

文章编号: 1000\_0887(2005) 06\_0653\_06

# 重建极性连续统理论的基本定律和原理( IX) ——热力学\*

戴天民

(辽宁大学 数学系和数学应用中心, 沈阳 110036)

(我刊原编委戴天民来稿)

摘要: 对现有的微极连续统场论的基本定律进行了再研究, 并指出了它们的不完整性. 建立起新的微极连续统热静力学和热动力学的第一和第二基本定律. 从这些定律可以很自然地同时推导出热静力学的所有平衡方程和熵不等式以及热动力学的所有均衡方程和熵率不等式. 随时对这里得到的新结果与现有微极连续统力学专著和教科书中的相应结果进行了比较. 着重指出的是, 为什么从现有的微极连续统热动力学基本定律不能推导出局部能量均衡方程和局部熵不等式问题已经得到阐明.

关键词: 微极连续统; 基本定律; 热静力学; 热动力学; 能率; 熵率不等式

中图分类号: O33 文献标识码: A

## 引 言

本文将致力于探讨微极连续统场论的热静力学和热动力学的新基本定律的有关问题. 为了便于说明和比较起见, 我们现在引录现有文献中某些热力连续统基本定律如下: 在经典连续统力学中存在着两组形式上不同的热动力学基本定律, 亦即:

情况 A(例如, 可参阅 Truesdell 的文献[ 1], Ziegler 的文献[ 2], Eringen 的文献[ 3], Mueller 的文献[ 4], Teodosiu 的文献[ 5])

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left[ \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dv = \oint_A (\mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) da + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) dv, \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \eta dv \geq \oint_A \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \frac{1}{\theta} \rho r dv; \quad (2)$$

情况 B(例如, 可参阅范和高的文献[ 6], 陈的文献[ 7], 匡的文献[ 8])

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left[ \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right] dv = \oint_A (\mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) da + \int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + r) dv, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \eta dv \geq \oint_A \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \frac{1}{\theta} \rho r dv; \quad (4)$$

\* 收稿日期: 2003\_08\_29; 修订日期: 2005\_02\_19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472041; 10072024); 辽宁省教育委员会科研资助项目(990111001)

作者简介: 戴天民(1931—), 男, 满族, 辽宁开原人, 教授, 博士, 已发表专著译著 12 部, 论文 60 余篇 (Tel: + 86\_24\_86870115; Fax: + 86\_24\_86852421; E\_mail: tianmin\_dai@yahoo.com.cn)

这里  $\varepsilon$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{t}_{(n)}$ 、 $\mathbf{q}$ 、 $\mathbf{f}$ 、 $r$ 、 $\eta$  和  $\theta$  分别为内能、速度、面力、热流矢量、体力、热供应、比熵和绝对温度。

从(1)、(2)和(3)、(4),可以分别推导出下列动量方程、局部能量(率)均衡方程和熵(率)不等式:

情况 A

$$\rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) - \operatorname{div} \mathbf{t} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \varepsilon_t - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho r - \rho \theta = 0, \quad (6)$$

$$\rho \theta_t - \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} \rho r \geq 0; \quad (7)$$

情况 B

$$\rho(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{f}) - \operatorname{div} \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\rho \varepsilon_t - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho r \geq 0, \quad (8)$$

$$\rho \theta_t - \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{1}{\theta} \rho r \geq 0. \quad (9)$$

关于热静力学的基本定律在现有文献中确实少见。例如, Mueller<sup>[4]</sup> 曾定义一类经典连续统的热静力学,亦即,过程的加速度可以忽略,一般情况下不考虑体力效应,因而动量方程由均匀应力及均匀的温度和变形梯度场所满足。

