mu - dr\beta\mu) P_1^* P_2^* Z^*.$$

由霍尔维茨判据, 特征方程的根具有负实部的充要条件为: $a_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$) 且 $a_1 a_2 - a_3 > 0$, 此时 S_3 是渐进稳定的. 当参数取值满足

$$a_1 a_2 - a_3 = 0, \quad (5)$$

系统将发生 Hopf 分岔. 此时, 特征方程(4)的两个共轭复数根的实部为零, 即有一对纯虚根, 特征方程的根为:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0, \quad \lambda_3 = -a_1,$$

其中 $\omega_0^2 = a_2$.

下面对矩阵 A 施以变化 P , 使其有形式

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix},$$

矩阵 P 由矩阵 A 的 3 个特征值所对应的特征向量组成,

$$P = \begin{pmatrix} (r-1)P_1^* P_2^* & -\omega_0 r P_1^* & rP_1^* (P_2^* - a_1) - P_1^* P_2^* \\ (1-1.5r)P_1^* P_2^* & -\omega_0 r P_2^* & P_2^* (P_2^* - a_1) - 1.5rP_1^* P_2^* \\ 0.5P_1^* P_2^* + \omega_0^2 & \omega_0 (P_1^* + P_2^*) & 1.5P_1^* P_2^* - (P_1^* - a_1)(P_2^* - a_1) \end{pmatrix}.$$

为了得到方程的正规型, 做变换

$$X = PY,$$

其中 $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$

通过线性代数运算得到:

$$Y = KY + D, \quad (6)$$

其中 $K = P^{-1}AP, D = \begin{pmatrix} D^1(y_1, y_2, y_3) \\ D^2(y_1, y_2, y_3) \\ D^3(y_1, y_2, y_3) \end{pmatrix},$

$D^1(y_1, y_2, y_3), D^2(y_1, y_2, y_3), D^3(y_1, y_2, y_3)$ 均为非常复杂的代数表达式.

其中, (6) 式右边第 1 项为线性项, 第 2 项为非线性项, 从这些非线性项中, 我们可以计算出发生 Hopf 分岔后周期轨道的稳定系数 R_c 。稳定系数 R_c 为:

$$R_c = \frac{1}{16\omega_0} \left[\left(\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1 \partial y_2} - \left(\frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_2^2} \right) \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2^2} \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1^2} \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1^2} \right] + \frac{1}{16} \left[\frac{\partial^3 D^1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 D^2}{\partial y_2^3} + \frac{\partial^3 D^1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 D^2}{\partial y_1^2 \partial y_2} \right] + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4\omega_0^2)} \frac{\partial^2 D^1}{\partial y_1 \partial y_3} \left[(3a_1^2 + 8\omega_0^2) \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2} + (a_1^2 + 8\omega_0^2) \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2} - 4\omega_0 a_1 \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right] + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4\omega_0^2)} \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_2 \partial y_3} \left[(a_1^2 + 8\omega_0^2) \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2} + (3a_1^2 + 8\omega_0^2) \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2} + 4\omega_0 a_1 \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right] + \frac{1}{16a_1(a_1^2 + 4\omega_0^2)} \left(\frac{\partial^2 D^1}{\partial y_2 \partial y_3} + \frac{\partial^2 D^2}{\partial y_1 \partial y_3} \right) \left[2\omega_0 a_1 \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1^2} - 2\omega_0 a_1 \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_2^2} + 2a_1^2 \frac{\partial^2 D^3}{\partial y_1 \partial y_2} \right] \cdot$$

稳定系数 R_c 的符号决定了周期轨道的稳定性。 $R_c < 0$ 则周期轨道稳定, $R_c > 0$ 则周期轨道不稳定。

3 实例计算

各参数取值如下:

$$d = 0.5, \alpha = 1, \beta = 1.5, \mu = 1, \varepsilon = a_{ii} = 1 \cdot$$

初始值为 $P_1 = 0.2, P_2 = 0.6, Z = 0.03$ 。将 r 作为控制分岔参数。

由式(5)可以算出 $r = 5.486$, 记为 r_1 。

此时, 可求出 $R_c = -0.05 < 0$, 从而可以判定所产生的极限环是稳定的。

然后进行进一步的计算^[4,5]发现: 当分岔参数变化时, 系统经过不动点的 0 环面 T^0 和极限环的 1 环面 T^1 , 接着产生了 2 环面 T^2 。由理论和实验证实^[6]: $T^2 \rightarrow$ 混沌道路是通有的。由此我们可以看出, 方程(1)所描述的生态系统, 会产生稳定的极限环, 并通过准周期分岔导致混沌。

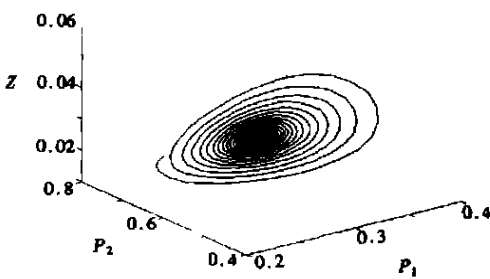


图1 $r = 5.3$ 时, 系统趋于稳定态

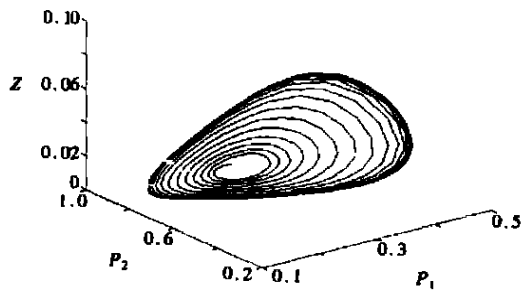


图2 $r = 6.0$ 时, 系统的 1 环面
(初始值为 0.2, 0.6, 0.03)

