应用数学和力学, 第 26 卷 第 4 期(2005 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0489_08

含两组状态变量的等变分歧问题在左右等价群下的开折*

郭瑞芝[1,2], 李养成[1]

(1. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 长沙 410083;
2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 长沙 410081)

(郭兴明推荐)

摘要: 基于奇点理论中光滑映射芽的左右等价关系, 讨论多参数等变分歧问题关于左右等价的开折• 将这种等变分歧问题的状态变量分为两组, 其中属于同一组的诸状态变量可以独立地变化, 而属于另一组的诸状态变量在变化过程中依赖于前一组中的诸状态变量• 应用光滑映射芽开折理论中的相关方法和技巧, 得到了一个含两组状态变量的多参数等变分歧问题的开折是通用开折的充要条件•

关 键 词: 等变分歧问题; 左右等价群; 开折
中图分类号: O189.3; O177.91 文献标识码: A

引 言

在分歧问题的开折理论研究中, 文献[1~6]提供了各种形式的通用开折定理, 但它们都利用奇点理论中光滑映射芽的接触等价, 来定义分歧问题及其开折的等价关系, 并以此作为讨论的出发点• 文献[7]则基于奇点理论中光滑映射芽的左右等价关系, 来讨论多参数等变分歧问题开折的通用性• 需指出的是, 该文对分歧问题的诸状态变量是“平等”对待而不加以区分• 本文将状态变量分为两组, 其中属于同一组的诸状态变量可以独立地变化, 而属于另一组的诸状态变量在变化过程中依赖于前一组中诸状态变量, 因而文献[7]中相应结果可视为本文结果的特殊情形•

1 基本概念与记号

本文将状态空间记为 $R^{n+m} = R^n \times R^m$, 其坐标记为 (x, y)• 假定 Γ 是紧致 Lie 群, 线性地作用在 $R^n \times R^m$ 和 R^p 上, 且 $R^n \times \{0\}$, $\{0\} \times R^m$ 均为 Γ_不变子空间, Γ 在 $R^n \times R^m$ 上的作用规定为对任意 $(x, y) \in R^n \times R^m$, $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y) \in R^n \times R^m$• 若映射芽 $g: (R^n \times R^m$

---

* 收稿日期: 2003_08_18; 修订日期: 2004_12_06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271023); 湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3072); 湖南省教育厅基金资助项目(04C383)
作者简介: 郭瑞芝(1962—), 女, 湖南湘潭人, 副教授, 博士(联系人. Tel: +86_731_8871432; E_mail: guorz6279@sohu.com)•

$\times R^k, 0) \to R^p$ 满足 $g(\gamma x, \gamma y, \lambda) = \gamma g(x, y, \lambda)$, 则称 g 是 Γ 等变映射芽, 其中 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in (R^k, 0)$ 称为分歧参数, 记所有这种 Γ 等变映射芽构成的集合为 $E_{n,m,k;p}(\Gamma)$. 当 $p = n$ 时, 简记为 $E_{n,m,k}(\Gamma)$ 或 $E_{x,y,\lambda}(\Gamma)$. 记 $\mathscr{M}_{n,m,k;p}(\Gamma) = \left\{ g \in E_{n,m,k;p}(\Gamma) \mid g(0) = 0 \right\}$. 令 $\varepsilon_{n,m,k}(\Gamma) = \left\{ f: (R^n \times R^m \times R^k, 0) \to \mathbf{R} \mid f(\gamma x, \gamma y, \lambda) = f(x, y, \lambda)\right.$, 对任意 $\gamma \in \Gamma, (x, y, \lambda) \in \left.(R^n \times R^m \times R^k, 0)\right\}$, 易见它是一个环, 称为 Γ 不变函数芽环. 由文献[1], 定理 XII6.8 可知, $E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 是有限生成的 $\varepsilon_{n,m,k}(\Gamma)$_模.

定义 1.1 以 Γ 为对称群, 含有两组状态变量的等变分歧问题(以下简称等变分歧问题)是指映射芽 $g \in E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 满足

$$g(0) = 0, \quad (D_{(x,y)}g)_0 = 0,$$

其中 $D_{(x,y)}g$ 表示 g 对 (x, y) 求导.

