应用数学和力学, 第 26 卷 第 4 期(2005 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0481_08

非线性发展方程的 Taylor 展开方法*

何银年

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(张鸿庆、许政范推荐)

摘要: 提出了积分非线性发展方程的新方法, 即 Taylor 展开方法• 标准的 Galerkin 方法可以看作 0_阶 Taylor 展开方法, 而非线性 Galerkin 方法可以看作 1_阶修正 Taylor 展开方法• 此外, 证明了数值解的存在性及其收敛性• 结果表明, 在关于严格解的一些正则性假设下, 较高阶的 Taylor 展开方法具有较高阶的收敛速度• 最后, 给出了用 Taylor 展开方法求解二维具有非滑移边界条件 Navier_Stokes 方程的具体例子•

关 键 词: 非线性发展方程; Navier_Stokes 方程; Taylor 展开方法; 收敛速度
中图分类号: O242.21; 241.82 文献标识码: A

引 言

自然科学中许多重要物理问题都归结为非线性发展方程的研究, 这是一个极有趣的课题[1,2]• 非线性发展方程本身及其数值逼近研究在理论数学和计算数学领域都是非常重要的, 非线性发展方程逼近理论的一个有趣的特点就是泛函分析方法在数值逼近中的应用•

本文应用文献[3~5]中提出的Taylor 展开方法去数值求解某些非线性发展方程• 标准Galerkin 方法可以看作 0_阶 Taylor 展开方法; 修正非线性 Galerkin 方法[6] 可以看作 1_阶 Taylor 展开方法; 而标准非线性 Galerkin 方法[7~11] 可以看作 1_阶修正 Taylor 展开方法• 此外, 我们也证明了数值解 u_n 的收敛性• 结果表明, 在关于严格解的一些正则性假设下, 较高阶的 Taylor 展开方法具有较高阶的收敛速度• 最后, 我们给出了用 Taylor 展开方法求解二维具有非滑移边界条件 Navier_Stokes 方程的具体例子•

1 非线性发展方程

给定一个具有内积(•,•) 和范数| •| 的 Hilbert 空间 H, 我们将研究下列的抽象非线性发展方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu Au + R(u) = f, \tag{1}$$

及初始条件

---

* 收稿日期: 2003_12_30; 修订日期: 2004_09_24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371095); 陕西省自然科学基金资助项目(2003A01)
作者简介: 何银年(1953—) , 男, 陕西长安人, 教授, 博士(Tel: + 86_29_82665242; Fax: 86_29_83237901; E_mail: heyn@ mail. xjtu. edu. cn)•

$$u(0)=u_0,\qquad u_0\in H,\tag{2}$$

其中 $\nu>0$ 是粘性参数, 算子 A 是 H 中定义域为 $D(A)$ 且在 H 中稠密的线性无界自共轭算子• 我们假定 A 是正闭的, 其逆算子 A^{-1} 在 H 中是紧的• 则我们对任意 $s\in\mathbf{R}$ 可定义 A 的幂次 A^s; 当赋于范数 $|A^s\cdot|$ 时, $D(A^s)$ 是一Hilbert 空间• 我们也设 $V=D(A^{1/2})$ 具有范数 $\|\cdot\|=|A^{1/2}\cdot|$ 并定义 V' 为 V 对偶空间•

由于 A^{-1} 在 H 中是紧的和自共轭, 则 A 特征向量 $\{w_j\}$ 构成 H 的标准正交基且满足

$$Aw_j=\lambda_j w_j,\qquad 0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots,\ \lambda_j\to\infty \text{ 当 } j\to\infty,\tag{3}$$

$R(\cdot,\cdot,\cdots,\cdot)$ 是由 $D(A)\times D(A)\times\cdots\times D(A)$ (k 次, $2\leqslant k$) 到 H 上的非线性算子, $f\in L^\infty(\mathbf{R}^+;H)$•

