文章编号: 1000_0887(2005) 04_0418_08

关于同宿分支的 Leontovich 分界线量*

骆海英[1,2,3], 李继彬[2]

(1. 中国科学院 大气物理研究所, 北京 100029;
2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093;
3. 中国科学院 研究生院, 北京 100039)

(我刊编委李继彬来稿)

摘要: 由 Leontovich 定义的鞍点量和分界线量是判断同宿轨道分支出极限环的数目及同宿环稳定性的主要判据• 利用 Tkachev 对多重极限环稳定性判定的方法, 对给定的系统, 得到了同宿环分支的第三阶分界线量的公式, 并对高阶分界线量做了猜测•

关 键 词: 同宿分支; 分界线量; 后继函数; 极限环
中图分类号: O175.14 文献标识码: A

引 言

设 $V_\lambda(x), x\in R^2, \lambda\in R^k$ 是一族 C^∞(或解析) 向量场, 设当 $\lambda=\lambda_0$ 时, 在相平面中, 原点 (0, 0) 是一个双曲鞍点, 并且有一个同宿环(或分界线环) Γ_0 同宿到原点• 轨线 Γ_0 在原点处的特征值之比是 $r(\lambda)=-\lambda_1/\lambda_2$, 其中 $\lambda_1<0<\lambda_2$ 是线性化系统在原点处的两个特征值• 通常情况下, 当 $\lambda\neq\lambda_0$, 并且 $|\lambda-\lambda_0|$ 充分小时, 轨线 Γ_0 附近将会出现极限环• 这就是被许多作者[1~3]研究过的同宿分支• 注意到

$$V_\lambda=P(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial x}+Q(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial y},$$

我们考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y,\lambda),\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y,\lambda)• \tag{1}$$

1951 年, E. A. Leontovich[4] 指出决定同宿环分支出极限环的个数取决于两个量:

i) 所谓的“鞍点量”, 它和焦点量类似, 可以运用一些已知的, 依赖于(1)式右边的参数的公式计算出来;

ii) 所谓的“分界线量”, 它和在 Γ_0 附近的极限环的后继函数的系数类似, 可由(1)式右边的值及它们在 Γ_0 上的偏导数决定•

然而, 在文献[4]中并不能找到任何证明和关于鞍点量及分界线量计算的信息• 1986 年 Roussarie[5] 首先对于同宿分支的鞍点量存在性和极限环分支的数目给予了证明, 它运用 Dulac 规范

* 收稿日期: 2003_06_20; 修订日期: 2004_12_03
基金项目: 国家自然科学基金(重大)资助项目(40221503; 40233029)
作者简介: 骆海英(1978—), 女, 河南人, 博士(联系人. Tel: +86_10_62043430; Fax: +86_10_62043526; E_mail: hyluo@mail.iap.ac.cn)•

型

$$\dot{x} = x,\quad \dot{y} = -y\left(1 + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(\lambda)(xy)^i\right)$$

来研究 Poincaré 映射(它是一个复合映射 $P = f \circ \Delta$, 其中 f 是轨线 Γ_0 的奇异区域的一个微分同胚, Δ 是轨线 Γ_0 的正规区域的一个传递映射)• 由此得到了一个 Poincaré 映射的 C^k_渐进的展开式[5~7]: 如果 $r(\lambda_0) = 1$, 那么当 $|\lambda - \lambda_0| \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} P_\lambda(x) - x = {} & \alpha_1(\lambda)[x\omega + \cdots] + \beta_1(\lambda)[x + \cdots] + \alpha_2(\lambda)[x^2\omega + \cdots] + \cdots + \\ & \beta_k(\lambda)[x^k + \cdots] + \alpha_{k+1}(\lambda)[x^{k+1}\omega + \cdots] + \psi_k(x, \lambda), \end{aligned} \tag{2}$$

当 $\lambda = \lambda_0$ 时,

$$P_0(x) - x = \alpha_1(0)x\ln x + \beta_1(0)x + \cdots + \beta_k(0)x^k + \alpha_{k+1}(0)x^{k+1}\ln x + \cdots, \tag{3}$$