令 $\mathscr{R}(\Gamma) = \left\{ \Phi: (R^n \times R^m \times R^k, 0) \to (R^n \times R^m \times R^k, 0)\right.$ 是微分同胚芽 $\mid \Phi(x, y, \lambda) = (\phi_1(x, y, \lambda), \phi_2(y, \lambda), \phi_3(\lambda)), \phi_1 \in E_{n,m,k}(\Gamma), \phi_2 \in E_{m,k}(\Gamma), \phi_3 \in \varepsilon_\lambda^{\times k}; (D_x\phi_1)_{(0,0,0)} \in \mathscr{L}_\Gamma(R^n)^0, (D_y\phi_2)_{(0,0)} \in \mathscr{L}_\Gamma(R^m)^0, \left.(D\phi_3)_0 \in \mathscr{L}(R^k)^0\right\}$. 规定 $\mathscr{R}(\Gamma)$ 中的乘法为映射芽的复合, 则 $\mathscr{R}(\Gamma)$ 是一个群. 令 $\mathscr{L}(\Gamma) = \left\{ \Psi: (R^p, 0) \to (R^p, 0)\right.$ 是微分同胚芽 $\mid \Psi \in E_p(\Gamma), \left.(D\Psi)_0 \in \mathscr{L}_\Gamma(R^p)^0\right\}$, $\mathscr{L}(\Gamma)$ 中乘法亦为映射芽的复合, 则 $\mathscr{L}(\Gamma)$ 也是群. 令 $\mathscr{A}(\Gamma) = \mathscr{R}(\Gamma) \times \mathscr{L}(\Gamma)$, 称为等变左右等价群.

定义 1.2 设 $g, h \in E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 是两个等变分歧问题. 若存在 $(\Phi, \Psi) \in \mathscr{A}(\Gamma)$ 使得

$$\Psi(h(x, y, \lambda)) = g(\phi_1(x, y, \lambda), \phi_2(y, \lambda), \phi_3(\lambda)),$$

则称 g 与 h 是 $\mathscr{A}(\Gamma)$_等价的.

定义 1.3 设 $f \in E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 是等变分歧问题.

1) 轨道 $\mathscr{A}(\Gamma)\cdot f$ 在 f 处的切空间定义为

$$T\mathscr{A}(f, \Gamma) = (D_xf)(\mathscr{M}_{n,m,k}(\Gamma)) + (D_yf)(\mathscr{M}_{m,k}(\Gamma)) + (D_\lambda f)(\mathscr{M}_\lambda \cdot \varepsilon_\lambda^{\times k}) + \left\{ Z \circ f \mid Z \in \mathscr{M}_p(\Gamma) \right\}.$$

2) f 处的等变切空间定义为

$$T_e\mathscr{A}(f, \Gamma) = T_e\mathscr{K}(f, \Gamma) + (D_yf)(E_{m,k}(\Gamma)) + (D_\lambda f)(\varepsilon_\lambda^{\times k}),$$

其中 $$T_e\mathscr{K}(f, \Gamma) = (D_xf)(E_{n,m,k}(\Gamma)) + \left\{ Z \circ f \mid Z \in E_p(\Gamma) \right\}.$$

若 $\dim_{\mathbf{R}} E_{n,m,k;p}(\Gamma)/T_e\mathscr{A}(f, \Gamma) < +\infty$, 则称 f 是有限 $\mathscr{A}(\Gamma)$_余维的, 并记

$$\operatorname{codim}(f, \mathscr{A}(\Gamma)) = \dim_{\mathbf{R}} E_{n,m,k;p}(\Gamma)/T_e\mathscr{A}(f, \Gamma).$$

当 $$\dim_{\mathbf{R}} E_{n,m,k;p}(\Gamma)/T_e\mathscr{A}(f, \Gamma) < +\infty \tag{1}$$

时, 显然 f 具有有限 $\mathscr{A}(\Gamma)$_余维.

定义 1.4 设 $f_0 \in E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 是一个等变分岐问题.

1) f_0 的一个 s_参数开折是指映射芽 $F: (R^n \times R^m \times R^k \times R^s, 0) \to R^p \times R^s, F(x, y, \lambda, u) = (f(x, y, \lambda, u), u)$ 满足: (i) $f(x, y, \lambda, 0) = f_0(x, y, \lambda)$; (ii) $f(\gamma x, \gamma y, \lambda, u) = \gamma f(x, y, \lambda, u)$, 其中 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_s) \in (R^s, 0)$ 称为开折参数.

形式地定义 F 沿子空间 R^p 的切空间为

$$T_e\mathscr{A}(F, \Gamma) = (D_xf)(E_{n,m,k,s}(\Gamma)) + (D_yf)(E_{m,k,s}(\Gamma)) + (D_\lambda f)(\varepsilon_{\lambda,u}^{\times k}) + \left\{ Z \circ F \mid Z \in E_{p,s}(\Gamma) \right\}.$$

2) 假定 F 是 f_0 的 s_参数开折, $h: (R^t, 0) \to (R^s, 0)$ 是光滑映射芽, 定义 $h^* F: (R^n \times R^m \times$

$R^k \times R^t, 0) \to R^p \times R^t$, $(h^* F)(x, y, \lambda, v) = (f(x, y, \lambda, h(v)), v)$• 显然 $h^* F$ 是f_0 的 t_参数开折, 称 $h^* F$ 是由h 诱导的F 的拉回•