下面, 我们将提供非线性算子 R 的一些假设•

假设 1.1 假定对所有的 $u,v\in D(A)$, 非线性算子 R 满足

$$(R(u),u)\geqslant 0,\tag{4}$$

$$\left(\frac{1}{r!}D^rR(u)v^r,u\right)+\left(\frac{1}{(r-1)!}D^{r-1}R(u)v^{r-1},u\right)\geqslant 0\qquad(1\leqslant r\leqslant k),\tag{5}$$

$$\begin{cases}\|R(u)\|_{V'}\leqslant c_0\|u\||u|^{k/2}|Au|^{(k-2)/2},\\ |R(u)|\leqslant c_0\|u\||u|^{(k-1)/2}|Au|^{(k-1)/2},\end{cases}\tag{6}$$

$$\begin{cases}\|DR(u)v\|_{V'}\leqslant c_0|v|^{1/2}\|v\|^{1/2}\|u\|^{1/2}|u|^{(k-1)/2}|Au|^{(k-2)/2},\\ \|DR(u)v\|\leqslant c_0\|v\||u|^{(k-1)/2}|Au|^{(k-1)/2}+\\ \qquad c_0|v|^{1/2}|Av|^{1/2}\|u\||u|^{(k-2)/2}|Au|^{(k-2)/2},\end{cases}\tag{7}$$

$$\left\|\frac{1}{r!}D^rR(u)v^r\right\|_{V'}\leqslant c_0\|v\||v|^{r/2}|Av|^{(r-2)/2}|u|^{(k-r)/2}|Au|^{(k-r)/2}\qquad(2\leqslant r\leqslant k),\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r!}|D^rR(u)v^r|\leqslant{}& c_0\|v\||v|^{(r-1)/2}|Av|^{(r-1)/2}|u|^{(k-r)/2}|Au|^{(k-r)/2}+\\ & c_0\|u\||v|^{r/2}|Av|^{r/2}|u|^{(k-r-1)/2}|Au|^{(k-r-1)/2}\qquad(1\leqslant r\leqslant k-1),\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\|R(u)-R(v)\|_{V'}\leqslant{}& c_0|u-v|(|u|^{(k-1)/2}|Au|^{(k-1)/2}+\\ & |v|^{(k-1)/2}|Av|^{(k-1)/2}),\end{aligned}\tag{10}$$

其中 c_0 以及以后出现的 c_i 都表示正常数•

上述的抽象假设特别适合于 Navier_Stokes 方程, Kuramoto_Sivashinsky 方程等• 为了简单, 我们将检验假设式(4)~(10)对于二维有界区域 Ω 上具有非滑移边界条件的 Navier_Stokes 方程问题成立• 我们考虑 $L^2(\Omega)^2$ 空间的一个闭子空间 H (见文献[12]),

$$H=\left\{v\in L^2(\Omega)^2;\ \mathrm{div}v=0,\ v\cdot n|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

当赋予其 L^2_内积$(\cdot,\cdot)$ 和范数 $|\cdot|$, H 是一Hilbert 空间• 另一有用的空间是 V,

$$V=\left\{v\in H_0^1(\Omega)^2;\ \mathrm{div}v=0\right\},$$

它是 $H_0^1(\Omega)^2$ 的闭子空间, 具有内积 $((\cdot,\cdot))=(\nabla\cdot,\nabla\cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|=|\nabla\cdot|$• 我们设 P 是 $L^2(\Omega)^2$ 到 H 上的正交投影算子, 则成立

$$Au=-P\Delta u,\qquad\forall u\in D(A)=H^2(\Omega)^2\cap V$$

以及

$$R(u) = B(u,u),\ B(u,v) = P(u\cdot\nabla)v, \qquad \forall u, v \in V. \tag{11}$$

根据上述记号, 二维有界区域上具有非滑移边界条件的 Navier_Stokes 方程可以写为式(1)、(2) 的形式, 其中, A 是H 中线性无界、自共轭正的闭算子, A 的逆A^{-1} 在H 中是紧的[1, 12], 因此, 式(3) 对于Stokes 算子A 是有效的. 其次, 我们知道双线性算子$B(\cdot,\cdot)$ 满足下列估计:

$$(B(u,v),w) = -(B(u,w),v), \qquad \forall u, v, w \in V, \tag{12}$$

$$\|B(u,v)\|_{V'} \leqslant c_1\|u\|^{1/2}|u|^{1/2}\|v\|^{1/2}|v|^{1/2}, \qquad \forall u, v \in V, \tag{13}$$

$$|B(u,v)| \leqslant c_1\|v\||u|^{1/2}|Au|^{1/2}, \qquad \forall u \in D(A), v \in V, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\|B(u,u) - B(v,v)\|_{V'} \leqslant \|B(u-v,u)\|_{V'} + \|B(v,u-v)\|_{V'} \leqslant \\ &\quad |u-v|\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)^2} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)^2}\right), \qquad \forall u, v \in D(A),\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)^2} \leqslant c_1|u|^{1/2}|Au|^{1/2}, \qquad \forall u \in D(A). \tag{16}$$