其中 $\omega(x, \alpha_1) = (x^{-\alpha_1} - 1)/\alpha_1$, 当 $\alpha_1 \neq 0$ 时 $\omega = -\ln x$, 当 $\alpha_1 = 0$ 时 $\alpha_1(\lambda) = r(\lambda) - 1$; 此外 ψ_k 是一个关于 $x = 0$ 的, k_平面的 C^k 函数• ω 被称做向量场 V_λ 的 Leontovich_Ecalle_Roussarie 补偿子•

众所周知, 一阶非零的 $\alpha_k(0)$ 或 $\beta_k(0)$ 的正负号, 是判断同宿环 Γ_0 内在稳定性的准则• $\alpha_1(0) = (P_x(x, y, \lambda_0) + Q_y(x, y, \lambda_0))|_{(0,0)}$ 被称做粗鞍点量• 对任意阶 k 应用公式(3), 如果 $P_0(x)$ 非平坦, 那么

(i) 存在一个自然数 k, 使得

$$P(x) = x + \beta_k x^k + o(x^k),\qquad \beta_k \neq 0, \tag{4}$$

当 $k = 1$, 时 $\beta_1 > -1$;

(ii) 存在自然数 $k \geqslant 2$, 使得

$$P(x) = x + \alpha_k x^k\ln x + o(x^k\ln x),\qquad \alpha_k \neq 0; \tag{5}$$

基于此, Roussarie[5] 证明了

定理 A 对以上的 C^∞ 光滑向量场 V_λ, 存在同宿环 Γ_0 的一邻域 U 和 λ_0 的一邻域 U_1, 使得

(i) 若 $P(x)$ 有形式(4), 那么对 U_1 中的 λ, V_λ 在 U 内至少有 $2k$ 个极限环;

(ii) 若 $P(x)$ 有形式(5), 那么对 U_1 中的 λ, V_λ 在 U 内至少有 $2k - 1$ 个极限环•

在 Leontovich 的文献[4]中, (5)式中的非零的 α_k, 当 $k > 1$ 时被称为 $k - 1$ 阶鞍点量; (4)式中非零的 β_k, 当 $k > 1$ 时被称为 k 阶分界线量• Liu 和 Li[8], Joyal[3], Cai 和 Zhang[9] 等都对鞍点量的计算和性质做了深入的研究• 事实上, 通过变换 $y_1 = x + h_1(x, y)$, $y_2 = y + h_2(x, y)$, 系统(1)可以变成 Poincaré 规范型(参见 Amelikin 等的文献[10]和李伟固的文献[11], 等)•

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}a_m(y_1y_2)^m\right),\quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = -y_2\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}b_m(y_1y_2)^m\right)•$$

设当 $m \geqslant 1$ 时 $\alpha_{m+1} = a_m - b_m$, 那么数 α_{m+1} 恰好就是 m 阶鞍点量• 对于第一个非零的 α_{k+1}, 鞍点(原点)被称做 k 阶细鞍点• 和焦点量的计算类似, 可以通过给定的系统(1)得到鞍点量•

对任意的 $k \in \mathbf{Z}^+$ 怎样来计算分界线量?当 P 和 Q 都是实多项式时[12~16], 这是一个非常有趣的和 Hilbert 第 16 问题有关的问题• 自然地, 当极限环的周期趋向于无穷大时, 在 Γ_0 附近多重极限环的后继函数的值的极限值就是相应的分界线值• 在此基础上, 冯贝叶和钱敏[2] 证明了当 $\alpha_1(0) = 0$ 时

$$\beta_1(0) = \int_{\Gamma_0}(P_x(x,y,\lambda_0) + Q_y(x,y,\lambda_0))\,\mathrm{d}t \cdot \tag{6}$$

2001 年, 胡锐和冯贝叶[17] 证明了当 $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0$ 及 $\beta_1(0) = 0$ 时

$$\begin{cases} \beta_2(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\int_0^t (P_x + Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right) W_1\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t, \\ W_1 = \dfrac{1}{(P^2+Q^2)^2}[(3P_xQ_x + P_xP_y + Q_xQ_y + 3P_yQ_y)(Q^2 - P^2) + \\ \quad 2PQ(P_y^2 - Q_x^2 + 2P_x^2 - 2Q_y^2)] + \dfrac{1}{P^2+Q^2}[-Q(2P_{xx} + \\ \quad Q_{xy} + P_{yy}) + P(P_{xy} + Q_{xx} + 2Q_{yy})], \end{cases} \tag{7}$$

