应用数学和力学,第 26 卷 第 3 期(2005 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0363_09

一个新的有自由面渗流问题的变分不等式提法*

郑 宏[1,2], 刘德富[1], 李焯芬[3], 谭国焕[3]

(1. 三峡大学 土木水电学院,湖北 宜昌 443002;
2. 中国科学院 武汉岩土力学研究所 武汉 430071;
3. 香港大学 土木工程系)

(郭兴明推荐)

摘要: 建立了一个新的有自由面渗流问题的变分不等式提法, 提法通过将潜在出渗面上的边界条件提为Signorini型条件, 从而从理论上消除了出渗点的奇性并解决了出渗点的定位问题• 与其它变分不等式提法相比, 该提法有更好的数值稳定性•

关 键 词: 自由边界问题; 渗流; 变分不等式; 有限元
中图分类号: O29; TV139.14 文献标识码: A

引 言

无压渗流问题存在两类解法, 调整网格法和固定网格法• 前者在每一个迭代中都需要重新生成网格, 对非均质土体其计算量通常很大, 且常常会导致计算结果的不收敛, 因而现正被固定网格法所取代• 固定网格法又分为直觉化方法和变分不等式方法•

直觉化方法[1~3]中比较典型的有 Desai_Li[1]的剩余流量法(residual flow) , 张有天等[2]的初流量法, 以及 Bathe_Khoshgoftaar[3]的调整渗透系数法(Adjusting Permeability) • 剩余流量法和初流量法类似于应力分析中的初应力法(常刚度法) , 而调整渗透系数法则类似于切线刚度法• 这两类方法在本质上都是力图使干区内的渗流量远远低于湿区内的渗流量•

有着严格数学基础的变分不等式法[4~11]总是试图构造一个定义在固定区域上的新问题, 自由面及其上的条件没有被显式地包含在这个新问题中, 但是一旦当该问题获得求解, 就可以根据某些条件将自由面确定下来• 现已建立了好几种变分不等式模型, 它们的共同特点是非线性很强• Oden_Kikuchi[8], Chipot[10]曾就这些问题给出了详细的评论• 比较起来, 由 Brezis[5]等建议的扩展压力提法(expended pressure formulation) 的非线性相对较弱, 因而也取得了更广泛的应用[6~11]•

自由面的出渗点是所有现有的变分不等式提法中的一个奇点, 目前尚未从理论上解决出

* 收稿日期: 2004_08_17; 修订日期: 2004_11_27
基金项目: 湖北省杰出青年基金资助项目(2002122); 湖北省优秀创新团队基金资助项目(200307)
作者简介: 郑宏(1964-) , 男, 湖北南漳人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_27_87199226; Fax: + 86_27_87193386; E_mail: hzheng@whrsm.ac.cn)•

渗点的定位问题,从而使得所求得的自由面在临近出渗点时曲率会突然变大[7]• 作者认为出渗点的奇性是导致包括扩展压力提法在内的数值模型的网格依赖性的重要原因•

本文首先借鉴初流量法[2]的思想,将Darcy定律扩展到包含干区的整个区域 Ω;随后构造了一个定义在 Ω 上的新的边值问题• 在该问题中,为了确定出渗点的位置,我们令水头函数在潜在出渗面上的满足一Signorini型的边界条件• 最后建立了问题的变分不等式提法,该提法的非线性强度与Brezis的扩展压力提法相当,但由于消除了出渗点的奇性,从而克服了网格依赖性,显著地改善了数值稳定性•

1 问题的描述[12]

不失一般性,我们将以图1所示的二维土坝渗流问题为例• 流动区域 Ω_w 内任何一点 P 的水头定义为

$$\phi = y + p/\gamma_w \quad (于\ \Omega_w 内), \tag{1}$$

其中 y 是 P 点的垂直坐标分量, p 代表孔隙水压力, γ_w 是水的单位重• 假定 P 点的流速 $\boldsymbol{v}$ 满足Darcy定律

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{D}\nabla\phi, \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{D} = [K_{ij}]$ 为二阶渗透张量, $\nabla = \partial/\partial x_i$ 为梯度算子•