根据式(12)~(16), 对所有 $u, v \in V$

$$DR(u)v = B(u,v) + B(v,u),\quad \frac{1}{2!}D^2R(u)v^2 = B(v,v),$$

由此看来由式(11) 定义的$R(\cdot)$ 是由$D(A)\times D(A)$ $(k = 2)$ 到H 上的非线性算子且满足式(4)~(10).

2 Taylor 展开方法

首先让我们回顾下列的Taylor 展开公式[2, 3].

定理 2.1 假定 $R: D(A) \to H$ 是k 次连续 Fr chet 可微的, 则对任意$p, q \in D(A)$, 下列带有积分余项的 Taylor 展开公式成立:

$$\begin{aligned}R(p+q) &= R(p) + \frac{1}{1!}DR(p)q + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}D^{r-1}R(p)q^{r-1} + \\ &\quad \frac{1}{(r-1)!}\int_0^1(1-t)^{r-1}D^rR(p+tq)q^r\,\mathrm{d}t, \qquad 1 \leqslant r \leqslant k.\end{aligned} \tag{17}$$

$$\frac{1}{k!}D^kR(p+tq)q^k = R(q). \tag{18}$$

对每个 $n > 0$, 设H_n 是H 的一有限维子空间, $P_n: H \to H_n$ 是正交投影算子. 为了引入Taylor 展开方法, 我们取 n 足够大, 且把式(1)、(2) 的解u 写作

$$u = p_n + q_n,\quad p_n = P_nu \in H_n,\quad q_n = (I - P_n)u \in H \setminus H_n,$$

使得p_n 表示流动的大涡分量, q_n 表示其小涡分量, 即当 $n \to \infty$时, $|q_n| \to 0$(见文献[1, 2]). 因此我们分别应用P_n 和$Q_n = I - P_n$ 作用于式(1) 得

$$\frac{\mathrm{d}p_n}{\mathrm{d}t} + \nu Ap_n + P_nR(p_n + q_n) = P_nf, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_n}{\mathrm{d}t} + \nu Aq_n + Q_nR(p_n + q_n) = Q_nf. \tag{20}$$

在本文中, 我们始终假定$R(u)$ 在$D(A)$ 上是k_次连续Fr chet 可微的. 我们也假定如果 $u_0 \in D(A)$ 以及$f \in L^\infty(\mathbf{R}^+; V)$, 则式(1)、(2) 允许有一个唯一解

$$u \in L^\infty(\mathbf{R}^+; D(A)) \cap L^2(0, T; D(A^{3/2})), \qquad \forall T > 0,$$

使得

$$|Au(t)| \leqslant M^2,\ \nu\int_0^t\|Au(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant M^2\left(1 + \int_0^t\|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right), \qquad \forall t \geqslant 0, \tag{21}$$

其中常数 $M > 0$ 仅仅依赖于数据 Ω, u_0 和 $f_\infty = \sup_{t\geqslant 0}|f(t)|$• 由式(3) 和(21), 我们得

$$|q_n(t)| \leqslant \lambda_{n+1}^{-1}|Aq_n(t)| \leqslant \lambda_{n+1}^{-1}|Au(t)| \leqslant \lambda_{n+1}^{-1}M, \qquad \forall t \geqslant 0• \tag{22}$$

因此, 式(3) 和(22) 表明对任意 $t \geqslant 0$,

$$|q_n(t)| \to 0, \qquad 当\ n \to \infty• \tag{23}$$

由于式(23), 对于 $1 \leqslant r \leqslant k$ 的 Taylor 展开公式(17) 可以由下列格式逼近:

r_阶格式:

$$R(p_n + q_n) \sim R(p_n) + DR(p_n)q_n + \cdots + \frac{1}{k!}D^rR(p_n)q_n^r \qquad (r = 0, 1, \cdots, k)•$$