上式中 P, Q 及它们的高阶偏导数取参数 $\lambda = \lambda_0$ 时在轨线 Γ_0 的值. 这篇文章将证明

定理 1 如果

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0, \quad \beta_1(0) = \beta_2(0) = 0,$$

那么

$$\beta_3(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(2\int_0^t (P_x + Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right) W_2\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} W_2 = {} & \frac{1}{24(P^2+Q^2)^2}[(4Q^2 - P^2)P_{xxx} + (4P^2 - Q^2)Q_{yyy} + 3P^2P_{xyy} + \\ & 3Q^2Q_{xxy} - 9PQ(P_{xxy} + Q_{xyy}) - PQ(P_{yyy} + Q_{xxx})] + \\ & \frac{W_1(t)[(Q^2 - P^2)(Q_x + P_y) + 2PQ(P_x - Q_y)]}{8(P^2+Q^2)^2} + \frac{(Q_x - P_y)W_1(t)}{12(P^2+Q^2)} + \\ & \frac{(Q_x - P_y)(P_x + Q_y)[(Q^2 - P^2)(Q_x + P_y) + 2PQ(P_x - Q_y)]}{12(P^2+Q^2)^3} + \\ & \frac{1}{24(P^2+Q^2)^3}\Big\{P_x[P(P^2 - 15Q^2)P_{xx} + 20P^2QP_{xy} + P(Q^2 - 3P^2)P_{yy} - \\ & 2Q(P^2 + 3Q^2)Q_{xx} - 4PQ^2Q_{xy} + 2Q(3P^2 - Q^2)Q_{yy}] + \\ & Q_y[2P(3Q^2 - P^2)P_{xx} - 4P^2QP_{xy} - 2P(Q^2 + 3P^2)P_{yy} + \\ & Q(P^2 - 3Q^2)Q_{xx} + 20PQ^2Q_{xy} + Q(Q^2 - 15P^2)Q_{yy}] + \\ & Q_x[2Q(6P^2 - Q^2)P_{xx} + 2P(3Q^2 - 5P^2)P_{xy} + \\ & 2Q^3P_{yy} + P(3Q^2 + P^2)Q_{xx} + 2Q(3P^2 - Q^2)Q_{xy} + \\ & P(3Q^2 - 7P^2)Q_{yy}] + P_y[Q(3P^2 - 7Q^2)P_{xx} + \\ & 2P(3Q^2 - P^2)P_{xy} + Q(3P^2 + Q^2)P_{yy} + 2P^3Q_{xx} + \\ & 2Q(3P^2 - 5Q^2)Q_{xy} + 2P(6Q^2 - P^2)Q_{yy}]\Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

上式中 P, Q 及它们的高阶偏导数取参数 $\lambda = \lambda_0$ 时在轨线 Γ_0 上的值.

1 ¼±¶ 判断多重极限环稳定性的判定法则

1962 年 . . ¼±¶ 在文献[18] 中考虑解析系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y) \cdot \tag{10}$$

假设系统(10) 有一个周期为 T 的极限环 Γ, 在 Γ 的一个充分小的邻域中, 我们运用曲线坐标 (s, n), s 代表轨线 Γ 的弧长. 设点 C 是 Γ 上一点, 其弧长 $s = 0$, n 是穿过点 C 的法线长, 向

外为正, 设以时间 t 为参数时 Γ 的方程为

$$x = x(t),\quad y = y(t).$$

以弧长 s, $0 \leqslant s \leqslant l$ 为参数时 Γ 的方程为

$$x = \Phi(s),\quad y = \psi(s).$$

又设点 $A(x, y)$ 是 Γ 的充分小邻域内的一点, 并设它位于 Γ 上点 $B(\Phi(s), \psi(s))$ 的法线上, 于是 A 的直角坐标 (x, y) 和曲线坐标 (s, n) 的关系式为

$$x = \Phi(s) - n\psi'(s),\quad y = \psi(s) + n\Phi'(s), \tag{11}$$

上式中

$$\Phi'(s) = \left.\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right|_B,\quad \psi'(s) = \left.\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}\right|_B.$$