在微极连续统场论中存在着 3 种本质上不同的热力学第一基本定律和 1 种第二基本定律。

A. 非耦合的情况(例如,请参阅 Eringen 的文献[9])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\gamma} \right) dv &= \oint_A (\mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}_{(n)} \cdot \boldsymbol{\gamma}) da + \\ &\int_V \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\gamma}) dv + \oint_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da + \int_V \rho r dv, \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$  和  $\mathbf{l}$  分别为自旋密度、角速度和体矩。下列局部能量均衡方程只有在利用运动方程的情况下才能从(10)式得到:

$$\rho \varepsilon_t = t_{kl} (v_{l,k} - \varepsilon_{klm} \gamma_{m,k}) + m_{kl} \gamma_{l,k} - q_{k,k} + \rho r \quad (11)$$

B. 半耦合的情况(请参阅戴的文献[10])

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dv &= \int_V \rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} dv + \oint_A \mathbf{t}_{(n)} \cdot \mathbf{v} da + \\ &\int_V \rho [(\mathbf{l} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \mathbf{x} \times (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})] \cdot \boldsymbol{\gamma} dv + \oint_A (\mathbf{m}_{(n)} + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}) \cdot \boldsymbol{\gamma} da + \\ &\int_V \rho r dv + \oint_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da. \end{aligned} \quad (12)$$

从(12)式可以很自然地同时推导出下列运动方程和局部能率均衡方程:

$$\rho (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}}) + \operatorname{div} \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$\rho (\mathbf{l} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}) + \operatorname{div} \mathbf{m} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

$$\rho \varepsilon_t = t_{kl} (v_{l,k} - \varepsilon_{lmn} \gamma_{n,k}) + m_{kl} \gamma_{l,k} - q_{k,k} + \rho r \quad (15)$$

C. 耦合的情况(请参阅戴的文献[11])

如果我们考虑由角速度所引起的附加速度,并用  $\underline{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{x}$  代替(10)中的  $\mathbf{v}$ , 则得耦合的能率守恒定律如下:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dv = \int_V \rho (\mathbf{f} - \dot{\underline{\mathbf{v}}}) \cdot \underline{\mathbf{v}} dv + \oint_A \mathbf{t}_{(n)} \cdot \underline{\mathbf{v}} da +$$

$$\int_V \rho [(l - \dot{\sigma}) + \mathbf{x} \times (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{v}})] \cdot \mathbf{v} dv + \oint_A (\mathbf{m}_{(n)} + \mathbf{x} \times \mathbf{t}_{(n)}) \cdot \mathbf{v} da + \int_V \rho \mathbf{v} dv + \oint_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da \quad (16)$$

由(16)可得(14)、(15)和下列非传统的动量均衡方程

$$\rho(f_i - \dot{v}_i) + t_{kl, k} = 0 \quad (17)$$

从前面的简短评述可以看到, 不管连续统是经典的还是微极的, 都不可能从前面提到的实际上是不完整的能率守恒定律的“能量守恒定律”推导出真实的局部能量均衡方程。这个事实也应该看做是极性连续统场论中一个历史遗留的尚未解决的问题。为了解决这个问题, 我们必须重新建立包括热静力学和热动力学在内的热力学基本定律。关于经典热力连续统问题, 我们已在最近工作中进行了讨论。

本文的目的是要重新建立微极连续统的热静力学及热动力学的基本定律, 并要从它们推导出平衡方程和熵不等式及均衡方程和熵率不等式。

本文是我们前期工作[12~19]的直接延续。

## 1 微极连续统热静力学的新基本定律

据我们所知, 在现有微极连续统的专著和教科书中尚无完整的热静力学基本定律。为此, 我们现在来建立热静力学的基本定律并推导出微极热静力连续统的所有平衡方程、熵不等式和 Clausius-Duhem 不等式。