水在坝体内的流动应满足连续性方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \quad (于\ \Omega_w 内) \tag{3}$$

和下列边界条件:

1.1 水头边界条件

$$\phi = \bar{\phi} \quad (在\ \Gamma_\phi = AB + CD\ 上), \tag{4a}$$

$\bar{\phi}$ 在上、下游面分别为 H 和 h•

1.2 流量边界条件

$$q_n = -\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = 0 \quad (在\ \Gamma_q = BC\ 上), \tag{4b}$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 代表单位外法线向量•

1.3 自由面边界条件

$$\begin{cases} \phi = y \\ q_n = 0 \end{cases} \quad (在\ \Gamma_f = AE\ 上)• \tag{4c}$$

1.4 出渗面边界条件

$$\phi = y \quad (在\ \Gamma_s' = DE\ 上)• \tag{4d}$$

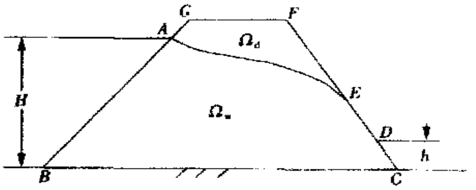

图1 土坝渗流示意图

由于自由面 Γ_f 的位置事先是未知的,因此确定 Γ_f 的位置就成了渗流分析的重要内容•

2 弱形式

让我们暂时假定自由面 Γ_f 的位置已知,则上述有自由面渗流问题的方程提法等价于变分提法:求满足 $\Gamma_g(=\Gamma_\phi + \Gamma_s' + \Gamma_f)$ 上水头条件的函数 ϕ,使得对于任意满足 Γ_g 上水头条件的函数 ψ,有

$$\int_{\Omega_w} (\nabla(\psi - \phi))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\Omega = 0• \tag{5}$$

3 延拓到全域上的广义 Darcy 定律

现在让我们将仅适用于湿区 Ω_w 的 Darcy 定律延拓到包含干区 Ω_d 的整个区域 Ω 上, 使得在干区内的流量为零, 得

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{D}' \nabla \phi, \tag{6}$$

式中

$$\boldsymbol{D}' = \begin{cases} \boldsymbol{D} & (\text{于 } \Omega_w \text{ 内}), \\ 0 & (\text{于 } \Omega_d \text{ 内}). \end{cases} \tag{7}$$

式(6) 也可以写成

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{D} \nabla \phi + \boldsymbol{v}_0, \tag{8}$$

这里 $\boldsymbol{v}_0$ 被称作初流速

$$\boldsymbol{v}_0(\phi) = \mathrm{H}(\phi - y)\boldsymbol{D} \nabla \phi, \tag{9a}$$

式中 $\mathrm{H}(x)$ 为 Heaviside 函数

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{当 } x < 0, \end{cases} \tag{9b}$$

即初流速 $\boldsymbol{v}_0$ 仅存在于干区 Ω_d 中, 用于抵消延拓后在干区内产生的"虚假" 渗流场 ϕ 所对应的流速 $-\boldsymbol{D} \nabla \phi$.

4 全域上的边值问题的 PDE(partial differential equation) 提法

显然在将 Darcy 定律延拓到整个区域 Ω 上后, 流速 $\boldsymbol{v}$ 仍满足连续性方程, 从而定义在 Ω 上的水头函数 ϕ 仍为拟调和函数. 为了回避 Ω_w 的不确定性, 我们将构造一个定义在全域 Ω 上边值问题, 该边值问题的基本未知函数仍为由(1) 式定义的水头函数 ϕ, 控制微分方程为广义 Darcy 定律(8) 式以及连续性方程(3), 函数 ϕ 满足的水头边界条件(4a) 和流量边界条件(4b) 保持不变. 在剩下的边界上, 包括 Ω_d 的边界 FGA、潜在出渗面 DF, 也应赋予恰当的边界条件.

考虑到在干区内无水, ϕ 在顶部边界 FGA 及潜在出渗面 DF 的上部 EF 上的流量 q_n 应为零; 同时, 联想到非饱和渗流理论, 可知在这部分边界上的任一点的总水头 ϕ 应小于其位置水头 y.