把(11)式代入(10)式, 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(s) + \Phi'(s)\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}s + n\Phi''(s)}{\Phi'(s) - \psi'(s)\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}s - n\psi''(s)} = \frac{Q(\Phi(s) - n\psi'(s),\ \psi(s) + n\Phi'(s))}{P(\Phi(s) - n\psi'(s),\ \psi(s) + n\Phi'(s))}. \tag{12}$$

从(12)式可得

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = \frac{Q\Phi' - P\psi' - n(P\Phi'' + Q\psi'')}{P\Phi' + Q\psi'} = F(s, n).$$

在 $n = 0$ 附近, 上式又可以写成

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}s} = nF_n'(s, 0) + \frac{n^2}{2!}F_n''(s, 0) + \frac{n^3}{3!}F_n'''(s, 0) + \cdots$$

假设闭轨线 Γ 的弧长为 l, 定义后继函数为

$$\Psi(n_0) = n(l, 0) - n_0 = \int_0^l F(s, n(s, n_0))\,\mathrm{d}s. \tag{13}$$

¼±É¶³ [18] 在 1962 年证明了, 如果

$$\begin{cases} \Psi_{n_0}'(n_0)\mid_{n_0=0} = \Psi_{n_0}''(n_0)\mid_{n_0=0} = \Psi_{n_0}'''(n_0)\mid_{n_0=0} = \cdots \\ \qquad = \Psi_{n_0}^{(k-1)}(n_0)\mid_{n_0=0} = 0, \\ \Psi_{n_0}^{(k)}(n_0)\mid_{n_0=0} < 0\ (> 0), \end{cases} \tag{14}$$

则当 k 是奇数时, 极限环 Γ 是稳定的(不稳定的);

如果

$$\begin{cases} \Psi_{n_0}'(n_0)\mid_{n_0=0} = \Psi_{n_0}''(n_0)\mid_{n_0=0} = \Psi_{n_0}'''(n_0)\mid_{n_0=0} = \cdots \\ \qquad = \Psi_{n_0}^{(k-1)}(n_0)\mid_{n_0=0} = 0, \\ \Psi_{n_0}^{(k)}(n_0)\mid_{n_0=0} \neq 0, \end{cases} \tag{15}$$

则当 k 是偶数时, 极限环 Γ 是半稳定的.

注意到

$$\Psi_{n_0}'(n_0) = \int_0^l F_{n_0}'(s, n(s, n_0))\,\mathrm{d}s = \int_0^l F_n'(s, n(s, n_0))\,n_{n_0}'(s, n_0)\,\mathrm{d}s,$$

$$n_{n_0}'(s, n_0) = 1 + \int_0^s F_n'(s, n)\,n_{n_0}'(s, n_0)\,\mathrm{d}s$$

以及

$$n_{n_0}'(s, n_0) = \exp\left(\int_0^s F_n'(t, n)\,\mathrm{d}t\right),$$

那么

$$\Psi'_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\exp\left(\int_0^l F'_n(s,n)|_{n=0}\mathrm{d}s\right)-1,$$

并且

$$h_1=\int_0^l F'_n(s,n)|_{n=0}\mathrm{d}s.$$

当 $\Psi'_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=0$ 时,

$$h_2=\Psi''_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\int_0^l F''_n(s,n)\exp\left(\int_0^s F'_n(s_1,n)|_{n=0}\mathrm{d}s_1\right)\Big|_{n=0}\mathrm{d}s;$$

当 $\Psi'_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\Psi''_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=0$ 时,

$$h_3=\Psi'''_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\int_0^l F'''_n(s,n)\exp\left(2\int_0^s F'_n(s_1,n)|_{n=0}\mathrm{d}s_1\right)\Big|_{n=0}\mathrm{d}s;$$

当 $\Psi'_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\Psi''_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\Psi'''_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=0$ 时,

$$h_4=\Psi^{(4)}_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\int_0^l F^{(4)}_n(s,n)\exp\left(3\int_0^s F'_n(s_1,n)|_{n=0}\mathrm{d}s_1\right)\Big|_{n=0}\mathrm{d}s;$$