### 1.1 热静力学第一基本定律(能量守恒定律)

该定律表示, 全内能  $E$  等于全机械功  $W$  和全热流入  $H$  之和。

数学上, 热静力学第一基本定律可以表述为

$$E = W + H \quad (18)$$

或

$$\int_V \rho \varepsilon dv = \int_V \rho [f \cdot \mathbf{u} + (l + \mathbf{x} \times f) \cdot \boldsymbol{\varphi}] dv + \oint_A [t_{(n)} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{m}_{(n)} + \mathbf{x} \times f) \cdot \boldsymbol{\varphi}] da + \int_V \rho \mathbf{v} dv - \oint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} da, \quad (19)$$

式中  $\boldsymbol{\varphi}$  和  $\mathbf{g}$  分别为微转动和热流入矢量。

从(19)式我们可以推导出下列平衡方程和局部能量方程:

$$t_{kl, k} + \vartheta_l = 0, \quad (20)$$

$$m_{kl, k} + \varepsilon_{mnl} t_{nm} + \rho l = 0; \quad (21)$$

$$\rho \varepsilon - t_{kl} (u_l, k - \varepsilon_{lmn} x_m \varphi_{n, k}) + m_{kl} \varphi_{l, k} + \rho - g_{k, k} = 0 \quad (22)$$

### 1.2 热静力学第二基本定律(熵不等式)

数学上, 这个定律可以表述为:

$$S = \int_V \rho s dv \geq \int_V \frac{\rho \theta}{\theta} dv - \oint_A \frac{1}{\theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} da, \quad (23)$$

式中  $S$  为系统的总熵, 可逆过程取等式, 不可逆过程取不等式。

从(23)式我们可得下列熵不等式:

$$\rho s - \rho + g_{k, k} - \frac{1}{\theta} g^k \theta_{, k} \geq 0 \quad (24)$$

### 1.3 其它形式的熵不等式

从(22)式和(24)式消去  $\Theta$ , 并取  $\varepsilon = \psi + \Theta_s$ , 则熵不等式具有下列形式:

$$-\rho\psi + t_{kl}(u_{l,k} - \varepsilon_{mn}x_m \varphi_{n,k}) + m_{kl}\varphi_{l,k} + \frac{1}{\theta}g_k\theta_{,k} \geq 0, \quad (25)$$

式中  $\psi$  是比自由能

应当指出的是, 局部能量平衡方程(22)和局部熵不等式(24)是不可能从现有的能量(率)守恒定律(10)、(12)、(16)和第二基本定律(2)或(4)推导出来的。

## 2 微极连续统热动力学的新基本定律

### 2.1 热动力学第一基本定律(能率守恒定律)

该定律表示, 全内能率  $\dot{E}$  等于全机械功率  $\dot{W}$  和全热输入率  $\dot{H}$  之和。

数学上, 热动力学第一基本定律可以表述为

$$\dot{E} = \dot{W} + \dot{H} \quad (26a)$$

或

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dv = \frac{d}{dt} \left\{ \int_V \rho [(f - \dot{y}) \cdot u + [(l - \dot{\sigma}) + x \times (f - \dot{y})] \cdot \varphi] dv + \oint_A [t_{(n)} \cdot u + (m_{(n)} + x \times t_{(n)}) \cdot \varphi] da \right\} + \frac{d}{dt} \left[ \int_V \rho dv - \oint g \cdot n da \right]. \quad (26b)$$

经过较长的推导, 我们可以很自然地并同时得到下列微极热动力连续统的所有局部均衡方程和它们的增率形式:

运动方程

$$\rho(\dot{u}_l - f_l) + t_{kl,k} = 0, \quad (17)$$

$$\rho(\dot{\varphi}_l - l_l) - m_{kl,k} - \varepsilon_{mn}t_{mn} = 0; \quad (14)$$

增率型运动方程

$$\rho(\dot{\dot{v}}_l - f_l) + \dot{t}_{kl,k} = 0, \quad (27)$$

$$\rho(\dot{\dot{\varphi}}_l - l_l) - \dot{m}_{kl,k} - \varepsilon_{mn}(\dot{t}_{mn} + t_{mn}v_{p,p}) = 0; \quad (28)$$