定义 1.5 设$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 是一个等变分歧问题•

1) 设 F, G 是f_0 的两个 l_参数开折• 称 F 和G 是 $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构的, 如果存在微分同胚芽 $\Phi: (R^n \times R^m \times R^k \times R^l, 0) \to (R^n \times R^m \times R^k \times R^l, 0)$, $\Phi(x, y, \lambda, u) = (\phi_1(x, y, \lambda, u), \phi_2(y, \lambda, u,), \phi_3(\lambda, u), u)$ 及微分同胚芽 $\Psi: (R^p \times R^l, 0) \to (R^p \times R^l, 0)$, $\Psi(z, u) = (\psi_1(z, u), u)$, 使得

$$F \circ \Phi = \Psi \circ G,$$

其中 $\phi_1(\gamma x, \gamma y, \lambda, u) = \gamma\phi_1(x, y, \lambda, u)$, $\phi_2(\gamma y, \lambda, u) = \gamma\phi_2(y, \lambda, u)$, $\psi_1(\gamma z, u) = \gamma\psi_1(z, u)$, 对任意 $\gamma \in \Gamma$, $(x, y, \lambda, u) \in (R^n \times R^m \times R^k \times R^l, 0)$, $(z, u) \in (R^p \times R^l, 0)$, 且 $\phi_1(x, y, \lambda, 0) = x$, $\phi_2(y, \lambda, 0) = y$, $\phi_3(\lambda, 0) = \lambda$, $\psi_1(z, 0) = z$•

若 F $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于f_0的常值开折 $G: (R^n \times R^m \times R^k \times R^l, 0) \to R^p \times R^l$, $G(x, y, \lambda, u) = (f_0(x, y, \lambda), u)$, 则称 F 是 $\mathscr{A}(\Gamma)$_平凡的•

2) f_0 的两个 s_参数开折F、G 称为 $\mathscr{A}(\Gamma)$_等价的, 如果 G $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于$h^* F$, 其中 h 是 F 和 G 的开折参数空间之间的微分同胚芽•

3) 设 F 是f_0 的 s_参数开折• 若 f_0 的任意开折 G $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 F 的某一拉回, 则称 F 是f_0 的通用开折• 通用开折中含开折参数最少的称为 f_0 的万有开折•

注 本文中未加说明的概念与记号可参看文献[8]•

2 主要结果

定理 2.1 设紧 Lie 群 Γ 线性地作用在$R^n \times R^m$ 与R^p 上$(n + m \geqslant p)$• 假定带有 k 个分歧参数的等变分歧问题$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 满足条件(1), 又 $F: (R^n \times R^m \times R^k \times R^s, 0) \to R^p \times R^s$, $F(x, y, \lambda, u) = (f(x, y, \lambda, u), u)$ 是f_0 的 s_参数开折, 开折参数 $u = (u_1, \cdots, u_s) \in (R^s, 0)$, 则 F 是f_0 的通用开折的充要条件是

$$E_{n, m, k; p}(\Gamma) = T_e\mathscr{A}(f_0, \Gamma) + \mathbf{R}\left\{\tilde{F}_1, \cdots, \tilde{F}_s\right\}, \tag{2}$$

其中 $\tilde{F}_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}(x, y, \lambda, 0)$, $i = 1, 2, \cdots, s$•

推论 2.2 令$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 是等变分歧问题且 $\operatorname{codim}(f_0, \mathscr{A}(\Gamma)) = s$, 则

(i) f_0 的所有 s_参数万有开折皆 $\mathscr{A}(\Gamma)$_等价;

(ii) 若 G 为f_0 的 r_参数通用开折, $r > s$, 则 G $\mathscr{A}(\Gamma)$_等价于f_0 的万有开折的常值开折(含有$(r - s)$ 个开折参数)•

推论 2.3 设$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 是等变分岐问题, $W \subset E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 是一个 s 维实向量子空间, 使得 $E_{n, m, k; p}(\Gamma) = T_e\mathscr{A}(f_0, \Gamma) \oplus W$, 又 $q_1(x, y, \lambda), \cdots, q_s(x, y, \lambda)$ 为 W 的基, 则

$$F(x, y, \lambda, u) = \left(f_0(x, y, \lambda) + \sum_{i=1}^{s} u_i q_i(x, y, \lambda), u\right)$$

是f_0 的一个万有开折•

3 定理 2.1 的证明

在证明定理 2.1 以前, 我们需要引进两个引理: 几何引理与代数引理• 而为了使几何引理

的证明来得简洁，先引进 $\mathscr{A}(\Gamma)$_开折的平凡性判别准则•

引理 3.1 设 F 是 $f_0 \in E_{n,m,k;p}(\Gamma)$ 的 1_参数开折，则 F 是 f_0 的 $\mathscr{A}(\Gamma)$_平凡开折的充要条件是分别存在 $(R^n \times R^m \times R^k \times \mathbf{R}, 0)$ 及 $(R^p \times \mathbf{R}, 0)$ 上的光滑向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} X_i(x, y, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m} Y_i(y, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j(\lambda, t)\frac{\partial}{\partial \lambda_j}$$