注意方程(20) 关于 q_n 是 $H \setminus H_n$ 中的无穷维动力系统• 因此, 从计算的观点, 我们必须选择充分大的 N 分别用 $H_N \setminus H_n$ 和 $Q_n^N = P_N - P_n$ 去逼近 $H \setminus H_n$ 和 Q_n• 在第 3 节我们将给出 Taylor 展开方法的收敛性分析并提供 $N = N(n)$ 依赖于 n 的关系式• 于是我们将用 r_阶格式去逼近式(19) 的非线性项以及用用 $r-1$_阶格式去逼近式(20) 的非线性项(如果 $r \geqslant 1$)• 则我们得到下列的 Taylor 展开方法:

0_阶 Taylor 展开方法: 找 $u_n = y_n \in H_n$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} + \nu Ay_n + P_nR(y_n) = P_nf; \tag{24}$$

r_阶 Taylor 展开方法 $(1 \leqslant r \leqslant k)$: 找 $u_n = y_n + z_n \in H_N$, $y_n \in H_n$, $z_n \in H_N \setminus H_n$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} + \nu Ay_n + P_n\left(R(y_n) + DR(y_n)z_n + \cdots + \frac{1}{r!}D^rR(y_n)z_n^r\right) = P_nf, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}t} + \nu Az_n + Q_n^N\left(R(y_n) + DR(y_n)z_n + \cdots + \frac{1}{(r-1)!}D^{r-1}R(y_n)z_n^{r-1}\right) = Q_n^Nf; \tag{26}$$

$$\cdots\cdots,$$

其中 y_n 和 z_n 分别是 p 和 q 的逼近, 以及

$$y_n(0) = P_nu_0, \quad z_n(0) = Q_n^Nu_0• \tag{27}$$

特别, 我们注意到 0_阶 Taylor 展开方法事实上是标准 Galerkin 方法, 而 1_阶 Taylor 展开方法事实上是修正非线性 Galerkin 方法• 其次, 文献[7~ 10] 中叙述到 $\mathrm{d}z_n/\mathrm{d}t$ 对于大的时间 t 是小的, 我们在式(26) 中可忽略这一项, 于是得到标准非线性 Galerkin 方法[7~ 11]• 此外, 如果我们在式(26) 中取 $r = 0$, 在式(27) 中取 $r = 1$, 并当 t 充分大时忽略小项 $\mathrm{d}z_n/\mathrm{d}t$, 我们则得到后处理 Galerkin 方法[13]•

最后, 我们通过回顾 H_m 和 $P_m(m = n, N)$ 的一些性质[1, 2, 6~ 10] 结束这一节的讨论:

$$\begin{cases} P_mA = AP_m, \quad Q_mA = AQ_m, \quad \lambda_1|u|^2 \leqslant \|u\|^2, \qquad \forall u \in V, \\ \lambda_{m+1}|q|^2 \leqslant \|q\|^2, \quad \forall q \in V \setminus H_m, \quad \|p\|^2 \leqslant \lambda_m|p|^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall p \in H_m, \\ |A^sp|^2 + |A^sq|^2 = |A^s(p+q)|^2, \qquad \forall p \in H_m, \ q \in D(A^s) \setminus H_m, \end{cases} \tag{28}$$

其中 $s = 0, 1/2, 1, 3/2$•

3 收敛性分析

在这一节, 我们目的在于建立对应于 r_阶 Taylor 展开方法的数值解 u_n 的收敛速度• 我们也假定对于 $u_0 \in V$, u_n 满足象(21) 中 u 所满足的正则性•

定理 3.1 由 r_阶 Taylor 展开方法得到的数值解 u_n 满足下列的收敛速度: 对于 $r = 0$,

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$2M^2\left(2+\int_0^t\|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right)(1+G(t)\lambda_{n+1}^{-1})\lambda_{n+1}^{-2},\qquad\forall t\geqslant 0;\tag{29}$$