局部能率均衡方程

$$\rho \varepsilon - \dot{t}_{kl}u_{l,k} - t_{kl}\dot{u}_{l,k} - \dot{m}_{kl}^* \varphi_{l,k} - m_{kl}^* \dot{\varphi}_{l,k} - \rho r + \dot{g}_{k,k} = 0 \quad (29a)$$

或

$$\rho \varepsilon - \dot{t}_{kl}u_{l,k} - t_{kl}\dot{u}_{l,k} - \dot{m}_{kl}^* \varphi_{l,k} - m_{kl}^* \dot{\varphi}_{l,k} - \rho r + \dot{g}_{k,k} = 0, \quad (29b)$$

这里

$$\dot{t}_{kl} = \dot{t}_{kl} - t_{pl}v_{k,p} + t_{kl}v_{l,p}, \quad (30)$$

$$\dot{u}_{l,k} = \dot{u}_{l,k} - u_{l,p}v_{p,k} + u_{l,k}v_{p,p}, \quad (31)$$

$$\dot{m}_{kl}^* = \dot{m}_{kl}^* - m_{p,l}^*v_{k,p} + m_{kl}^*v_{p,p}, \quad (32)$$

$$\dot{m}_{kl}^* = m_{kl} + \varepsilon_{mn}x_m \dot{t}_{kn}, \quad (33)$$

$$\dot{\varphi}_{l,k} = \dot{\varphi}_{l,k} - \varphi_{l,p}v_{p,k} + \varphi_{l,k}v_{p,p}, \quad (34)$$

$$\dot{g}_{k,k} = \dot{g}_{k,k} - g_{k,p}v_{p,k} + g_{k,k}v_{p,p}; \quad (35)$$

局部能量均衡方程

容易验证, 局部能量均衡方程

$$\rho \varepsilon - \dot{t}_{kl}u_{l,k} - m_{kl}^* \varphi_{l,k} - \rho r + g_{k,k} = 0 \quad (36)$$

可以直接由(29)式推导出来。这里用到了下列关系式(请参阅戴的文献[17]):

$$\beta = - \frac{v_{p,p}}{\theta}, \quad (37)$$

$$(X_{K,l})^{\cdot} = - X_{K,p} v_{p,l}. \quad (38)$$

我们认为, 表达式(36) 才是微极热力连续统的局部能量均衡方程的真实形式。

## 2.2 热力学第二基本定律(熵率不等式)

数学上, 这个定律可以表述为下列率形式:

$$\frac{d}{dt} \int_V \beta \, dv \geq - \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{\theta} \rho r \, dv - \frac{d}{dt} \int_A \frac{1}{\theta} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (39)$$

由第二基本定律(39) 可以推导出下列形式的熵率不等式:

$$\rho \left[ \phi_{,t} + \frac{1}{\theta} \phi_{,k} - \dot{\rho} \right] + \frac{1}{\theta} g_{k,k} - \frac{1}{\theta} g_{k,k} \phi_{,k} - \frac{1}{\theta} \left[ g_{k,k} - \left( \frac{1}{\theta} \phi_{,k} - v_{p,p} \right) g_{k,k} \right] \theta_{,k} - \frac{1}{\theta} g_{k,k} \theta_{,k} \geq 0 \quad (40)$$

应当指出的是, 上列熵率不等式与连续统场论文献中的现有所有表述都存在着本质差异。

## 2.3 新的热力学 Clausius\_Duhem 不等式

从(29) 式和(40) 式中消去  $\rho_{,t}$  和  $\frac{1}{\theta} g_{k,k}$  并取  $\varepsilon = \phi_{,t} + \frac{1}{\theta} \phi_{,k}$ , 则热力学 Clausius\_Duhem 不等式有下列形式:

$$- \rho \left[ \phi_{,t} + \frac{1}{\theta} \phi_{,k} \right] + t_{kl} u_{l,k} + t_{kl} u_{k,l} + m_{kl}^* \phi_{l,k} + m_{kl}^* \phi_{k,l} - \frac{1}{\theta} g_{k,k} \phi_{,k} - \frac{1}{\theta} \left[ g_{k,k} - \left( \frac{1}{\theta} \phi_{,k} - v_{p,p} \right) g_{k,k} \right] \theta_{,k} - \frac{1}{\theta} g_{k,k} \theta_{,k} \geq 0 \quad (41)$$