和 $$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{p} Z_i(z, t)\frac{\partial}{\partial z_i}$$

使得 $$DF \cdot X = Z \circ F, \tag{3}$$

其中 $X = (X_1, \cdots, X_n) \in E_{n,m,k+1}(\Gamma)$, $Y = (Y_1, \cdots, Y_m) \in E_{m,k+1}(\Gamma)$, $Z = (Z_1, \cdots, Z_p) \in E_{p,1}(\Gamma)$•

证明 必要性• 记 f_0 的 1_参数常值开折为 $G(x, y, \lambda, t) = (f_0(x, y, \lambda), t)$• 若 f_0 的 1_参数开折 F 是 $\mathscr{A}(\Gamma)$_平凡的，则存在微分同胚芽 Φ 和 Ψ 使得

$$F(\Phi(x, y, \lambda, t)) = \Psi(G(x, y, \lambda, t)), \tag{4}$$

其中 Φ 和 Ψ 满足定义 1.5 的条件 1)• 在式(4)两边对 t 求导得:

$$DF(\Phi(x, y, \lambda, t)) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, \lambda, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ G(x, y, \lambda, t),$$

因而 $$DF \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Phi^{-1} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}\right) \circ F•$$

令 $$X = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Phi^{-1}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1},$$

则 X、Z 具有引理所需形式且式(3)成立• 下面验证等变性条件成立• 现以 X 为例•

因为

$$X = \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \circ \Phi^{-1},$$

从而 $$X \circ \Phi(\gamma x, \gamma y, \lambda, t) = \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\gamma x, \gamma y, \lambda, t)•$$

由 Φ 的等变性有

$$X(\gamma \Phi(x, y, \lambda, t)) = \gamma \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(x, y, \lambda, t),$$

因此 $$X(\gamma x, \gamma y, \lambda, t) = \gamma \frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\Phi^{-1}(x, y, \lambda, t)) = \gamma X(x, y, \lambda, t)•$$

充分性• 考察常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x, y, \lambda, t), & i = 1, 2, \cdots n; \\ \dfrac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = Y_i(y, \lambda, t), & i = 1, 2, \cdots m; \\ \dfrac{\mathrm{d}\lambda_j}{\mathrm{d}t} = \Lambda_j(\lambda, t), & j = 1, 2, \cdots k; \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1• \end{cases} \tag{5}$$

取初始条件 $x(0) = x$, $y(0) = y$, $\lambda(0) = \lambda$, $u(0) = 0$• 据局部流理论，由满足上述初始条件的方程组(5)的一族解曲线可得到 $\mathbf{R}$_水平保持的 $(R^m \times R^m \times R^k \times \mathbf{R}, 0)$ 上的微分同胚芽 $\Phi(x, y, \lambda, t) = (\phi_1(x, y, \lambda, t), \phi_2(y, \lambda, t), \phi_3(\lambda, t), t)$ 满足

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\circ \Phi^{-1} = X,\ \phi_1(x, y, \lambda, 0) = x,\ \phi_2(y, \lambda, 0) = y,\ \phi_3(\lambda, 0) = \lambda.$$

下面利用方程组(5)解的唯一性以及 X、Y 满足等变性条件，来证明 ϕ_1、ϕ_2 满足等变性条件.

令 $\phi_1'(x, y, \lambda, t) = \gamma^{-1}\phi_1(\gamma x, \gamma y, \lambda, t)$, $\phi_2'(y, \lambda, t) = \gamma^{-1}\phi_2(\gamma y, \lambda, t)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_1'}{\partial t}(x, y, \lambda, t) &= \gamma^{-1}\frac{\partial \phi_1}{\partial t}(\gamma x, \gamma y, \lambda, t) = \gamma^{-1}X\circ \Phi(\gamma x, \gamma y, \lambda, t) = \\ &\gamma^{-1}X(\gamma\phi_1'(x, y, \lambda, t), \gamma\phi_2'(y, \lambda, t), \phi_3(\lambda, t), t) = \\ &X(\phi_1'(x, y, \lambda, t), \phi_2'(y, \lambda, t), \phi_3(\lambda, t), t),\end{aligned}$$

