

文章编号: 1000\_0887(2005) 05\_0541\_06

# 恒温平行板间多孔介质通道中的 分层耗散流动\*

K·霍曼, M·哥济\_邦德培

(马赞达冉大学 机械工程系, 巴波尔 484 信箱, 伊朗)

(周哲玮推荐)

摘要: 利用 Darcy 模型, 研究了平行板间充填饱和多孔介质的通道中, 在热量入口处传热的粘性耗散效应. 讨论了等温边界情况. 求得热量入口处局部温度和体积计算平均温度随 Nusselt 数的分布. 给出了独立于 Brinkman 数的充分发展的 Nusselt 数应为 6. 并观察到, 若忽略粘性耗散影响, 将导致熟知的内流现象, 此时 Nusselt 数等于 4.93. 还给出了有限差分数值解. 结果表明解析法和数值法的结果吻合很好.

关键词: 传热; Nusselt 数; 强迫对流; 多孔介质; 粘性耗散

中图分类号: O357.3 文献标识码: A

## 引 言

多孔介质通道或管道中的强迫对流问题是一个经典问题(至少缓慢流动情况属此(Darcy 模型)). 由于在电子设备的冷却中用到超多孔介质, 因此, 最近对这一问题的研究重新引起人们的兴趣. 最近 Nield 和 Bejan<sup>[1]</sup> 参考了该课题 30 篇以上的文章, 但没有一篇明显涉及热研究. 这一文献的空白已被 Nield 等人<sup>[2-4]</sup> 部分填补. Lahjowri 等人<sup>[5,6]</sup> 使用形式的 Graetz 分析方法, 数学上求解了类似问题. Narasimhan 和 Lage<sup>[7]</sup> 应用数值方法, 研究了等通量平行板通道入口处与粘性相关的温度效应.

以上每一篇文章中都假定粘性耗散可以忽略. 本文在更一般的情况下, 研究了显著考虑粘性耗散的情况. 以下, 我们将用 Kreyszig<sup>[8]</sup> 提出的分离变量法进行讨论. 我们将讨论受保持常温的平行板壁约束的通道情况.

考虑粘性耗散作用, 需要对研究方法有所改变, 即将求解一个齐次微分方程问题变成求解非齐次微分方程的问题.

在早前的工作中, Shah 和 London<sup>[9]</sup> 测定了不含固体材料流体的管道流动中的粘性耗散效应.

\* 收稿日期: 2003\_10\_10; 修订日期: 2005\_02\_02

作者简介: K·霍曼(联系人, Tel: + 98\_111\_3234501; Fax: + 98\_111\_3234201; E-mail: k\_hooman@tech.umz.ac.ir).

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校.

# 1 分 析

## 1.1 基本方程

在流体力学意义下的稳态发展情况, 我们研究在不渗透壁  $y^* = -H$  和  $y^* = H$  间  $x^*$  方向的单向流动, 见图 1。

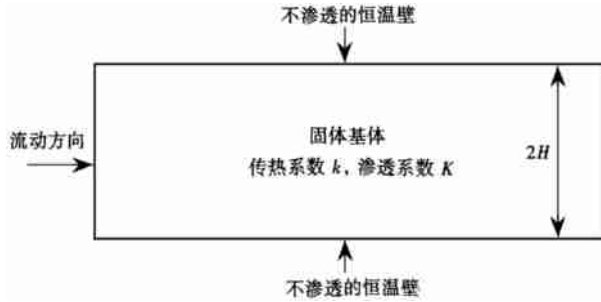


图 1 研究问题的示意图

Darcy 动量方程为<sup>[1]</sup>:

$$-\frac{\mu}{K}u^* + G = 0, \quad (1)$$

其中  $\mu$  为流体粘度,  $K$  为渗透系数,  $G$  为作用的压力梯度。无量纲坐标和 Peclet 数定义为

$$x = \frac{x^*}{P d H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad Pe = \frac{\rho c_p H U}{k}, \quad (2)$$

无量纲速度为

$$u = \frac{\mu u^*}{G H^2}. \quad (3)$$

方程(1)无量纲化后为

$$-\frac{u}{Da} + 1 = 0. \quad (4)$$

Darcy 数  $Da$  定义为

$$Da = \frac{K}{H^2}. \quad (5)$$

该方程的解

$$u = Da. \quad (6)$$

不用说, 这里要求粘性耗散不影响速度场而温度分布将有变化。

平均速度  $U$  和体平均温度  $T_m$  为

$$T_m = \frac{1}{H U} \int_0^H u^* T^* dy^*, \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H u^* dy^*. \quad (8)$$

