应用数学和力学,第 26 卷 第 5 期(2005 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005)05_0519_08

局部 G_凸空间内的广义矢量拟平衡问题*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 在局部 G_凸空间内引入和研究了几类广义矢量拟平衡问题(GVQEP)。包含了大多数广义矢量平衡问题, 广义矢量变分不等式问题, 拟平衡问题和拟变分不等式问题作为特殊情形。首先在局部 G_凸空间内对一人对策证明了一个平衡存在性定理。作为应用, 在非紧局部 G_凸空间内对 GVQEP 的解建立了某些新的存在定理。这些结果和论证方法与最近文献中的结果和论证方法相比较是新的和完全不同的。

关 键 词: 广义矢量拟平衡问题; 一人对策; 平衡; 局部 G_凸空间
中图分类号: O255; O177.92 文献标识码: A

引 言

设 X、Y 是两个拓扑空间和 Z 是非空集。设 $F: X\times X\to 2^Z$, $A: X\to 2^X$ 和 $C: X\to 2^Z$ 是集值映象, 其中 2^Z 表 Z 的一切子集的簇。

(Ⅰ) 型广义矢量拟平衡问题(GVQEP(Ⅰ)) 是: 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\ 和\ F(\hat{x},z)\not\subseteq C(\hat{x}),\qquad \forall z\in A(\hat{x})。\tag{1}$$

(Ⅱ) 型广义矢量拟平衡问题(GVQEP(Ⅱ)) 是: 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\ 和\ F(\hat{x},z)\subseteq C(\hat{x}),\qquad \forall z\in A(\hat{x})。\tag{2}$$

如果 Z 是一拓扑矢量空间和 $P: X\to 2^Z$ 是一集值映象使得对每一 $x\in X$, $P(x)$ 是 Z 内一闭点凸锥且 $\operatorname{int}P(x)\neq\varnothing$, 对每一 $x\in X$, 令 $C(x)=-\operatorname{int}P(x)$, 则 GVQEP(Ⅰ) 化归下面(Ⅲ) 型广义矢量拟平衡问题(GVQEP(Ⅲ)): 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\ 和\ F(\hat{x},z)\not\subseteq -\operatorname{int}P(x),\qquad \forall z\in A(\hat{x})。\tag{3}$$

如果对每一 $x\in X$, $C(x)=Z\setminus(-\operatorname{int}P(x))$, 则 GVQEP(Ⅱ) 化归下面(Ⅳ) 型广义矢量拟平衡问题(GVQEP(Ⅳ)): 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\ 和\ z\notin -\operatorname{int}P(x),\qquad \forall z\in F(\hat{x},z)\ 和\ z\in A(\hat{x})。\tag{4}$$

GVQEP(Ⅳ) 包含了由 Lin 等[1] 引入和研究的(QEP)$'$ 作为特殊情形。

如果 $Z=\mathbf{R}$, 对每一 $x\in X$, $C(x)=(0,\infty]$ 和 $F(x,z)=\varphi(x,z)$ 是单值映象, 则 GVQEP(Ⅰ) 化归下面拟平衡问题(QEP): 求 $\hat{x}\in X$ 使得

$$\hat{x}\in A(\hat{x})\ 和\ \varphi(\hat{x},z)\leqslant 0,\qquad \forall z\in A(\hat{x})。\tag{5}$$

* 收稿日期: 2003_06_30; 修订日期: 2005_01_18
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081, SZD0406)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 四川自贡人, 教授(E_mail: dingxip@sicnu.edu.cn)。

QEP(5) 和它的各种变型已被很多作者引入和研究, 例如见文献[1]至文献[9]•

如果对每一 $x \in X$, $A(x) = X$, 则 GVQEP(Ⅰ) 化归下面广义矢量平衡问题(GVEP): 求 $\hat{x} \in X$ 使得

$$F(\hat{x}, z) \not\subseteq C(\hat{x}), \qquad \forall z \in X• \tag{6}$$

GVEP(6) 和它的各种特殊情形已被很多作者引入和研究, 例如见文献[10]至文献[16]和其中的参考文献•

在本文中, 我们首先在局部 G_凸空间内对一人对策证明了一个平衡存在定理• 应用此平衡存在定理, 对 GVQEP(Ⅰ) 和 GVQEP(Ⅱ) 的解在局部 G_凸空间内建立了一些新的存在性定理• 我们的结果和论证方法与最近文献中的结果和论证方法相比较是新的和完全不同的•