类似地，有 $\partial\phi_2'(y, \lambda, t)/\partial t = Y(\phi_2'(y, \lambda, t), \phi_3(\lambda, t), t)$，所以$(\phi_1'(x, y, \lambda, t), \phi_2'(y, \lambda, t), \phi_3(\lambda, t), t)$ 也是(5)的满足初始条件 $\phi_1'(x, y, \lambda, 0) = \gamma^{-1}\phi_1(\gamma x, \gamma y, \lambda, 0) = \gamma^{-1}\gamma x = x$, $\phi_2'(y, \lambda, 0) = \gamma^{-1}\phi_2(\gamma y, \lambda, 0) = y$, $\phi_3(\lambda, 0) = \lambda$的解，根据常微分方程组解的唯一性定理有 $\phi_1' = \phi_1$, $\phi_2' = \phi_2$，从而 ϕ_1、ϕ_2 满足等变性条件.　同样，积分向量场 Z 得 $\mathbf{R}$_水平保持的微分同胚芽 $\Psi: (R^p \times \mathbf{R}, 0) \to (R^p \times \mathbf{R}, 0)$, $\Psi(z, t) = (\psi_1(z, t), t)$，且$(\partial\Psi/\partial t)\circ\Psi^{-1} = Z$, $\psi_1(\gamma z, t) = \gamma\psi_1(z, t)$, $\psi_1(z, 0) = z$.　这样分别得到$(R^n \times R^m \times R^k \times \mathbf{R}, 0)$ 和$(R^p \times \mathbf{R}, 0)$ 上的微分同胚芽 Φ和 Ψ，且 Φ将$\partial/\partial t$ 的积分曲线族(一族水平直线)变换为向量场X 的一族积分曲线，Ψ将$\partial/\partial t$ 的积分曲线族(一族水平直线)变换为向量场 Z 的一族积分曲线，而式(3)说明：F 将向量场 X 的经过点(x, y, λ, t) 的积分曲线变换为 Z 的经过点$F(x, y, \lambda, t)$ 的积分曲线.　令 $G = \Psi^{-1}\circ F\circ\Phi$，则

$$DG\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\circ G.$$

若记 $G(x, y, \lambda, t) = (g(x, y, \lambda, t), t)$，则上式说明$\partial g/\partial t = 0$.　所以 $g(x, y, \lambda, t) = g(x, y, \lambda, 0) = f_0(x, y, \lambda)$，即 $G(x, y, \lambda, t) = (f_0(x, y, \lambda), t)$ 是f_0 的常值开折，因而 F 是 $\mathscr{A}(\Gamma)$_平凡的.

引理 3.2　设$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$, $F: (R^n \times R^m \times R^k \times R^{s+1}, 0) \to R^p \times R^{s+1}$是$f_0$ 的$(s+1)$_参数开折，$F(x, y, \lambda, u, t) = (f(x, y, \lambda, u, t), u, t)$, $f(x, y, \lambda, 0, 0) = f_0(x, y, \lambda)$，令 $F_1: (R^n \times R^m \times R^k \times R^s, 0) \to R^p \times R^s$, $F_1(x, y, \lambda, u) = (f(x, y, \lambda, u, 0), u)$，即 F_1 是 F 在$t = 0$上的限制.　如果在$(R^n \times R^m \times R^k \times R^{s+1}, 0)$ 和$(R^p \times R^{s+1}, 0)$ 上分别存在向量场芽

$$\begin{aligned}X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\xi_i(u, t)\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{k}\Lambda_i(\lambda, u, t)\frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \\ \sum_{i=1}^{m}Y_i(y, \lambda, u, t)\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n}X_i(x, y, \lambda, u, t)\frac{\partial}{\partial x_i},\end{aligned}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s}\xi_i(u, t)\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^{p}Z_j(z, u, t)\frac{\partial}{\partial z_j},$$

其中 $X = (X_1, \cdots, X_n) \in E_{n, m, k, s+1}(\Gamma)$, $Y = (Y_1, \cdots, Y_m) \in E_{m, k, s+1}(\Gamma)$, $Z = (Z_1, \cdots, Z_p) \in E_{p, s+1}(\Gamma)$，使得

$$DF\cdot X = Z\circ F, \tag{6}$$

则存在淹没芽 $h: (R^{s+1}, 0) \to (R^s, 0)$ 使得 F $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于$h^* F_1$.

证明　积分向量场X、Z 可得微分同胚芽 Φ及 Ψ，这里 $\Phi(x, y, \lambda, u, t) = (\phi_1(x, y, \lambda, u, t), \phi_2(y, \lambda, u, t), \phi_3(\lambda, u, t), q(u, t), t)$ 满足 $\phi_1 \in E_{n, m, k, s+1}(\Gamma)$, $\phi_2 \in E_{m, k, s+1}(\Gamma)$, $\phi_3 \in$

$\varepsilon^{\times k}_{\lambda, u, t}$, $q \in \varepsilon^{\times s}_{u, t}$; $\phi_1(x, y, \lambda, 0, 0) = x$, $\phi_2(y, \lambda, 0, 0) = y$, $\phi_3(\lambda, 0, 0) = \lambda$, $\Psi(z, u, t) = (\psi_1(z, u, t), q(u, t), t)$ 满足 $\psi_1 \in E_{p, s+1}(\Gamma)$, $q \in \varepsilon^{\times s}_{u, t}$; $\psi_1(z, 0, 0) = z$ 且