对于 $1\leqslant r\leqslant k$ 和 $t\geqslant 0$

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$2M^2\left(2+\int_0^t\|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right)((1+G(t)\lambda_{N+1}^{-1})\lambda_{N+1}^{-2}+c_rG(t)\lambda_{n+1}^{-(r+2)}),\tag{30}$$

其中 $c_r=(1+2^{k-r})\lambda_1^{-1}$,

$$G(t)=16\nu^2c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}M^{2(k-1)}\exp\left(\frac{16}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}M^{2(k-1)}t\right)\cdot\tag{31}$$

证明　在 $r=0$ 时, 证明是简单的, 可以被省略· 在 $r>0$ 时, 我们设 $e_n=P_nu-y_n$, $\varepsilon_n=Q_n^Nu-z_n$ 以及 $E_n=e_n+\varepsilon_n$· 根据Taylor 展开式(17), 我们由式(1)、(25)、(26) 得到

$$\frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}t}+\nu AE_n+P_N[R(u)-R(u_n)]+\frac{1}{r!}Q_n^ND^rR(y_n)z_n^r+$$
$$\frac{1}{r!}\int_0^1(1-s)^rP_ND^{r+1}R(y_n+sz_n)z_n^{r+1}\mathrm{d}s=0,\tag{32}$$

其中 $z_n=Q_n^Nu_n$· 取(32) 和 E 在 H 中的内积并利用(4)、(5), 我们得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_n|^2+\nu\|E_n\|^2+(R(u)-R(P_Nu),E_n)+(R(P_Nu)-R(u_n),E_n)+$$
$$\frac{1}{r!}(D^rR(y_n)z_n^r,\varepsilon_n)+\frac{1}{r!}\int_0^1(1-s)^r(D^{r+1}(y_n+sz_n)z_n^{r+1},E_n)\mathrm{d}s=0\cdot\tag{33}$$

由式(6)~(10), 我们发现

$$|(R(u)-R(P_Nu),E_n)|\leqslant\|R(u)-R(P_Nu)\|_{V'}\|E_n\|\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{4}{\nu}c_0^2|u-P_Nu|^2(|u|^{k-1}|Au|^{k-1}+|P_Nu|^{k-1}|P_NAu|^{k-1})\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{8}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}|u-P_Nu|^2|Au|^{2(k-1)},\tag{34}$$

$$|(R(P_Nu)-R(u_n),E_n)|\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{4}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}(|Au|^{2(k-1)}+|Au_n|^{2(k-1)})|E_n|^2,\tag{35}$$

$$\left|\left(\frac{1}{r!}(D^rR(y_n)z_n^r,\varepsilon_n\right)\right|\leqslant\lambda_{n+1}^{-1/2}\left|\frac{1}{r!}D^rR(y_n)z_n^r\right|\|\varepsilon_n\|\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n^2\|+\frac{8}{\nu}c_0^2\lambda_{n+1}^{-(r+2)}\lambda_1^{-(k-r)}\|Az_n\|^2|Az_n|^{2(r-1)}|Ay_n|^{2(k-r)}\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{8}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-r)}\lambda_{n+1}^{-(r+2)}\|Au_n\|^2|Au_n|^{2(k-1)},\tag{36}$$

$$\left|\frac{1}{r!}\int_0^1(1-s)^r(D^{r+1}R(y_n+sz_n)z_n^{r+1},E_n)\mathrm{d}s\right|=0\qquad(r=k),\tag{37}$$

$$\left|\frac{1}{r!}\int_0^1(1-s)^r(D^{r+1}R(y_n+sz_n)z_n^{r+1},E_n)\mathrm{d}s\right|\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{2}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-r)}\lambda_{n+1}^{-(r+2)}\|Az_n\|^2|Az_n|^{2r}(|Ay_n|+|Az_n|)^{2(k-r-1)}\leqslant$$
$$\frac{\nu}{8}\|E_n\|^2+\frac{2^{k-r}}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-r)}\lambda_{n+1}^{-(r+2)}\|Au_n\|^2|Au_n|^{2(k-1)}\cdot\tag{38}$$