1 预 备 知 识

对非空集 X, 我们将分别用 2^X 和 $\mathscr{F}(X)$ 表 X 的一切子集的簇和 X 的一切非空有限子集的簇• 对 $A \in \mathscr{F}(X)$, $|A|$ 表 A 的基数• 令 Δ_n 是具有顶点 $e_0, e_1, \cdots, e_n$ 的标准 n_维单形• 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, 用 Δ_J 表顶点 $\{e_j: j \in J\}$ 的凸包• 广义凸(或 G_凸)空间和局部 G_凸空间(或 LG_空间)概念由 Park[17~19]引入•

G_凸空间 $(X, D; \Gamma)$ 由一拓扑空间 X, 一非空集 D 和一集值映象 $\Gamma: \mathscr{F}(D) \to 2^X \setminus \{\emptyset\}$ 构成使得对每一 $A = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\} \in \mathscr{F}(D)$, $|A| = n + 1$, 存在连续映象 $\varphi_A: \Delta_n \to \Gamma(A)$ 使得 $J \subseteq \{0, 1, \cdots, n\}$ 蕴含 $\varphi_A(\Delta_J) \subseteq \Gamma(\{a_j: j \in J\})$ 其中 $\Delta_J = \mathrm{co}\{e_j: j \in J\}$• 当 $D = X$ 时, 记 $(X, X; \Gamma) = (X, \Gamma)$• 在 $D \subseteq X$ 的情形, 称 $(X, D; \Gamma)$ 的子集 C 是 Γ_凸的如果对每一 $A \in \mathscr{F}(D)$, $A \subseteq C$ 蕴含 $\Gamma(A) \subseteq C$•

称 G_凸空间 $(X, D; \Gamma)$ 是 LG_空间如果 $(X, \mathscr{U})$ 是一致空间使得 D 是 X 的稠子集且存在一致结构 $\mathscr{U}$ 的一基 $\{V_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 使得对每一 $\lambda \in I$, 每当 $C \subseteq X$ 是 Γ_凸的时, 集 $\{x \in X: C \cap V_\lambda[x] \neq \emptyset\}$ 是 Γ_凸的, 其中 $V_\lambda[x] = \{y \in X: (x, y) \in V_\lambda\}$•

LG_空间概念是 LC_空间(Tarafdar[20]称为局部 H_凸空间)的推广• LC_空间由 Horvath[21]引入• G_凸空间包含了 H_空间(见 Horvath[21])和很多具有抽象凸结构的拓扑空间作为特殊情形, 见文献[17]至文献[19]和其中的参考文献•

设 $(X, D; \Gamma)$ 是 G_凸空间和 Z 是非空集• 设 $F: X \times X \to 2^Z$ 和 $C: X \to 2^Z$ 是集值映象• 称 $F(x, y)$ 在 y 关于 C 是 G_拟凸的(G_拟凹的) 如果对每一 $x \in X$, 集 $\{z \in X: F(x, z) \subseteq C(x)\}$ ($\{z \in X: F(x, z) \not\subseteq C(x)\}$) 是 X 的 Γ_凸子集•

设 X 和 Y 是拓扑空间• 称集值映象 $G: X \to 2^Y$ 是紧的如果 $G(X)$ 被包含在 Y 的一紧子集内• 称 G 在 X 上是上半连续的(u.s.c.) 如果对每一 $x \in X$ 和对 Y 的包含 $G(x)$ 的每一开子集 U, 集 $\{x \in X: G(x) \subseteq U\}$ 是 x 在 X 的一开邻域• 称 G 在 X 上是下半连续的(l.s.c.) 如果对每一 $x \in X$ 和对 Y 的每一开子集 U, $G(x) \cap U \neq \emptyset$, 集 $\{x \in X: G(x) \cap U \neq \emptyset\}$ 是 x 在 X 内的一开邻域•