……

一般情况下,当 $\Psi'_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\Psi''_{n_0}(n_0)|_{n_0}=\cdots=\Psi^{(k)}_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=0$ 时,

$$h_{k+1}=\Psi^{(k+1)}_{n_0}(n_0)|_{n_0=0}=\left(\int_0^l F'_n(s,n)\,n'_{n_0}\mathrm{d}s\right)^{(k)}_{n_0}\Bigg|_{n_0=0}=$$

$$\int_0^l F^{(k+1)}_n(s,n)\exp\left(k\int_0^s F'_n(s_1,n)|_{n=0}\mathrm{d}s_1\right)\Big|_{n=0}\mathrm{d}s. \tag{16}$$

把弧长参数 s 改为时间参数 t,则

$$h_1(T)=\int_{-T/2}^{T/2}(P_x+Q_y)|_\Gamma\mathrm{d}t, \tag{17}$$

$$h_2(T)=\frac{1}{2}\sqrt{P^2+Q^2}|_{t=0}\int_{-T/2}^{T/2}\exp\left(\int_0^t(P_x+Q_y)|_\Gamma\mathrm{d}\tau\right)W_1(t)|_\Gamma\mathrm{d}t, \tag{18}$$

这里的 $W_1(t)$ 是式(7) 中的 $W_1(t)$ (参见胡锐和冯贝叶的文献[17]);以及这篇文章的结果

$$h_3(T)=6(P^2+Q^2)|_{t=0}\int_{-T/2}^{T/2}\exp\left(2\int_0^t(P_x+Q_y)|_\Gamma\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)|_\Gamma\mathrm{d}t, \tag{19}$$

这里的 $W_2(t)$ 是(9) 式中的 $W_2(t)$.

当 $k\geqslant 4$ 时, h_k 的计算将会非常的复杂,但是它具有以下形式

$$h_k(T)=A(P^2,Q^2)|_{t=0}\int_{-T/2}^{T/2}\exp\left((k-1)\int_0^t(P_x+Q_y)|_\Gamma\mathrm{d}\tau\right)W_{k-1}(t)|_\Gamma\mathrm{d}t, \tag{20}$$

其中 $A(P^2,Q^2)$ 是关于(P^2,Q^2) 的某一函数, $W_{k-1}(t)$ 依赖与 P、Q 以及它们在 Γ 上的高阶偏导数.

2 当 $T\to\infty$ 时 $h_3(T)$ 的收敛性

在本文中,假设系统(1) 当 $\lambda=\lambda_0$ 时,在双曲鞍点(0, 0) 处有一个同宿环 Γ_0 穿过它. 由(3) 式定义的 Γ_0 附近的 Poincaré 映射,设

$$\alpha_1(0)=\beta_1(0)=\alpha_2(0)=\beta_2(0)=\alpha_3(0)=0.$$

则在 Γ_0 的一个充分小的邻域中,运用和第 1 节中同样的曲线坐标(s,n),便得到了由(13) 式所定义的后继函数 $\Psi(n_0)$.

运用文献[17]中的结果可知当 $\alpha_1(0)=\beta_1(0)=0$ 时,

$$\lim_{n_0\to 0}\Psi'(n_0)=\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}(P_x+Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t\right)-1=0;$$

当 $\alpha_1(0)=\alpha_2(0)=\beta_1(0)=0$ 时,

$$\lim_{n_0\to 0}\Psi''(n_0)=\frac{1}{2}\sqrt{P^2+Q^2}\mid_{t=0}\beta_2(0)=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{P^2+Q^2}\mid_{t=0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\int_0^t(P_x+Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_1(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t.$$

和文献[17]中的证明类似, 可以证明当 $\alpha_1(0)=\beta_1(0)=\alpha_2(0)=\beta_2(0)=\alpha_3(0)=0$ 时,

$$\lim_{n_0\to 0}\Psi'''(n_0)=6(P^2+Q^2)\mid_{t=0}\beta_3(0)=$$

$$6(P^2+Q^2)\mid_{t=0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2\int_0^t(P_x+Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t. \tag{21}$$

为了得到(21)式, 我们需要证明

$$\beta_3(0)=\lim_{T\to\infty}\frac{h_3(T)}{6(P^2+Q^2)\mid_{t=0}}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2\int_0^t(P_x+Q_y)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t \tag{22}$$

的极限存在.