将变量无量纲化为

$$\hat{u} = \frac{u^*}{U}, \quad \theta = \frac{T^* - T_w}{T_e - T_w} \quad (9)$$

即

$$\hat{u} = 1. \quad (10)$$

Nusselt 数  $Nu$  为

$$Nu = \frac{2Hq''}{k(T_w - T_m)}. \quad (11)$$

除了均匀、各向同性和局部热平衡外,假定大的 Peclet 数,于是轴向传热可以忽略,归结为低雷诺数(缓慢流动),粘性耗散变得有意义。则稳态热能方程为

$$\rho_p u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} = k \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\mu u^{*2}}{K}, \quad (12)$$

上式中末项即为粘性耗散。

上式的无量纲化形式为

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + Br, \quad (13)$$

其中  $Br$  为 Brinkman 数,定义为

$$Br = \frac{\mu U^2 H^2}{k(T_e - T_w)K}. \quad (14)$$

## 1.2 变量分离

求解方程(13)要用到条件

$$\theta(0, y) = 1, \quad \frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \theta(x, 1) = 0. \quad (15a, b, c)$$

类似文献[8],利用分离变量法,我们求得方程(13)满足条件(15a, b, c)的一般解。假定该解可以根据温度场表示成两部分,其第2部分  $\varphi(y)$  表示粘性耗散引起温度变化的作用。从数学上来说,可以通过变量变换将非齐次问题变为齐次问题(方程(18)为线性齐次偏微分方程)。

$$\theta(x, y) = \psi(x, y) + \varphi(y). \quad (16)$$

利用该变换,方程(13)可改写为

$$\frac{d^2 \varphi}{dy^2} + Br = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (18)$$

对  $\varphi(y)$  取如下边界条件

$$\left. \frac{d\varphi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \varphi(1) = 0. \quad (19)$$

方程(18)的近似边界条件为

$$\frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial y} = -\psi(0) = 0, \quad \psi(x, 1) = -\varphi(1) = 0, \quad \psi(0, y) = 1 - \varphi(y). \quad (20)$$

方程(17)在边界条件(19)下得解

$$\varphi(y) = \frac{Br(1-y^2)}{2}. \quad (21)$$

方程(18)和边界条件(20)均为齐次和线性的,因此可以利用分离变量法和叠加原理求得最终解为

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\lambda_n y) e^{-\lambda_n^2 x}. \quad (22)$$

假定  $\lambda_n$  为满足边界条件(15b)、(15c)的余弦特征函数的特征值,

$$\lambda_n = (2n+1) \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

$b_n$  为由入口温度边界条件确定的系数,

$$b_n = \frac{\int_0^1 (1 - \varphi(y)) \cos(\lambda_n y) dy}{\int_0^1 \cos^2(\lambda_n y) dy} = \frac{2(-1)^n (1 - Br \lambda_n^2)}{\lambda_n} \quad (24)$$

无量纲局部温度为

$$\theta(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(\lambda_n y) e^{-\lambda_n^2 x} + \frac{Br(1-y^2)}{2} \quad (25)$$

无量纲体积平均温度  $\theta_m(x)$  和局部 Nusselt 数  $Nu(x)$  由下式给出

$$\theta_m(x) = \int_0^1 \hat{u}(y) \theta(x, y) dy, \quad (26)$$

$$Nu(x) = - \frac{2[\partial \theta / \partial y]_{y=1}}{\theta_m(x)} \quad (27)$$

特别地, 由方程(25)、(26)、(27) 求得局部 Nusselt 数为

$$Nu(x) = \frac{6 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n (-1)^n e^{-\lambda_n^2 x} + 6Br}{3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^n e^{-\lambda_n^2 x} / \lambda_n + Br} \quad (28)$$

现已求得了常数、特征值和特征函数, 解是完备的。

### 1.3 数值求解步骤

本节应用有限差分式解计算局部温度、体积平均温度并进一步计算 Nusselt 数。为此目的, 将方程(13)离散为

$$\theta_{i+1, j} = \Delta x \left[ \frac{\theta_{i, j+1} - 2\theta_{i, j} + \theta_{i, j-1}}{(\Delta y)^2} + Br \right] + \theta_{i, j} \quad (29a)$$