下面结果是 Park[17]的定理 2•

引理 1.1 令 $(X, D; \Gamma)$ 是 LG_空间和 $T: X \to 2^X$ 是一紧 u.s.c. 集值映象具有非空闭 Γ_凸值• 则 T 有一不动点 $x_0 \in X$, 即 $x_0 \in T(x_0)$•

下面结果是 Aliprantis 等[22]的定理 14.18•

引理 1.2 令 X、Y 是拓扑空间和 $\varphi: X \to 2^Y$ 是集值映象• 则下列陈述是等价的:

(i) φ 在点 $x \in X$ 是下半连续的;

(ii) 如果 $x_\alpha \to x$, 则对每一 $y \in \varphi(x)$, 存在指标集 $\{\alpha\}$ 的子网 $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和元素 $y_\lambda \in \varphi(x_{\alpha_\lambda})$, $\forall \lambda \in \Lambda$ 使得 $y_\lambda \to y$•

下面结果是 Yuan[23, p.301] 的定理 4.7.3•

引理 1.3 令 X 和 Y 是拓扑空间和 A 是 X 的一闭(开)子集• 设 $F_1: X \to 2^Y$ 和 $F_2: A \to 2^Y$ 都是 l.s.c.(u.s.c.) 使得 $F_2(x) \subseteq F_1(x)$, $\forall x \in A$• 则由下式定义的映象 $F: X \to 2^Y$:

$$F(x) = \begin{cases} F_2(x), & \text{如果 } x \in A, \\ F_1(x), & \text{如果 } x \notin A \end{cases}$$

也是 l.s.c.(u.s.c.)•

定理 1.1 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 LG_空间和 $A, P: X \to 2^X$ 是集值映象使得

(i) A 是 u.s.c. 紧映象在 X 上具有在非空闭 Γ_凸值;

(ii) 集 $E = \{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \varnothing\}$ 在 X 内是开的;

(iii) $A \cap P: E \subseteq X \to 2^X$ 是 u.s.c. 具有闭 Γ_凸值;

(iv) 对每一 $x \in X$, $x \notin A(x) \cap P(x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) = \varnothing•$$

证明 定义一集值映象 $T: X \to 2^X$ 如下:

$$T(x) = \begin{cases} A(x) \cap P(x), & \text{如果 } x \in E, \\ A(x), & \text{如果 } x \notin E• \end{cases}$$

从条件(i)~(iii) 和引理 1.3 推得 T 是一 u.s.c. 紧映象具有非空闭 Γ_凸值• 由引理 1.1, 存在一点 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in T(\hat{x})$• 如果 $\hat{x} \in E$, 则有 $\hat{x} \in A(\hat{x}) \cap P(\hat{x})$, 这与条件(iv) 相矛盾• 因此我们必有

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) = \varnothing•$$

2 GVQEP 解的存在性

定理 2.1 设 $(X, D; \Gamma)$ 是 LG_空间和 Z 是非空集• 令 $F: X \times X \to 2^Z$, $A: X \to 2^X$ 和 $C: X \to 2^Z$ 是 3 个集值映象使得

(i) A 是 u.s.c. 紧映象具有非空闭 Γ_凸值;

(ii) 集 $E = \{x \in E: A(x) \cap P(x) \neq \varnothing\}$ 在 X 内是开的, 其中 $P: X \to 2^X$ 由 $P(x) = \{z \in X: F(x, z) \subseteq C(x)\}$ 定义;

(iii) 映象 $A \cap P: E \subseteq X \to 2^X$ 是 u.s.c. 具有闭 Γ_凸值;

(iv) 对每一 $x \in X$, $x \notin A(x) \cap P(x)$•

则存在 $\hat{x} \in X$ 使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \not\subseteq C(\hat{x}), \qquad \forall z \in A(\hat{x}),$$

即 $\hat{x}$ 是 GVQEP(I) 的解•

证明 定义集值映象 $P: X \to 2^X$ 如下:

$$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \subseteq C(x)\}, \qquad \forall x \in X•$$