基于此目的, 设 $B(0,r)$ 是鞍点(0, 0)的以 r 为半径的一个小环形邻域, M_1 和 M_2 是 Γ_0 上位于邻域 $B(0,r)$ 内的两个点, 它们相对应的时间参数分别为 $-T/2$ 和 $T/2$, Σ_1 和 Σ_2 分别是穿过点 M_1 和 M_2 的横截垂线, 轨线 Γ_0 内的轨线 Γ 在邻域 $B(0,r)$ 内和 Σ_1 和 Σ_2 分别相交于 N_1 和 N_2, 在曲线坐标 (s,n) 下只考虑 $\Psi'''(s,n_0)$ 在奇异区域的极限.

引理 1 在原点(0, 0)的小邻域 $B(0,r)$ 内存在一个 C^r_坐标变换 T_1: $u=x+h_1(x,y)$, $v=y+h_2(x,y)$, $(r\geqslant 3)$, 使得系统(1)具有以下的 Poincar 规范型

$$\begin{cases}\dot{u}=-\lambda u+a_1u^2v+a_2u^3v^2+u^4v^3R_1(u,v)=P(u,v),\\ \dot{v}=\lambda v+b_1uv^2+b_2u^2v^3+u^3v^4R_2(u,v)=Q(u,v).\end{cases} \tag{23}$$

把由上式所定义的函数 P 和 Q 代入到(9)式中的 W_2, 则当 $\alpha_2(0)=-(a_1+b_1)=0$ 时, 得到

$$W_2(u,v)=\frac{\lambda^6(a_2+b_2)(u^8+v^8+4u^4v^4-5u^2v^2(u^4+v^4))+uvG_1(u,v)}{\lambda^8(u^2+v^2)^4+uvG_2(u,v)},$$

上式中的 $G_1(u,v)$ 和 $G_2(u,v)$ 是关于 $u^mv^n(m+n>8)$ 的多项式. 于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(2\int_0^t(P_u+Q_v)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t=I_1+I_2+I_3+I_4\equiv$$

$$\left(\int_{-T/2}^{0}+\int_0^{T/2}+\int_{-\infty}^{-T/2}+\int_{T/2}^{\infty}\right)\exp\left(2\int_0^t(P_u+Q_v)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t. \tag{24}$$

易见, (24)式中的第一部分和第二部分的积分是有限的, 考虑(24)式中的第四部分的积分

$$I_4=\int_{T/2}^{\infty}\exp\left(2\int_0^t(P_u+Q_v)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}\tau\right)W_2(t)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\beta_1(0)=\int_{-\infty}^{\infty}(P_u+Q_v)\mid_{\Gamma_0}\mathrm{d}t=0,$$

于是当 $\alpha_3(0)=-(a_2+b_2)=0$ 时

$$I_4\leqslant A\int_{u(T/2)}^{0}\left(\frac{uvG_1(u,v)}{\lambda^8(u^2+v^2)^4+uvG_2(u,v)}\right)\times$$

$$\frac{du}{-\lambda u+a_1u^2v+a_2u^3v^2+u^4v^3R_1(u,v)},\tag{25}$$

上式中 A 是一个常数• 又注意到当 $u\to 0$ 时, 沿着 Γ_0 的稳定流形有 $v\to 0$• 易见(25) 式右面的极限是有限的• 用类似的方法, (24) 式中第三部分的积分也是有限的, 因此 $\beta_3(0)$ 的极限存在, 定理 1 得证•

3 当 $k>3$ 时对 $\beta_k(0)$ 的猜想

从上面的讨论可以猜测, 如果

$$\alpha_1(0)=\beta_1(0)=\alpha_2(0)=\cdots=\beta_{k-1}(0)=\alpha_k(0)=0,$$

那么

$$\lim_{n_0\to 0}\Psi^{(k)}(n_0)=B\beta_k(0),$$

上式中 $\Psi(n_0)$ 是由(13) 式定义的沿着轨线 Γ_0 的后继函数, B 是常数• 于是

$$\beta_k(0)=\frac{1}{B}\lim_{n_0\to 0}\Psi^{(k)}(n_0)•$$

因为 W_{k-1} 的计算太冗长, 对于 $k>3$的 $\beta_k(0)$, 它的公式很难计算, 但我们知道 $\beta_k(0)$ 是依赖于(1) 式中右边的值以及它们在 Γ_0 上的高阶偏导数•

[参 考 文 献]

[1] Andronov A A, Leontovich E A, Gordon I I, et al. Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane[M]. New York: John Wiley & Sons, 1973.