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Phi^{-1}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}.$$

因为 F 是F_1的1_参数开折, 由(6) 及引理3.1知: $\Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$是$F_1$的1_参数常值开折, 即

$$F \circ \Phi = \Psi \circ (F_1 \times id_{(\mathbf{R}, 0)}), \tag{7}$$

其中 $id_{(\mathbf{R}, 0)}$ 是$(\mathbf{R}, 0)$ 上的恒同映射芽. 定义映射芽 $h: (R^s \times \mathbf{R}, 0) \to (R^s, 0)$, $h(u, t) = q_t^{-1}(u)$, 并令 $\beta(u, t) = (h(u, t), t)$, 则 h 是淹没芽, β 是微分同胚芽. 由(7)得

$$F \circ \Phi \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta) = \Psi \circ (F_1 \times id_{(\mathbf{R}, 0)}) \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta).$$

$$(id_{(R^p, 0)} \times (q, \pi)) \circ \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta) =$$

$$(id_{(R^p, 0)} \times (q, \pi)) \circ (F_1 \times id_{(\mathbf{R}, 0)}) \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta),$$

其中 $\pi: (R^s \times \mathbf{R}, 0) \to \mathbf{R}$, $(u, t) \to t$ 为投射. 容易验证

$$(id_{(R^p, 0)} \times (q, \pi)) \circ (F_1 \times id_{(\mathbf{R}, 0)}) \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta) = h^* F_1.$$

令 $\Phi \circ (id_{(R^n \times R^m \times R^k, 0)} \times \beta) = \tilde{\Phi}$, $(id_{(R^p, 0)} \times (q, \pi)) \circ \Psi^{-1} = \tilde{\Psi}^{-1}$,

则 $F \circ \tilde{\Phi} = \tilde{\Psi} \circ h^* F_1$, 这说明 F $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于$h^* F_1$.

引理3.3 设$f_0 \in E_{n, m, k; p}(\Gamma)$ 满足条件(1). 假定 F 是f_0的 r_参数开折, $F(x, y, \lambda, u) = (f(x, y, \lambda, u), u)$, 又 $q_1, \cdots, q_r \in E_{n, m, k, r; p}(\Gamma)$, 则下列条件是等价的:

(i) $T_e \mathscr{A}(f_0, \Gamma) + \mathbf{R}\{q_1(x, y, \lambda, 0), \cdots, q_r(x, y, \lambda, 0)\} = E_{n, m, k; p}(\Gamma)$;

(ii) $T_e \mathscr{A}(F, \Gamma) + \varepsilon_u\{q_1(x, y, \lambda, u), \cdots, q_r(x, y, \lambda, u)\} = E_{n, m, k, r; p}(\Gamma)$.

证明 (ii) ⇒(i). 将$E_{n, m, k, r; p}(\Gamma)$ 中的成员限制在 $u = 0$ 上, 即得(i).

(i) ⇒(ii). 令

$$J_e(F) = \{(D_x f) X \mid X \in E_{n, m, k, s}(\Gamma)\},$$

$$J_e(f_0) = \{(D_x f_0) X_1 \mid X_1 \in E_{n, m, k}(\Gamma)\},$$

$$M = E_{n, m, k, s; p}(\Gamma)/J_e(F), \quad M_0 = M/\mathscr{M}_u \cdot M,$$

则由 Poenaru 定理(见文献[1]), M 是有限生成的$\varepsilon_{x, y, \lambda, u}(\Gamma)$_模且$M_0 \cong E_{n, m, k; p}(\Gamma)/J_e(f_0)$, 所以$M_0$ 是有限生成的 $\varepsilon_{x, y, \lambda}(\Gamma)$_模. 借助于环同态$f_0^*$, M_0可看成 $\varepsilon_z(\Gamma)$_模. 同理, 借助F^*, $\varepsilon_{x, y, \lambda, u}(\Gamma)$_模可以看成是$\varepsilon_{z, u}(\Gamma)$_模.

由条件(1)及(i)得到 $E_{n, m, k; p}(\Gamma)/J(f_0)$ 是有限生成的 $\varepsilon_z(\Gamma)$_模, 从而M_0是有限生成的$\varepsilon_z(\Gamma)$_模, 由文献[9] 中的命题1知道, M 是有限生成的 $\varepsilon_{z, u}(\Gamma)$_模. 我们令 $M' = E_{n, m, k, r; p}(\Gamma)/T_e \mathscr{A}(F, \Gamma)$, 其中$T_e \mathscr{A}(F, \Gamma) = J_e(F) + \{Z \circ F \mid Z \in E_{p, r}(\Gamma)\}$, 则 M' 是有限生成的$\varepsilon_{z, u}(\Gamma)$_模. 令$M'_0 = M'/\mathscr{M}_u \cdot M'$, 则$M'_0 \cong E_{n, m, k; p}(\Gamma)/T_e \mathscr{A}(f_0, \Gamma)$. 由于$f_0$满足条件(1) 且由引理条件(i)知, 存在$v_1, \cdots, v_s \in E_{m, k}(\Gamma)$, $w_1, \cdots, w_t \in \varepsilon^{\times k}_\lambda$ 使得