在潜在出渗面 DF 的下部 ED 上的总水头 ϕ 仍为其位置水头 y, 但由于水是往外流出的, 所以其流量 q_n 应小于零.

总之, 在边界 $DFGA$ 上, ϕ 应满足如下形式的互补条件:

$$\begin{cases} \phi \leqslant y, \quad q_n(\phi) \leqslant 0, \\ (\phi - y)q_n(\phi) = 0, \end{cases} \qquad \text{在 } \Gamma_s = DFGA \text{ 上}, \tag{10}$$

这一条件是 Signorini 型的, 而出渗点 E 就是使(10) 式中的两个不等式取等号的点.

至此, 我们要求定义在全域 Ω 上的 ϕ 满足控制微分方程(8)、(3) 和全部的外边界条件(4a)、(4b) 和(10). 利用拟调和函数的极值原理和强极值原理[13, 14], 不难证明这样的 ϕ 将全域 Ω 分成两个区域: 湿区(正压区)

$$\Omega_w = \{(x, y) \mid \phi > y\} \tag{11a}$$

和干区(负压区)

$$\Omega_d = \{(x, y) \mid \phi < y\} \tag{11b}$$

为了使 ϕ 在 Ω_w 上的限制就是原问题的解, 我们还要求 ϕ 在两区的交界面

$$\Gamma_{\mathrm{f}} = \{(x, y) \mid \phi = y\} \tag{11c}$$

上满足流量平衡条件

$$q_n|_{\Omega_{\mathrm{w}}} = q_n|_{\Omega_{\mathrm{d}}} = 0, \qquad 在\ \Gamma_{\mathrm{f}}\ 上, \tag{12}$$

Γ_{f} 上的条件(12)属于内部自由面,它对于问题的PDE提法是必需的[14~17]•

综上所述,我们构造的定义在全域 Ω 上边值问题的PDE提法为:求函数 ϕ, 使其满足控制微分方程(8)和(3),外边界条件(4a)、(4b)和(10),以及内部自由面条件(12)•

经过延拓处理,我们将原外部自由边界问题转换成了内部自由边界问题,而后者非常类似于弹塑性力学的边值问题• 在弹塑性问题中,弹性区和塑性区的交界面就属于内部自由边界•

由文献[14]至文献[16]可知带Signorini型边界条件的拟调和函数的边值问题是适定的•

5 全域上的变分提法

由于在PDE提法中含有未知的内部自由边界 Γ_{f}, 这给数值求解带来不便,因此我们应建立与PDE提法等价的变分提法,使得自由边界 Γ_{f} 及其上的流量平衡条件(12)成为变分提法中的自然边界条件,为此我们先建立变分方程提法•

而且找到上述变分方程提法中满足 Γ_{s} 上的Signorini型条件的试探函数还是非常困难的,因此最好能将其中涉及到导数项的部分变为自然边界条件,为此需借助于变分不等式提法•

下面我们将证明等价于上述全域上的PDE提法的一个变分提法:在 Φ_{VI} 中求一函数 ϕ, 使得对于 Φ_{VI} 中的任意函数 ψ, 都有如下的不等式

$$a(\phi, \psi - \phi) \geqslant b_\phi(\psi - \phi), \tag{13a}$$

其中 $a(\cdot, \cdot)$ 和 $b_\phi(\cdot)$ 的形式为

$$a(\xi, \eta) \equiv \int_\Omega (\nabla \eta)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \nabla \xi \mathrm{d}\Omega, \tag{13b}$$

$$b_\phi(\xi) \equiv \int_\Omega (\nabla \xi)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_0(\phi) \mathrm{d}\Omega, \tag{13c}$$

$\boldsymbol{v}_0(\phi)$ 是由式(9a)决定的,因此 $b_\phi(\xi)$ 是依赖于解 ϕ 的线性泛函• Φ_{VI} 表示试探函数集

$$\Phi_{\mathrm{VI}} = \{\varphi \mid \varphi = \bar{\phi}, 在\ \Gamma_\phi\ 上; \varphi \leqslant y, 在\ \Gamma_{\mathrm{s}}\ 上\}• \tag{13d}$$