[2] 冯贝叶, 钱敏. 鞍点分界线环的稳定性及其分支出极限环的条件[J]. 数学学报, 1985, **28**(1): 53—70.

[3] Joyal P. Generalized Hopf bifurcation and its dual, generalized homoclinic bifurcation[J]. SIAM J Appl Math, 1988, **48**(3): 481—496.

[4] Leontovich E A. On the generation of limit cycles from a separatrix[J]. Dokl Acad Nauka, 1951, **78**(4): 641—644.

[5] Roussarie R. On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields[J]. Bol Soc Brasil Mat, 1986, **17**(1): 67—101.

[6] Roussarie R. A note on finite cyclicity and Hilbert' s 16th problem[A]. In: Bamom R, Labarca J, Palis Jr, et al Eds. Dynamical Systems, Valparaiso 1986, Lecture Notes in Math[C]. **1331**. New York: Springer_Verlag, 1988, 161—168.

[7] Roussarie R. Techniques in the theory of local bifurcations: cyclicity and desingularization[A]. In: Schlomiuk D Ed. Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields[C]. NATO ASI Series C. **408**. London: Kluwer Academic Publishers, 1993, 347—382.

[8] LIU Yi_rong, LI Ji_bin. Theory of values of singular point in complex autonomous differential systems[J]. Science in China, 1990, **33**(1): 10—23.

[9] CAI Sui_lin, ZHANG Ping_guang. A quadratic system with a weak saddle II[J]. Ann Differantial Equations, 1988, **4**(2): 131—142.

[10] Amelikin B B, Lukashivich H A, Sadovski A P. Nonlinear Oscillations in Second Order Systems[M]. Minsk: BGY lenin B I Press, 1982.

[11] 李伟固. 正规型理论及其应用[M]. 北京: 北京科技出版社, 2000.

[12] Hilbert D. Mathematical problems[J]. Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, 1976, **28**(1):

1—34.

[13] LUO Ding_jun, WANG Xian, ZHU De_ming, et al. Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems[M]. Singapore: World Scientific, 1997.

[14] Perko L M. Differential Equations and Dynamical Systems[M]. New York: Springer_Verlag, 1991.

[15] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1984.

[16] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 等. 微分方程定性理论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1995.

[17] 胡锐, 冯贝叶. 确定多重极限环的半稳定性及对二阶临界同宿环稳定性的判定[A]. 见: 国际动力系统和常微分方程会议, 北京, 2001.

[18] ¼±É¶³ . ¶À² ÇÀµº ¾ Í¶ º µÀÃÄ±ÄÀÉ¿ Í¶ ÅÃ½À³ º Ñ ÅÃÄÀ»Éº ³ ÀÃÄº ÁÀ½ÅÅÃÄÀ»Éº ³ ÀÃÄº º ¿¶ÅÃÄÀ»Éº ³ ÀÃÄº ЂЦЂ оцЄц к а к оЂщщ Ђ кБ к щ ЂокГ[J]. ±Ä¶¾ ±Ä º É¶Ã¼º » ³ ÀÂ¿º¼, 1962, **56**(3): 281—300.

What Are the Separatrix Values Named by Leontovich on Homoclinic Bifurcation

LUO Hai_ying[1, 2, 3], LI Ji_bin[2]

(1. LASG, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Science, Beijing 100029, P.R. China;

2. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P.R. China;

3. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, P.R. China)

Abstract: For a given system, by using the Tkachev method which concerned with the proof of the stability of a multiple limit cycle, the exact computation formula of the third separatrix values named by Leontovich for the multiple limit cycle bifurcation was given, which was one of the main criterions for the number of limit cycles bifurcated from a homoclinic orbit and the stability of the homoclinic loop, and a computation formula for higher separatrix values was conjectured.

Key words: homoclinic bifurcation; separatrix value; saddle value; limit cycle