$$E_{n, m, k; p}(\Gamma) = T_e \mathscr{A}(f_0, \Gamma) + \mathbf{R}\{q_1(x, y, \lambda, 0), \cdots, q_r(x, y, \lambda, 0),$$
$$(D_y f_0) v_1, \cdots, (D_y f_0) v_s, (D_\lambda f_0) w_1, \cdots, (D_\lambda f_0) w_t\}.$$

记 $n_1 = q_1, \cdots, n_r = q_r$, $n_{r+1} = (D_y f) v_1, \cdots, n_{r+s} = (D_y f) v_s$, $n_{r+s+1} = (D_\lambda f) w_1, \cdots, n_{r+s+t} = (D_\lambda f) w_t$, 令 $n_{i, 0} = n_i \mid_{u=0}$, $i = 1, 2, \cdots, r + s + t$, 则

$$E_{n, m, k; p}(\Gamma) = T_e \mathscr{A}(f_0, \Gamma) + \mathbf{R}\{n_{1, 0}, \cdots, n_{r+s+t, 0}\}.$$

故 $M'_0 = \mathbf{R}\{n_{1, 0}, \cdots, n_{n+s+t, 0}\}$. 而 $M'_0 = M'/\mathscr{M}_u \cdot M'$, 由文献[1] 引理 XV 7.1 有 $M' =$

$\varepsilon_u\left\{n_1, \cdots, n_{r+s+t}\right\}$• 于是 $E_{n,m,k,r,p}(\Gamma) = T_e \mathscr{A}(F, \Gamma) + \varepsilon_u\left\{n_1, \cdots, n_{r+s+t}\right\} \subset T_e \mathscr{A}(F, \Gamma) + \varepsilon_u\left\{n_1, \cdots, n_r\right\}$, 从而(ii)成立•

定理 2.1 的证明 仅证充分性• 假定 G 是 f_0 的任意一个 r_参数开折, 将 $G:(R^n \times R^m \times R^k \times R^r, 0) \to R^p \times R^r$ 写为 $G(x, y, \lambda, v) = (f_0(x, y, \lambda) + g(x, y, \lambda, v), v)$, 其中 $g(x, y, \lambda, 0) = 0$• 令 $H:(R^n \times R^m \times R^k \times R^s \times R^r, 0) \to R^p \times R^s \times R^r$ 定义为 $H(x, y, \lambda, u, v) = (h(x, y, \lambda, u, v), u, v)$, 其中 $h(x, y, \lambda, u, v) = f(x, y, \lambda, u) + g(x, y, \lambda, v)$, 则 H 是 f_0 的 $(s+r)$_参数开折• 令 $H_i(x, y, \lambda, u, v_1, \cdots, v_{r-i}) = H(x, y, \lambda, u, v_1, \cdots, v_{r-i}, \underbrace{0, \cdots, 0}_{i})$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 则 $H_r = F$ 且 $H|_{u=0} = G$•

断言 存在淹没芽 $A:(R^s \times R^r, 0) \to (R^s, 0)$ 使得 H $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 $A^* F$•

对 r 使用数学归纳法• 当 $r = 0$ 时, 令 $A = id_s$, $H = F$, 此时结论成立• 现假定断言对 $r-1$ 成立• 令 $R^{r-1} \to R^r$, $(v_1, \cdots, v_{r-1}) \to (v_1, \cdots, v_{r-1}, 0)$• 由归纳假设, 存在淹没芽 $A_1:(R^s \times R^{r-1}, 0) \to (R^s, 0)$ 使得 $A_1^* F$ $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 H_1• 令 $w = (u, v)$, $s + r = l$• 因为 $\partial h(x, y, \lambda, w)/\partial u_i|_{w=0} = \partial f(x, y, \lambda, u)/\partial u_i|_{u=0}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 定理假设中条件(2)可以改写成

$$T_e \mathscr{A}(f_0, \Gamma) + \mathbf{R}\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}(x, y, \lambda, 0), \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_s}(x, y, \lambda, 0)\right\} = E_{n,m,k;p}(\Gamma)•$$

由引理 3.3 得

$$T_e \mathscr{A}(H, \Gamma) + \varepsilon_w\left\{\frac{\partial h}{\partial u_1}(x, y, \lambda, w), \cdots, \frac{\partial h}{\partial u_s}(x, y, \lambda, w)\right\} = E_{n,m,k,l;p}(\Gamma)•$$