由正则性假设式(21)和对 u_n 相似的假设，我们导出

$$\begin{cases} |Au|^2 \leqslant M^2,\ |Au_n|^2 \leqslant M^2, \\ \nu\max\left\{\int_0^t \|Au(s)\|^2\mathrm{d}s,\ \int_0^t \|Au_n(s)\|^2\mathrm{d}s\right\} \leqslant M^2\left(1+\int_0^t \|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right), \\ |(u-P_Nu|^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-2}|Q_NAu|^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-2}|Au|^2, \\ \|u-P_Nu\|^2 \leqslant \lambda_{N+1}^{-2}\|Au\|^2. \end{cases} \tag{39}$$

将式(33)和(34)～(39)结合产生

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|E_n|^2+\nu\|E_n\|^2 \leqslant{} & \frac{16}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}M^{2(k-1)}|E_n|^2+ \\ & (16+2^{k-r+1})\nu^{1}c_0^2M^{2(k-1)}\lambda_1^{-(k-r)}\lambda_{n+1}^{-(r+2)}\|Au_n\|^2+ \\ & \frac{16}{\nu}c_0^2M^{2(k-1)}\lambda_1^{-(k-1)}\lambda_{N+1}^{-2}\|Au\|^2. \end{aligned} \tag{40}$$

积分式(40)且利用式(39)，我们得到

$$\begin{aligned} & |E_n(t)|^2+\nu\int_0^t \|E_n(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \\ & \quad 16c_0^2\lambda_1^{k-1}\nu^{2}M^{2k}\left(1+\int_0^t \|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right)\exp\left(\frac{16}{\nu}c_0^2\lambda_1^{-(k-1)}M^{2(k-1)}t\right)\times \\ & \quad (\lambda_{N+1}^{-3}+(1+2^{k-r})\lambda_1^{r-1}\lambda_{n+1}^{-(r+2)}). \end{aligned} \tag{41}$$

此外，我们由式(39)得到

$$\begin{aligned} & |u(t)-P_Nu(t)|^2+\nu\int_0^t \|u(s)-P_Nu(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant \\ & \quad M^2\lambda_{N+1}^{-2}\left(2+\int_0^t \|f(s)\|^2\mathrm{d}s\right). \end{aligned} \tag{42}$$

因此，通过利用三角不等式和式(41)、(42)，我们得到式(30).

注 3.1 如果对于 r_阶 Taylor 展开方法选择 N 使得

$$\lambda_{N+1} = O(\lambda_{n+1}^{1+r/2}), \tag{43}$$

则

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t \|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s \leqslant C(t)\lambda_{n+1}^{-(r+2)}, \qquad \forall\, t \geqslant 0, \tag{44}$$

其中 $C(t)$ 是依赖于数据和时间 t 的一般性正常数.

注 3.2 对于 $r = 1, 2$，Taylor 展开方法在于在低维空间 H_n 解一非线性子问题，在高维空间 $H_N \setminus H_n$ 解一线性子问题，然而和标准 Galerkin 方法比较，r_阶 Taylor 展开方法 $(r = 1, 2)$ 以解一线性子问题的额外花费获得高的收敛速度.

4 例　子

在这一节，我们将说明 Taylor 展开方法对于二维有界区域上具有非滑移边界条件的 Navier_Stokes 方程的应用情形. 这时，Taylor 展开方法如下所述：

0_阶 Taylor 展开方法：找 $u_n = y_n \in H_n$ 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_n+\nu Ay_n+P_nB(y_n,y_n) = P_nf; \tag{45}$$

1_阶 Taylor 展开方法：找 $u_n = y_n+z_n \in H_N,\ y_n \in H_n,\ z_n \in H_N \setminus H_n$，使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_n+\nu Ay_n+P_n(B(y_n,y_n)+B(y_n,z_n)+B(z_n,y_n)) = P_nf, \tag{46}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z_n+\nu Az_n+Q_n^NB(y_n,y_n)=Q_n^Nf;\tag{47}$$

2_阶 Taylor 展开方法: 找 $u_n=y_n+z_n\in H_N,\ y_n\in H_n,\ z_n\in H_N\setminus H_n$, 使得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_n+\nu Ay_n+P_nB(y_n+z_n,y_n+z_n)=P_nf,\tag{48}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z_n+\nu Az_n+Q_n^N(B(y_n,y_n)+B(y_n,z_n)+B(z_n,y_n))=Q_n^Nf;\tag{49}$$