容易检验定理 1.1 的一切条件被满足• 由定理 1.1, 存在 $\hat{x} \in X$ 使得 $\hat{x} \in A(\hat{x})$ 和 $A(\hat{x}) \cap$

$P(\hat{x}) = \emptyset$。由此推得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \nsubseteq C(\hat{x}), \qquad \forall z \in A(\hat{x}),$$

即$\hat{x}$ 是GVQEP(Ⅰ)的解。

定理 2.2 设$(X, D; \Gamma)$是LG_空间和Z是一拓扑空间。设$F: X \times X \to 2^Z$, $A: X \to 2^X$和$C: X \to 2^Z$是3个集值映象使得

(i) A是u.s.c.紧映象具有非空闭Γ_凸值;

(ii) 集$E = \{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\}$在$X$内是开的,其中$P: X \to 2^X$由$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \subseteq C(x)\}$定义;

(iii) $F(x, z)$在$X \times X$上是l.s.c.;

(iv) 映象C有闭图;

(v) $F(x, z)$在z关于C是G_拟凸的;

(vi) 对每一$x \in X$, $F(x, x) \nsubseteq C(x)$。

则存在$\hat{x} \in X$使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \nsubseteq C(\hat{x}), \qquad \forall z \in A(\hat{x}),$$

即$\hat{x}$ 是GVQEP(Ⅰ)的解。

证明 定义映象$P: X \to 2^X$如下:

$$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \subseteq C(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

我们主张P有闭图$\mathrm{Gr}(P)$。的确,令$\{(x_\alpha, z_\alpha)\}$是$\mathrm{Gr}(P)$内一网和$(x_\alpha, z_\alpha) \to (x_0, z_0)$。则有对每一$\alpha$, $F(x_\alpha, z_\alpha) \subseteq C(x_\alpha)$。如果$F(x_0, z_0) \nsubseteq C(x_0)$。则存在$u_0 \in F(x_0, z_0)$使得$u_0 \notin C(x_0)$。由条件(iii)和引理1.2,存在$\{\alpha\}$的子网$\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$和$u_{\alpha_\lambda} \in F(x_{\alpha_\lambda}, z_{\alpha_\lambda})$使得$u_{\alpha_\lambda} \to u_0$。因为$u_{\alpha_\lambda} \in F(x_{\alpha_\lambda}, z_{\alpha_\lambda}) \subseteq C(x_{\alpha_\lambda})$,对每一$\lambda \in \Lambda$成立和$C$有闭图,我们必有$u_0 \in C(x_0)$这与$u_0 \notin C(x_0)$矛盾。因此有$F(x_0, z_0) \subseteq C(x_0)$。所以$P$有闭图。由Aubin等[24]的定理3.1.8, $A \cap P: E \subseteq X \to 2^X$是u.s.c.具有非空闭值。由(v), P是Γ_凸值的且因此,由方程(1), $(A \cap P)(x) = A(x) \cap P(x)$, $\forall x \in E$,也是Γ_凸的。定理2.1的条件(iii)被满足。由(vi),对每一$x \in X$, $x \notin P(x)$且因此$x \notin A(x) \cap P(x)$,定理2.1的条件(iv)被满足。定理2.2的结论由定理2.1推得。

系 2.1 设$(X, D; \Gamma)$是LG_空间和Z是拓扑矢量空间。令$F: X \times X \to 2^Z$, $A: X \to 2^X$和$P: X \to 2^Z$是3个集值映象使得对每一$x \in X$, $P(x)$是Z内一闭点凸锥且$\mathrm{int}P(x) \neq \emptyset$。假设下列条件成立:

(i) A是u.s.c.紧映象具有非空闭Γ_凸值;

(ii) 集$E = \{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\}$在$X$内是开的,其中$P: X \to 2^X$由$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \subseteq Z \setminus (-\mathrm{int}P(x))\}$,

(iii) $F(x, z)$在$X \times X$上是l.s.c.;

(iv) 由$W(x) = Z \setminus (-\mathrm{int}P(x))$定义的映象$W: X \to 2^Z$有闭图;

(v) $F(x, z)$在z关于W是G_拟凸的;