为了完成两种提法的等价性证明,我们首先利用Green公式来展开 $a(\phi, \psi - \phi) - b_\phi(\psi - \phi)$:

$$a(\phi, \psi - \phi) - b_\phi(\psi - \phi) = \int_\Omega (\nabla(\psi - \phi))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\phi \mathrm{d}\Omega - \int_\Omega (\nabla(\psi - \phi))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_0 \mathrm{d}\Omega =$$

$$-\int_\Omega (\nabla(\psi - \phi))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Omega = \oint (\psi - \phi) q_n \mathrm{d}s + \int_\Omega (\psi - \phi) \nabla \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Omega, \tag{14}$$

这里和下面, q_n、$\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}_0$ 皆依赖于解 ϕ•

5.1 PDE提法⇒变分提法

如果 ϕ 是PDE提法的解,那么有

$$a(\phi, \psi - \phi) - b_\phi(\psi - \phi) = \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\psi - \phi) q_n \mathrm{d}s =$$

$$\int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\psi - y) q_n \mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\phi - y) q_n \mathrm{d}s = \int_{\Gamma_{\mathrm{s}}} (\psi - y) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0,$$

因此, ϕ 也是变分提法的解•

5.2 变分不等式提法⇒PDE提法

假定 ϕ 是变分提法的解· 由(14) 及 ψ 和 ϕ 都属于 Φ_{VI}, 得

$$a(\phi, \psi-\phi) - b_\phi(\psi-\phi) = \int_{\Gamma_q \cap \Gamma_s} (\psi-\phi) q_n \mathrm{d}s + \int_\Omega (\psi-\phi) \nabla\cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Omega \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI}, \tag{15}$$

在上式中分别取 $\psi=\phi+\theta_1$ 和 $\psi=\phi-\theta_1$, 其中 θ_1 为在 Γ_ϕ、Γ_s 和 Γ_q 为零的任意函数, 可以得到连续性方程

$$\nabla\cdot \boldsymbol{v} = 0 \qquad (在\ \Omega\ 内),$$

因此(15) 可以简化为

$$a(\phi, \psi-\phi) - b_\phi(\psi-\phi) = \int_{\Gamma_q \cup \Gamma_s} (\psi-\phi) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI}, \tag{16}$$

对于上式分别取 $\psi=\phi+\theta_2$ 和 $\psi=\phi-\theta_2$, 其中 θ_2 是在 Γ_ϕ 和 Γ_s 上等于零的任意函数, 可以导出 Γ_q 上的流量边界条件

$$q_n(\phi) = 0 \qquad (在\ \Gamma_q\ 上),$$

(16) 式因而可以写成

$$a(\phi, \psi-\phi) - b_\phi(\psi-\phi) = \int_{\Gamma_s} (\psi-y) q_n \mathrm{d}s - \int_{\Gamma_s} (\phi-y) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI}, \tag{17}$$

考虑到上式等号右边的第 2 项为一常数, 要使不等式对于任何 $\psi \in \Omega_{VI}$ 都成立, 则等号右边的第 1 项必须非负, 即,

$$\int_{\Gamma_s} (\psi-y) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI}, \tag{18}$$

因为在 Γ_s 上除了要求 $\psi \leqslant y$ 外, ψ 是任意的, 如此便导致 Γ_s 上的条件

$$q_n(\phi) \leqslant 0, \qquad 于\ \Gamma_s\ 上, \tag{19}$$

在(16) 式中, 当然也可以取 $\psi=y$, 如此就有

$$\int_{\Gamma_s} (y-\phi) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI}, \tag{20}$$

由(19) 式及 Γ_s 上的本质边界条件 $\phi \leqslant y$, 可得 Γ_s 上的互补条件

$$(\phi-y) q_n(\phi) = 0, \qquad 于\ \Gamma_s\ 上· \tag{21}$$

现在让我们来导出内部自由面条件(12)· 为此, 将(14) 式中的 Ω 上的积分表示成在 Ω_w 和 Ω_d 上的积分之和

$$a(\phi, \psi-\phi) - b_\phi(\psi-\phi) = \oint_{\partial\Omega_w} (\psi-\phi) q_n \mathrm{d}s + \int_{\Omega_w} (\psi-\phi) \nabla\cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Omega + \oint_{\partial\Omega_d} (\psi-\phi) q_n \mathrm{d}s + \int_{\Omega_d} (\psi-\phi) \nabla\cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}\Omega \geqslant 0, \qquad \forall \psi \in \Omega_{VI} \tag{22}$$