其中初始条件为

$$y_n(0)=P_nu_0,\ z_n(0)=Q_n^Nu_0\cdot$$

回顾文献[1,12],对于 $u_0\in D(A)$ 和$f\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V)$, u 满足正则性假设(21)• 相似地,我们可以证明对于 $u_0\in D(A)$, $f\in L^\infty(\mathbf{R}^+;V)$, u_n 也满足估计式(21)• 因此,我们由定理 3.1 和注 3.1 得出: 对于0_阶 Taylor 展开方法

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(t)\lambda_{n+1}^{-2},\qquad\forall t\geqslant 0;\tag{50}$$

对于 1_阶 Taylor 展开方法,如果选择 N 满足

$$\lambda_{N+1}=O(\lambda_{n+1}^{3/2}),\tag{51}$$

则

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(t)\lambda_{n+1}^{-3},\qquad\forall t\geqslant 0;\tag{52}$$

对于 2_阶 Taylor 展开方法,如果选择 N 满足

$$\lambda_{N+1}=O(\lambda_{n+1}^{2}),\tag{53}$$

则

$$|u(t)-u_n(t)|^2+\nu\int_0^t\|u(s)-u_n(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant C(t)\lambda_{n+1}^{-4},\qquad\forall t\geqslant 0\cdot\tag{54}$$

[参 考 文 献]

[1] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. New York, Berlin, Heidelberg, London: Springer_Verlag, 1988.

[2] Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for the nonlinear evolutionary equations[J]. J Differential Equations, 1988, **73**(2): 309—353.

[3] Ambrosetti A, Prodi G. A Primer of Nonlinear Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[4] 陈铭俊,陈仲英. 算子方程及其投影近似解[M]. 广州: 广东科技出版社, 1992.

[5] 何银年,李开泰. 非线性算子方程的 Taylor 展开方法[J]. 数学学报, 1998, **41**(2): 317—326.

[6] LI Kai_tai, HUANG Ai_xiang, HE Yin_nian. Full discrete nonlinear Galerkin methods[A]. In: YING Lun_gan, GUO Ben_yu Eds. Numerical Methods for Partial Differential Equations[C]. Singapore: World Scientific, 1992, 61—82.

[7] Marion M, Temam R. Nonlinear Galerkin methods[J]. SIAM J Numer Anal, 1989, **26**(5): 1139—1157.

[8] Devulder C, Marion M, Titi E S. On the rate of convergence of nonlinear Galerkin methods[J]. Math Comput, 1993, **60**(202): 495—514.

[9] SHEN Jie. Long time stability and convergence for fully discrete nonlinear Galerkin methods[J]. Appl Anal, 1990, **38**(4): 201—229.

[10] Heywood J G, Rannacher R. On the question of turbulence modeling by the approximate inertial man-

ifolds and the nonlinear Galerkin method[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1993, **30**(6): 1603—1621.

[11] Marion M, XU Jin_chao. Error estmates a new nonlinear Galerkin method based on two_grid finite elements[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1995, **32**(4): 1170—1184.

[12] Temam R. *Navier_Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*[M]. Amsterdam: North_Holland, 1984.

[13] Garcia_Archilla B, Novo J, Titi E S. An approximate inertial manifolds approach to postprocessing the Galerkin method for the Navier_Stokes equations[J]. *Math Comput*, 1999, **68**(227): 893—911.

Taylor Expansion Method for the Nonlinear Evolution Equations

HE Yin_nian

(Faculty of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China)

Abstract: A new numerical method of integrating the nonlinear evolution equations, namely the Taylor expansion method, was presented. The standard Galerkin method can be viewed as the 0_th order Taylor expansion method; while the nonlinear Galerkin method can be viewed as the 1_st order modified Taylor expansion method. Moreover, the existence of the numerical solution and its convergence rate were proven. Finally, a concrete example, namely the two_dimensional Navier_Stokes equations with a non slip boundary condition, was provided. The result is that the higher order Taylor expansion method is of the higher convergence rate under some assumptions about the regularity of the solution.

Key words: nonlinear evolution equation; Navier_Stokes equation; Taylor expansion method; convergence rate