4 数值模拟

各参数取值同上, 仍将 r 作为分岔参数。

采用四阶 Runge_Kutta 方法, 分别计算当 $r = 5.3, 6.0, 7.5, 7.8, 10.0$ 时, 其仿真结果如图

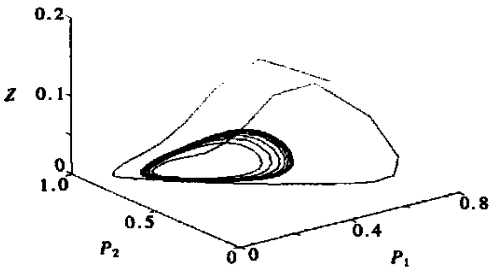


图3 $r = 6.0$ 时,系统的1环面
(初始值为 0.6, 0.4, 0.12)

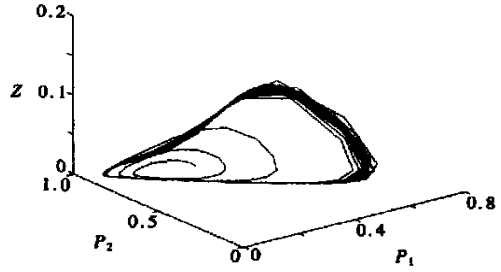


图4 $r = 7.5$ 时,系统的1环面

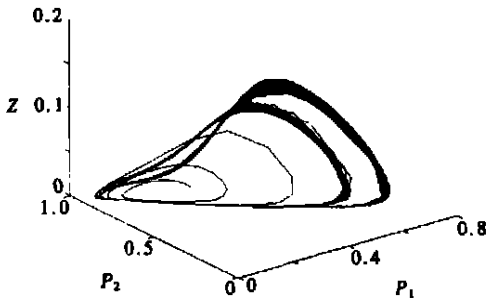


图5 $r = 7.8$ 时,系统的2环面

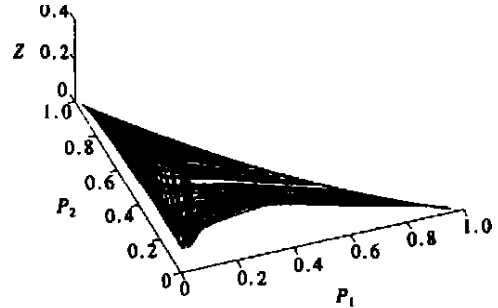


图6 $r = 10.0$ 时,产生的Vance螺旋混沌

5 讨 论

从以上的理论计算以及数值仿真可以看出,当 r 增大时,系统状态会发生质的变化,从稳定态到极限环最后发生混沌。精确的数值计算可以得出,当 $r = 5.48$ 时,系统会发生 Hopf 分岔。对于极限环稳定性的判断,由稳定系数 $R_c < 0$ 知,周期解应该稳定。现取不同的初始值,做数值计算,结果参看图 2 与图 3。很明显可以看出,不同的初始值(位于极限环外的初始点与位于极限环内的初始点)均趋向于极限环,所以在适当的参数范围内,系统只存在一个稳定的 1 环面极限环。当 r 继续增大时,系统会产生 2 环面 T^2 ,继续增大 r 系统出现了 Vance 螺旋混沌。由 $T^2 \rightarrow$ 混沌道路是通有的,判定该模型所描述的生态系统通过准周期分岔产生混沌。

赤海藻类非线性动力学模型是用来研究特定海域藻类的时空分布、变化规律,可以定量确定各种物理、化学、生物等因素对赤潮形成的影响,对解决浮游植物生物量异常增加导致的赤潮环境问题有重要的指导意义。本文运用现代非线性动力学理论对赤海藻类非线性动力学模型的分岔及稳定性进行了分析,重点研究了浮游动物对藻类的捕食这一重要因素对藻类非线性动力学行为的影响,得到了发生 Hopf 分岔时的参数值,判断了极限环的稳定性,并发现了该模型通过准周期分岔产生混沌。这些研究结果对于理解藻类种群的复杂动力学行为有很好的借鉴意义,并有助于建立有效的赤潮预测模型。

[参 考 文 献]

- [1] Glibert P, Pitcher G. Global Ecology and Oceanography of Harmful Algal Blooms, Science Plan [M]. Baltimore and Paris: SCOR and IOC, 2001, 2—6.

- [2] 王洪礼,冯剑丰. 渤海赤潮藻类生态动力学模型的非线性动力学研究[J]. 海洋技术, 2002, **21**(3): 8—12.
- [3] Azar C, Holmberg J, Lindgren K. Stability analysis of harvesting in a predator-prey model[J]. J Theoret Biol, 1995, **174**(1): 13—19.
- [4] Feigenbaum M J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations[J]. J Statist Phys, 1978, **19**(6): 25—52.
- [5] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [6] Li T Y, Yorke J A. Period three implies chaos[J]. Amer Math Monthly, 1975, **82**(10): 985—992.

Stability and Bifurcation Behaviors Analysis in a Nonlinear Harmful Algal Dynamical Model

WANG Hong_li, FENG Jian_feng, SHEN Fei, SUN Jing

(Department of Mechanics and Engineering Measurement, School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: A food chain made up of two typical algae and a zooplankton was considered. Based on ecological eutrophication, interaction of the algal and the prey of the zooplankton, a nutrient nonlinear dynamic system was constructed. Using the methods of the modern nonlinear dynamics, the bifurcation behaviors and stability of the model equations by changing the control parameter r were discussed. The value of r for bifurcation point was calculated, and the stability of the limit cycle was also discussed. The result shows that through quasi-periodicity bifurcation the system is lost in chaos.

Key words: harmful algal bloom; population dynamics; Hopf bifurcation; normal form; stability; chaos