利用上面已经导出的条件, 可得 $\forall \psi \in \Omega_{VI}$,

$$a(\phi, \psi-\phi) - b_\phi(\psi-\phi) = \int_{\Gamma_f} (\psi-\phi)(q_{n_w}|_{\Omega_w} - q_{n_w}|_{\Omega_d}) \mathrm{d}s + \int_{\Gamma_s} (\psi-\phi) q_n \mathrm{d}s \geqslant 0, \tag{23}$$

这里 n_w 表示 Γ_f 上由 Ω_w 指向 Ω_d 的单位法向量· 在上式中分别取 $\psi=\phi+\theta_3$ 和 $\psi=\phi-\theta_3$, θ_3 为在 Γ_ϕ 和 Γ_s 上为零的任意函数, 如此可得 Γ_f 上的流量平衡条件(12)·

至此, 我们已经导出了 PDE 提法中的全部方程及边界条件·

由于 Signorini 条件中的互补条件在不等式提法中变成了自然边界条件, 因此对试探函数 ϕ 的要求要比变分等式提法宽松得多•

6 有限元法

6.1 罚 Heaviside 函数

尽管可以直接对(13a)式进行离散来求其数值解, 但是由于其中的 Heaviside 函数的不连续性, 将导致数值不稳定性和网格依赖性• 具体解释如下: 如图 2 所示, 假定自由面在靠近某一单元的积分点 g 分别从其下方(图 2(a))和上方((图 2(b))穿过该单元, 根据 Heaviside 函数的定义式(9b), 无论这两个自由面多么靠近, 在对该单元进行数值积分时, 前者对积分的贡献为 100%, 而后者对积分的贡献却为零, 即产生了不连续的跳跃• 显然, 这种跳跃强烈地依赖于计算网格, 而这也正是某些方法数值不稳定现象的根本原因•

为了避免数值跳跃, 我们将使用一个连续函数来代替非连续的 Heaviside 函数, 对该连续函数的要求是能够随着网格的加密而逼近非连续的 Heaviside 函数• 考虑到自由面可能会从单元的最低积分点和最高积分点穿过单元, 我们将上述连续函数取为如下的罚 Heaviside 函数

$$
H_\varepsilon(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\leqslant \varepsilon_1,\\[4pt] \dfrac{\varepsilon_2-x}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, & \text{当 } -\varepsilon_1<x<\varepsilon_2,\\[4pt] 0, & \text{当 } x\geqslant \varepsilon_2,\end{cases}\tag{24}
$$

在我们的算法中, ε_1 和 ε_2 是与各单元相关联的, 以线性四边形等参元为例, ε_1 被定义为定义单元内最低的积分点到最低一个节点的距离, ε_2 被定义为单元内最高的积分点到最高的节点的距离•

(a) 积分点 g 对数值积分的贡献为 100% (b) 积分点 g 对积分没有贡献

图 2 Heaviside 函数的不连续性

Lacy_Prevost[6] 和 Borja_Kishnani[7] 也采用了类似的技术来惩罚 Heaviside 函数, 然而他们引入罚 Heaviside 函数的目的在于将 Brezis 变分不等式提法中的变分不等方程变为带惩罚因子的变分方程, 而这实际上是利用了 Brezis 提法的收敛性证明• 为了完成收敛性证明, Brezis 等构造了一个带惩罚因子的变分方程, 该变分方程是通过将变分不等方程中的 Heaviside 函数替换成罚 Heaviside 函数而得到的, 并且证明当惩罚因子趋于零时, 带惩罚因子的变分方程的解就趋近于相应的变分不等式的解• 而在本文中引入罚 Heaviside 函数的目的仅在于克服网格依赖现象, 在将(13a)式中的 Heaviside 函数替换成罚 Heaviside 函数后, 它仍然是一个带罚参数 ε_1 和 ε_2 的变分不等式, 而不是象在 Brezis 提法中的变分方程•