## 3 结束语

我们认为, 通过前面的研究, 这个在现有连续统场论文献中, 为什么能量均衡方程不能从相应的能量守恒定律推导出来的问题, 已经得到阐明。

新的微极连续统热静力学和热力学基本定律已经建立起来。本文所得到的一些结果是很一般的, 而且是较为完整的。由这些结果可以直接推导出包括现存所有结果在内的许多特殊情形。为节省篇幅, 这些具体结果不另列出。

### [参 考 文 献]

- [1] Truesdell C. A First Course in Rational Continuum Mechanics [M]. Vol. 1. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1977.
- [2] Ziegler H. An Introduction to Thermomechanics [M]. Amsterdam, New York, Oxford: North\_Holland Publishing Company, 1983.
- [3] Eringen A C. Mechanics of Continua [M]. Melbourne, Florida: Kreger Publishing Company, 1980.
- [4] Mueller I. Thermodynamics [M]. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
- [5] Teodosiu C. Elastic Models of Crystal Defects [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer\_Verlag, 1982.
- [6] 范镜泓, 高芝晖. 非线性连续介质力学基础[M]. 重庆: 重庆大学出版社, 1987.
- [7] 陈至达. 有理力学[M]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1988.
- [8] 匡震邦. 非线性连续介质力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1989.
- [9] Eringen A C. Continuum Physics [M]. Vol. IV. New York: Academic Press, 1976.
- [10] 戴天民. 带有微结构的连续统中新的能量守恒定律和 C\_D 不等式[J]. 应用数学和力学, 2001, 22

- (2): 135—143.
- [11] DAI Tian\_min. On basic laws and principles for continuum field theories[ A] . In: CHIEN Wei\_zang Ed. Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Mechanics [ C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 29—41.
- [12] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( I )——微极连续统[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 991—997.
- [13] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( II )——微态连续统理论和偶应力理论[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 998—1004.
- [14] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( III) ——Noether 定理[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(10): 1005—1011.
- [15] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( IV) ——表面守恒定律[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(11): 1101—1107.
- [16] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( V) ——极性热力连续统[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**( 11): 1108—1114.
- [17] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( VI) ——质量和惯性守恒定律[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(12): 1211—1216.
- [18] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( VII) ——增率型[ J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(12): 1217—1222.
- [19] 戴天民. 重建极性连续统理论的基本定律和原理( VIII) ——全功能原理[ J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 287—292.

## Renewal of Basic Laws and Principles for Polar Continuum Theories ( IX) — Thermomechanics

DAI Tian\_min

( Department of Mathematics & Center for the Application of Mathematics ,  
Liaoning University , Shenyang 110036, P. R. China )

**Abstract:** The existing fundamental laws of thermodynamics for micropolar continuum field theories are restudied and their incompleteness is pointed out. New first and second fundamental laws for thermostatics and thermodynamics for micropolar continua are postulated. From them all equilibrium equations and the entropy inequality of thermostatics as well as all balance equations and the entropy rate inequalities are naturally and simultaneously deduced. The comparisons between the new results presented here and the corresponding results demonstrated in existing monographs and textbooks concerning micropolar continuum mechanics are made at any time. It should be emphasized to note that, the problem of why the local balance equation of energy and the local entropy inequality could not be obtained from the existing fundamental laws of thermodynamics for micropolar continua, is believed to be clarified.

**Key words:** micropolar continua; fundamental law; thermostatics; thermodynamics; energy rate; entropy rate inequality