以上方程及其边界条件(29b) 将用步进方法求解。

与离散方程相应的边界条件为

$$\theta_{1, j} = 1, \theta_{i, j_{\max}} = 0, \theta_{i, 1} = \theta_{i, 2} \quad (29b)$$

这里  $i = 1, j = 1, j = j_{\max}$ , 在计算域中分别表示  $x^* = 0, y^* = 0$  (通道中线),  $y^* = H$  (壁)。  
进行 Fourier 稳定性分析后得到(类似文献[10])

$$\frac{\Delta x}{(\Delta y)^2} < 0.5 \quad (29c)$$

解方程(29a)及边界条件(29b), 很容易给出体积平均温度和 Nusselt 数。数值解结果表明, 以后可以找出该问题的精确解。

## 2 结果和讨论

本问题中有大量参数变量, 计算耗时较多。我们有能力计算整个流域的温度场, 但我们的目的不在这里, 仅仅是为了计算当前 Nusselt 数。

首先我们考虑忽略粘性耗散的情况 ( $Br = 0$ )。画出 Nusselt 数值曲线示于图 2。对于大的  $x$ , Nusselt 数得到充分发展, 其值( $\pi^2/2$ )就是 Darcy 流动极限状态下的已知值  $4.935(\pi^2/2)$ , 参见文献[11]。

现在我们来考虑粘性耗散的影响。在所有的图中, 出现了一个共同的趋势,  $Br$  愈小, 入口长度愈长。较大的  $Br$ , 壁面上的流动受到阻止, 而体积平均温度立即出现(见方程(28))。在  $x$  值非常小时, 出现  $Nu(x)$  的充分成长区域。进一步考察发现, 甚至很小的粘性耗散( $Br$  非

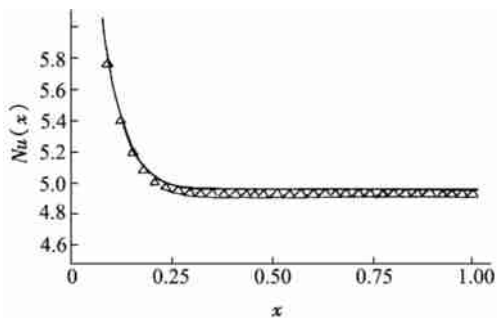


图2 不考虑粘性耗散 ( $Br = 0$ ) 时,局部 Nusselt 数随无量纲坐标的变化

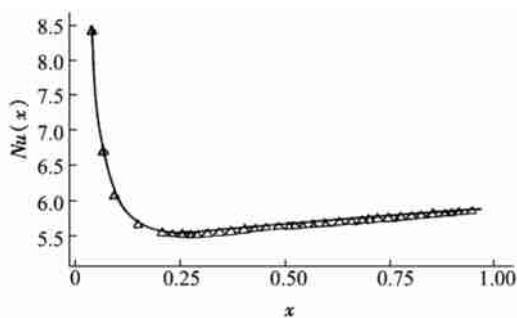


图3  $Br = 1$  时,局部 Nusselt 数随无量纲坐标的变化

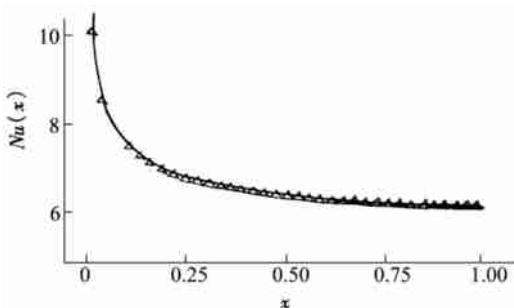


图4  $Br = 10$  时,局部 Nusselt 数随无量纲坐标的变化

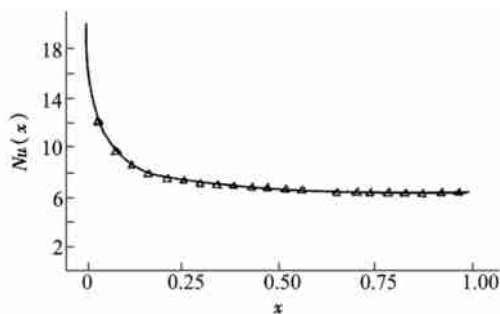


图5  $Br = 100$  时,局部 Nusselt 数随无量纲坐标的变化

(在图2至图5中,符号表示精确解的结果,而实线表示数值解的结果)