(vi) 对每一$x \in X$, $F(x, x) \nsubseteq W(x)$。

则存在$\hat{x} \in X$使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \nsubseteq Z \setminus (-\mathrm{int}P(\hat{x})), \qquad \forall z \in A(\hat{x}).$$

证明 对每一$x \in X$,令$C(x) = Z \setminus (-\mathrm{int}P(x))$。易知定理2.2的一切条件被满足。

系2.1的结论由定理2.2推得•

系2.2 设$(X, D; \Gamma)$是LG_空间• 设$A: X \to 2^X$是集值映象和$\varphi: X \times X \to \mathbf{R}$是一函数使得

(i) A是u.s.c.紧映象具有非空闭Γ_凸值;

(ii) 集$E = \{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\}$在$X$内是开的, 其中$P: X \to 2^X$由$P(x) = \{z \in X: \varphi(x, z) \geqslant 0\}$定义;

(iii) $\varphi(x, z)$在$X \times X$上是l.s.c.;

(iv) 对$x \in X$, 集$\{z \in X: \varphi(x, z) \geqslant 0\}$是$\Gamma$_凸的;

(v) 对每一$x \in X$, $\varphi(x, x) < 0$•

则存在$\hat{x} \in X$使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } \varphi(\hat{x}, z) < 0, \qquad \forall z \in A(\hat{x})•$$

证明 令$Z \in \mathbf{R}$, 对每一$x \in X$, $C(x) = [0, \infty)$, 和对一切$x, z \in X$, $F(x, z) = \{\varphi(x, z)\}$• 容易验证定理2.2的一切条件成立• 系2.2的结论由定理2.2推得•

定理2.3 设$(X, D; \Gamma)$是LG_空间和Z是拓扑空间• 设$F: X \times X \to 2^Z$, $A: X \to 2^X$和$C: X \to 2^Z$是3个集值映象使得

(i) A是u.s.c.紧映象具有非空闭Γ_凸值;

(ii) 集$E = \{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\}$在$X$内是开的, 其中$P: X \to 2^X$由$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \not\subseteq C(x)\}$定义;

(iii) $F(x, z)$是u.s.c.紧映象具有闭值;

(iv) 映象C有开图;

(v) $F(x, z)$在z关于C是G_拟凹的;

(vi) 对每一$x \in X$, $F(x, x) \subseteq C(x)$•

则存在$\hat{x} \in X$使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \subseteq C(\hat{x}), \qquad \forall c \in A(\hat{x})•$$

即$\hat{x}$是GVQEP(Ⅱ)的解•

证明 定义集值映象$P, H: X \to 2^X$如下:

$$P(x) = \{z \in X: F(x, z) \not\subseteq C(x)\}, \qquad \forall x \in X,$$

$$H(x) = A(x) \cap P(x) = \{z \in A(x): F(x, z) \cap (Z \setminus C(x)) \neq \emptyset\}, \qquad \forall x \in X•$$

因为A是一紧映象, 故H也是一紧映象• 我们主张H有闭图• 的确, 令$\{(x_\alpha, z_\alpha)\}_{\alpha \in I}$是$\mathrm{Gr}(H)$内一网和$(x_\alpha, z_\alpha) \to (x_0, z_0)$• 则我们有对每一$\alpha \in I$, $z_\alpha \in A(x_\alpha)$和$F(x_\alpha, z_\alpha) \cap (Z \setminus C(x_\alpha)) \neq \emptyset$• 因此对每一$\alpha \in I$, 存在$u_\alpha \in F(x_\alpha, z_\alpha)$使得$u_\alpha \in Z \setminus C(x_\alpha)$• 由(iii), 不失一般性, 我们能假设$u_\alpha \to u_0$且因此$u_0 \in F(x_0, z_0)$• 由(iv), 由$W(x) = Z \setminus C(x)$定义的映象$W: X \to 2^Z$有闭图• 由此推得$u_0 \in W(x_0) = Z \setminus C(x_0)$和$F(x_0, z_0) \cap (Z \setminus C(x_0)) \neq \emptyset$• 由(i), 我们有$z_0 \in A(x_0)$• 所以$(x_0, u_0) \in \mathrm{Gr}(H)$和$H$的图$\mathrm{Gr}(H)$是闭的• 因此由Aubin等[24]的定理3.1.8, $H = A \cap P: E \to 2^X$是u.s.c.紧映象具有非空闭集• 由(i)和(v), $A \cap P$有Γ_凸值• 定理1.1的条件(iii)被满足• 由(vi), 对每一$x \in X$, $x \notin P(x)$且因此$x \notin A(x) \cap P(x)$, 定理1.1的条件(iv)被满足• 由定理1.1, 存在$\hat{x} \in X$使得$\hat{x} \in A(\hat{x})$和$A(\hat{x}) \cap P(\hat{x}) = \emptyset$• 由此推得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \subseteq C(\hat{x}), \qquad \forall z \in A(\hat{x})\cdot$$