又 $\partial h/\partial w_l = \partial h/\partial v_r = \partial g/\partial v_r \in E_{n,m,k,l,p}(\Gamma)$, 所以存在 $X = (X_1, \cdots, X_n) \in E_{n,m,k,l}(\Gamma)$, $Y = (Y_1, \cdots, Y_m) \in E_{m,k,l}(\Gamma)$, $(\Lambda_1, \cdots, \Lambda_k) \in \varepsilon_{\lambda, w}^{\times k}$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_s, \underbrace{0, \cdots, 0}_{r-1}) \in \varepsilon_w^{\times(l-1)}$, $Z = (Z_1, \cdots, Z_p) \in E_{p,l}(\Gamma)$ 使得

$$\frac{\partial h}{\partial w_l} = -\sum_{i=1}^{n} X_i(x, y, \lambda, w)\frac{\partial h}{\partial x_i} + Z \circ H - \sum_{i=1}^{m} Y_i(y, \lambda, w)\frac{\partial h}{\partial y_i} - \\ - \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j(\lambda, w)\frac{\partial h}{\partial \lambda_j} - \sum_{q=1}^{l-1} \xi_q(w)\frac{\partial h}{\partial w_q}• \tag{8}$$

分别定义 $(R^n \times R^m \times R^k \times R^l, 0)$ 和 $(R^p \times R^l, 0)$ 上的光滑向量场芽

$$X = \frac{\partial}{\partial w_l} + \sum_{q=1}^{l-1} \xi_q(w)\frac{\partial}{\partial w_q} + \sum_{j=1}^{k} \Lambda_j(\lambda, w)\frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \\ \sum_{i=1}^{m} Y_i(y, \lambda, w)\frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=1}^{n} X_i(x, y, \lambda, w)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial w_l} + \sum_{q=1}^{l-1} \xi_q(w)\frac{\partial}{\partial w_q} + \sum_{i=1}^{p} Z_i(z, w)\frac{\partial}{\partial z_i},$$

则(8)变成为

$$DH \cdot X = Z \circ H•$$

由引理 3.2, 存在淹没芽 $A_2:(R^s \times R^r, 0) \to (R^s \times R^{r-1}, 0)$ 使得 H $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 $A_2^* H_1$• 从而 H $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 $A_2^* \circ A_1^* F = (A_1 \circ A_2)^* F$• 令 $A = A_1 \circ A_2$, 则 A 是淹没• 令 $h' = A|_{u=0}$, 则 $h':(R^r, 0) \to (R^s, 0)$ 是光滑映射芽• 又 $H|_{u=0} = G$, 故 G $\mathscr{A}(\Gamma)$_同构于 $(h')^* F$•

[参 考 文 献]

[1] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. Vol.

2. New York: Springer_Verlag, 1988, 208—246.

[2] Lari_Lavassani A, Lu Y C. Equivariant multiparameter bifurcation via singularity theory[J]. J Dynamics Differential Equations, 1993, **5**(2): 189—218.

[3] Futer J E, Sitta A M, Stewart I. Singularity theory and equivariant bifurcation problems with parameter symmetry[J]. Math Proc Cambridge Philos Soc, 1996, **120**(3): 547—578.

[4] 李养成, 邹建成. 带有多个分歧参数的等变分歧问题的万有开折[J]. 数学学报, 1999, **46**(6): 1071—1076.

[5] 胡凡努, 李养成. 关于两状态变量组的等变分歧问题的通用开折[J]. 数学理论与应用, 2000, **20**(3): 50—57.

[6] 李兵, 钱祥征. 等变两参数分歧问题的开折[J]. 数学学报, 2001, **44**(2): 377—384.

[7] 高守平, 李养成. 多参数等变分歧问题关于左右等价的开折[J]. 数学年刊, A辑, 2003, **24**(3): 341—348.

[8] 李养成. 光滑映射的奇点理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002, 159—197.

[9] 崔登兰, 李养成. 等变奇点理论中的一类有限生成模[J]. 湖南师范大学自然科学学报, 1996, **19**(4): 11—14.

Unfolding of Multiparameter Equivariant Bifurcation Problems With Two Groups of State Variables Under Left_Right Equivalent Group

GUO Rui_zhi[1,2], LI Yang_cheng[1]

(1. School of Mathematics and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, P.R.China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, P.R.China)

Abstract: Based on the left_right equivalent relation of smooth map_germs in singularity theory, the unfoldings of multiparameter equivariant bifurcation problems with respect to left_right equivalence are discussed The state variables of such an equivariant bifurcation problem were divided into two groups, in which the first can vary independently, while the others depend on the first in the varying process. By applying related methods and techniques in the unfolding theory of smooth map_germs, the necessary and sufficient condition for an unfolding of a multiparameter equivariant bifurcation problem with two groups of state variables to be versal is obtained.

Key words: equivariant bifurcation; left_right equivalent group; unfolding