零),也会导致独立于  $Br$  的充分成长的  $Nu$  值的跃变,冷却时,这一影响特别显著。(当  $Br$  由零变到非零,同时方程(13)由齐次方程变为非齐次方程时,跃变可能发生)。我们还发现,正  $Br$  和负  $Br$  造成影响有巨大的差异。当  $Br > 0$  时,在壁面来流被加热。粘性耗散产生了一个正热源分布,当流体顺流流动时,增强了热效应。随着  $x$  的增大, Nusselt 数值通过某一个最小值。对于非常大的  $Br$  值,  $Nu$  值随  $x$  仅作缓慢的变化。当  $Br < 0$  时,在壁面来流被冷却;但在流体团中,粘性耗散产生的加热影响阻碍了壁面来流的冷却作用。当  $Br = -1$  时,这一阻碍作用特别大。这里,对应  $x$  的某些值,壁面温度和体积平均温度变化的符号是不相同的。这表明,由于这种差别, Nusselt 数变得没有意义。因此,在我们的图形中,没有绘出这些  $Br$  值的任何曲线。

图3至图5显示出,  $Br > 0$  时, Nusselt 数随  $x$  变化。这些结果与用数值方法得到的结果进行了比较。可以看出,两种结果吻合很好,还可看出,用数值方法求出的结果稍微位于精确解图形之上。

感谢 作者 K. Hooman 感谢奥克兰得大学 D. A. Nield 博士的指导,它远比财政资助更加有益。

## [参 考 文 献]

- [1] Nield D A, Bejan A. Convection in Porous Media [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1999.
- [2] Nield D A, Kuznetsov A V, Xiong M. Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel or circular tube with walls at constant temperature[J]. J Prous Media, 2004, 7 (1): 19—27.
- [3] Nield D A, Kuznetsov A V, Xiong M. Thermally developing forced convection in a porous medium: parallel plate channel or circular tube with walls at constant heat flux [J]. J Porous Media, 2003, 6 (3): 203—212.
- [4] Nield D A, Kuznetsov A V, Xiong M. Effect of local thermal non-equilibrium on thermally developing forced convection in a porous medium [J]. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45(25): 4949—4955.
- [5] Lahjomri J, Oubarra A, Alemany A. Heat transfer by laminar Hartmann flow in thermal entrance region with a step change in wall temperature: the Graetz problem extended [J]. Int J Heat Mass Transfer, 2002, 45(5): 1127—1148.
- [6] Lahjomri J, Oubarra A. Analytical solution of the Graetz problem with axial conduction [J]. ASME J Heat Transfer, 1999, 121(4): 1078—1083.
- [7] Narasimhan A, Lage J L. Modified Hazen-Dupuit-Darcy model for forced convection of a fluid with temperature dependent viscosity [J]. ASME J Heat Transfer, 2001, 123(1): 31—38.
- [8] Kreyszig E. Advanced Engineering Mathematics [M]. 4th Ed. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- [9] Shah R K, London A L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts (Advances in Heat Transfer, Supplement 1) [M]. New York: Academic Press, 1978.
- [10] Tannehill J C, Anderson D A, Pletcher R H. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer [M]. 2nd Ed. Bristol: Taylor & Francis, Inc, 1997.
- [11] Nield D A, Kuznetsov A V. Effect of heterogeneity in forced convection in a porous medium: parallel plate channel or circular duct [J]. Int J Heat Mass Transfer, 2000, 43(22): 4119—4134.

## Laminar Dissipative Flow in a Porous Channel Bounded by Isothermal Parallel Plates

Kamel Hooman, Mofid Gorji-Bandpy

(Mechanical Engineering Department, Mazandaran University, Po box 484, Babol, Iran)

**Abstract:** The effects of viscous dissipation on thermal entrance heat transfer in a parallel plate channel filled with a saturated porous medium, is investigated analytically on the basis of a Darcy model. The case of isothermal boundary is treated. The local and the bulk temperature distribution along with the Nusselt number in the thermal entrance region were found. The fully developed Nusselt number, independent of the Brinkman number, is found to be 6. It is observed that neglecting the effects of viscous dissipation would lead to the wellknown case of internal flows, with Nusselt number equal to 4.93. A finite difference numerical solution is also utilized. It is seen that the results of these two methods\_ analytical and numerical\_ are in good agreement.

**Key words:** heat transfer; Nusselt number; forced convection; porous media; viscous dissipation