即$\hat{x}$ 是GVQEP(Ⅱ)的一解•

系 2.3 设$(X, D; \Gamma)$ 是LG_空间和 Z 是拓扑矢量空间• 令 $F: X \times X \to 2^Z, A: X \to 2^X$ 和$P: X \to 2^Z$ 是3个集值映象使得对每一$x \in X$, $P(x)$ 是 Z 内一闭点凸锥具有$\operatorname{int}P(x) \neq \emptyset$• 假设下列条件被满足:

(ⅰ) A 是u.s.c.紧映象具有在非空闭 Γ_凸值;

(ⅱ) 集 $E = \left\{z \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\right\}$在$X$ 内是开的,其中$P: X \to 2^X$ 由$P(x) = \left\{z \in X: F(x, z) \not\subseteq - \operatorname{int}P(x)\right\}$ 定义;

(ⅲ) $F(x, z)$ 是u.s.c.紧映象具有闭值;

(ⅳ) 由 $C(x) = - \operatorname{int}P(x)$ 定义的映象 $C: X \to 2^Z$ 有开图;

(ⅴ) $F(x, z)$ 在 z 关于C 是G_拟凹的;

(ⅵ) 对每一$x \in X$, $F(x, x) \subseteq - \operatorname{int}P(x)$•

则存在$\hat{x} \in X$ 使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } F(\hat{x}, z) \subseteq - \operatorname{int}P(\hat{x}), \qquad \forall z \in A(\hat{x})\cdot$$

证明 对每一$x \in X$, 令 $C(x) = - \operatorname{int}P(x)$, 容易看出系2.3的结论由定理2.3推得•

系 2.4 设$(X, D; \Gamma)$ 是LG_空间• 设$A: X \to 2^X$ 是集值映象和$\varphi: X \times X \to \mathbf{R}$是函数使得

(ⅰ) A 是u.s.c.紧映象具有非空闭 Γ_凸值;

(ⅱ) 集 $E = \left\{x \in X: A(x) \cap P(x) \neq \emptyset\right\}$是$X$ 的开子集,其中$P: X \to 2^X$ 由$P(x) = \left\{z \in X: \varphi(x, z) \leqslant 0\right\}$ 定义;

(ⅲ) $\varphi(x, z)$ 是u.s.c.有界函数;

(ⅳ) 对每一$x \in X$, 集$\left\{z \in X: \varphi(x, z) \leqslant 0\right\}$ 是 Γ_凸的;

(ⅴ) 对每一$x \in X$, $\varphi(x, x) > 0$•

则存在$\hat{x} \in X$ 使得

$$\hat{x} \in A(\hat{x}) \text{ 和 } \varphi(\hat{x}, z) > 0, \qquad \forall z \in A(\hat{x})\cdot$$

证明 令 $Z \in \mathbf{R}$, 对每一 $x \in X$, $C(x) = (0, \infty)$ 和对每一$x, z \in X$, $F(x, z) = \left\{\varphi(x, z)\right\}$• 系2.4的结论由定理2.3推得•

注 2.1 定理2.1至定理2.3和系2.1至系2.4是不同于文献[1]至文献[10]中相关结果的新结果且我们的论证方法也是完全不同于文献[1]至文献[10]中的方法•

[参 考 文 献]

[1] LIN Lai_jiu, YU Zenn_tseun. On some equilibrium problems for Multimaps[J]. J Comput Appl Math, 2001, **129**(1/2): 171—183.