此外, 在 Lacy_Prevost[6] 和 Borja_Kishnani[7] 的数值实现过程中 ε_1 被取为最低积分点与最低节点之间 y 坐标之差, ε_2 为最高积分点与最高节点之间 y 坐标之差, 这在通常情况下是可以的, 但是当自由面近乎垂直时可能会引起数值不稳定, 原因如下• 记 $F1$ 为一个从某积分点

$g(x_g, y_g)$ 的下方经过的自由面, $F2$ 为一个从点 g 上方经过的自由面, $M1(x_g, y_1)$ 和 $M2(x_g, y_2)$ 分别是 $F1$ 和 $F2$ 与垂线 $x = x_g$ 的两个交点• 当 $F1$ 和 $F2$ 近乎垂直时, 尽管 $F1$ 和 $F2$ 都很靠近 g 点, 但 $y_g - y_1$ 和 $y_2 - y_g$ 都可能大于 ε_1, 从而使得其中一个位置的自由面对数值积分的贡献为百分之百, 而另一个位置的自由面的贡献为零, 这就引起了数值的非连续跳跃•

6.2 有限元离散

因(13a)式关于 ϕ 是非线性的, 一般情况下需采用迭代法来求解• 求解(13a)式的一个简单迭代格式为

$$a(\phi^{i+1}, \psi - \phi^{i+1}) \geqslant b_{\phi^i}(\psi - \phi^{i+1}), \qquad i = 1, 2, \cdots, \tag{25}$$

在上式中 ϕ^i 被认为是已知的, 因而它关于 ϕ^{i+1} 是标准的椭圆型变分不等式, 经有限元近似后所得的离散型变分不等式提法为: 在有限维试探向量集合 Φ_{VI}^h 求一向量 ϕ^{i+1}, 使得对 Φ_{VI}^h 中的任一向量 ψ, 都有

$$(\psi - \phi^{i+1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \phi^{i+1} \geqslant (\psi - \phi^{i+1})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}^i, \tag{26a}$$

其中,

$$\boldsymbol{K} = \sum \boldsymbol{K}_e, \quad \boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}\Omega, \tag{26b}$$

$$\boldsymbol{q}^i = \sum \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{v}_0^i \, \mathrm{d}\Omega, \tag{26c}$$

$$B_{ij} = \left(\frac{\partial N_j}{\partial x_i} \right), \qquad i = 1, 2; \; j = 1, 2, \cdots, n_e, \tag{26d}$$

$$\Phi_{VI}^h = \left\{ \varphi \in R^N \mid \varphi_m = \bar{\phi}_m, \text{节点 } m \text{ 在 } \Gamma_\phi \text{ 上}; \; \varphi_k \leqslant y_k, \text{节点 } k \text{ 在 } \Gamma_s \text{ 上} \right\}, \tag{26e}$$

这里, 小写黑体表示对应于相应物理量的节点值所组成的向量, N 为节点总数, 上标 i 和 $i+1$ 为迭代次数; n_e 为单元 e 的节点数, N_j 是节点 j 的形函数•

在式(26a)中, "总刚" $\boldsymbol{K}$ 不包含罚参数, 罚参数含在右端向量 $\boldsymbol{q}^i$ 中, 但是当网格被加密时, $\boldsymbol{q}^i$ 是连续变化的, 因此, 它是数值稳定的•

求解离散形式的变分不等式(26a)的算法有许多, 如文[18]和文[19]等, 本文采用的是由郑铁生等所建议的算法[19], 该算法可在有现次迭代步内取得离散形式的变分不等式的精确解•

7 算 例

本文所描述的算法已在很多复杂工程问题中得以成功地应用• 这里我们仅给出一个简单算例来说明方法的有效性, 计算中采用的收敛标准是

$$\| \phi^{i+1} - \phi^i \|_1 < \varepsilon \| \phi^i \|_1,$$

其中误差 ε 取为 10^{-3}•

图3是一均质土堤坝的有限元网格, 其中底部边界被视为不透水• 对于本例我们有关于其自由面位置的 Pavlovsky 经验解[12], $y = (2.32^2 - 5.3x)^{1/2}$•