[2] DING Xie_ping. Quasi_variational inequalities and social equilibrium[J]. Appl Math Mech, 1991, **12**(7): 639—646.

[3] DING Xie_ping. Existence of solutions for quasi_equilibrium problems[J]. J Sichuan Normal Univ, 1998, **21**(6): 603—608.

[4] DING Xie_ping. Existence of solutions for quasi_equilibrium problems in noncompact topological spaces[J]. Computers Math Appl, 2000, **39**(3/4): 13—21.

[5] DING Xie_ping. Quasi_equilibrium problems with applications to infinite optimization and constrained

games in noncompact topological spaces[J]. Appl Math Lett, 2000, **13**(3): 21—26.

[6] DING Xie_ping. Quasi_equilibrium problems and constrained multiobjective games in generalized convex spaces[J]. Appl Math Mech, 2001, **22**(2): 160—172.

[7] DING Xie_ping. Maximal element principles on generalized convex spaces and their applications[A]. In: Argawal R P Ed. Mathematical Analysis and Applications (4)[C]. London: Taylor & Francis, 2002, 149—174.

[8] LIN Lai_jiu, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(2): 167—181.

[9] CHEN Ming_po, LIN Lai_jiu, Park S. Remarks on generalized quasi_equilibrium problems[J]. Nonlinear Anal, 2003, **52**(2): 433—444.

[10] Park S. Fixed points and quasi_equilibrium problems[J]. Math Computer Modelling, 2000, **32**(11/13): 1297—1304.

[11] Ansari Q H, Yao J C. An existence result for the generalized vector equilibrium problem[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(8): 53—56.

[12] Oettli W, Schlager D. Existence of equilibria for g_monotone mappings[A]. In: Takahashi W, Tanaka T Eds. Nonlinear Analysis and Convex Analysis[C]. Singapore: World Scientific Pub, 1999, 26—33.

[13] DING Xie_ping, Park J Y. Fixed points and generalized vector equilibria in G_convex spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 2003, **34**(6): 973—990.

[14] DING Xie_ping, Park J Y. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2004, **120**(2): 225—235.

[15] LIN Lai_jiu, YU Zenn_tsuen, Kassay G. Existence of equilibria for multivalued mappings and its application to vectorial equilibria[J]. J Optim Theory Appl, 2002, **114**(1): 189—208.

[16] Giannessi F. Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria[M]. London: Kluwer Academic Publishers, 2000, 403—422.

[17] Park S. Fixed points of better admissible maps on generalized convex spaces[J]. J Korean Math Soc, 2000, **37**(6): 885—899.

[18] Park S. Fixed point theorems in locally G_convex spaces[J]. Nonlinear Anal, 2002, **48**(6): 869—875.

[19] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 551—571.

[20] Tarafdar E. Fixed point theorems in locally H_convex uniform spaces[J]. Nonlinear Anal, 1997, **29**(9): 971—978.

[21] Horvath C D. Contractibility and generalized convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341—357.

[22] Aliprantis C D, Border K C. Infinite Dimensional Analysis[M]. New York: Springer_Verlag, 1994, 456—520.

[23] YUAN Xian_zhi. KKM Theory and Applications in Nonlinear Analysis[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1999, 229—321.

[24] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

Generalized Vector Quasi_Equilibrium Problems in Locally G_Convex Spaces

DING Xie_ping
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: Some classes of generalized vector quasi_equilibrium problems (in short, GVQEP) are introduced and studied in locally G_convex spaces which includes most of generalized vector equilibrium problems, generalized vector variational inequality problems, quasi_equilibrium problems and quasi_variational inequality problems as special cases. First, an equilibrium existence theorem for one person games is proved in locally G_convex spaces. As applications, some new existence theorems of solutions for the GVQEP are established in noncompact locally G_convex spaces. These results and argument methods are new and completely different from that in recent literature.

Key words: generalized vector quasi_equilibrium problem; one person game; equilibrium; locally G_convex space