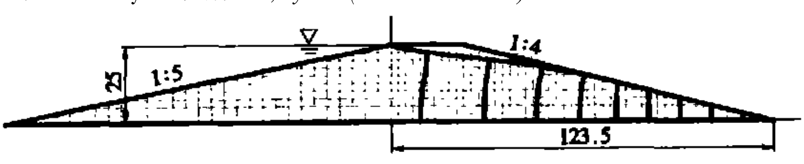

图3 均质土堤坝的渗流

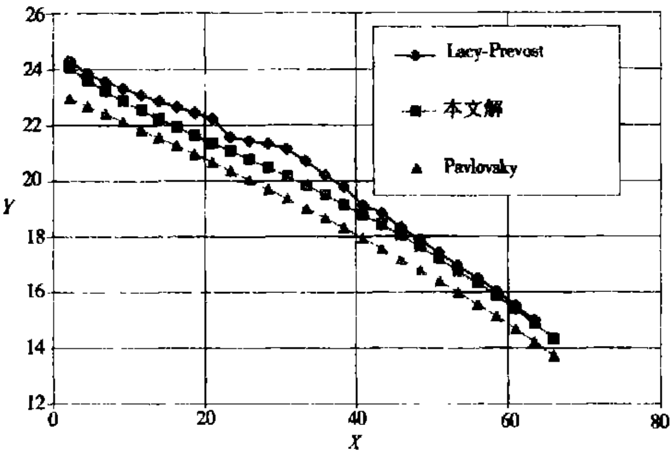

图 4 自由面的位置

图 4 显示了分别由 Pavlovsky 解、Lacy_Prevost 解以及本文所给出的解所确定的自由面的位置, 由此可见本文所给出的解更接近与 Pavlovsky 解•

8 结 论

由于 Signorini 条件的引入, 使得本文所建立的变分不等式彻底消除了出渗点的奇异性, 因而建立在这一提法基础上的数值模型不但能够克服传统的变分不等式提法中的网格依赖现象, 而且对于强非均质性和复杂的几何形状有很强的忍受能力•

[参 考 文 献]

[1] Desai C S, Li G C. A residual flow procedure and application for free surface in porous media[J]. Advances in Water Resources, 1983, **6**(1): 27—35.

[2] 张有天, 陈平, 王镭. 有自由面渗流分析的初流量法[J]. 水利学报, 1988, (8): 18—26.

[3] Bathe K J, Khoshgoftaar M R. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1979, **3**(1): 13—22.

[4] Alt H W. Numerical solution of steady state porous flow free boundary problems[J]. Numerische Mathematik, 1980, **36**(1): 73—96.

[5] Brezis H, Kinderlehrer D, Stampacchia G. Sur une nouvelle formulation due probleme de l' ecoulement a travers une digue[J]. C R Acad Sci Paris, Ser A, 1978, **287**: 711—714.

[6] Lacy S J, Prevost J H. Flow through porous media: a procedure for locating the free surface[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1987, **11**(6): 585—601.

[7] Borja R I, Kishnani S S. On the solution of elliptic free boundary problems via Newton' s method [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, **88**(2): 341—361.

[8] Oden J T, Kikuchi N. Recent advances: theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media[J]. International Journal of Engineering Science, 1980, **18**(10): 1173—1284.

[9] Westbrook D R. Analysis of inequality and residual flow procedures and an iterative scheme for free surface seepage[J]. Internal Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, **21**(10): 1971—

1802.
[10] Chipot M. Variational Inequalities and Flow in Porous Media [M]. New York: Springer_Verlag, 1984.
[11] 佘颖禾, 孙鹰, 郭小明. 具有自由边界的二维渗流问题[J]. 应用数学和力学, 1996, **17**(6): 523—527.
[12] Harr M E. Groundwater and Seepage[M]. Columbus: McGraw_Hill, 1990.
[13] Sperb R. Maximum Principles and Their Applications [M]. Washington, DC: Academic Press, 1981.
[14] Troianiello G M. Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems [M]. New York: Plenum Press, 1987.
[15] Glowinski R. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1984.
[16] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications [M]. New York: Academic Press, 1980.
[17] Quarteroni A, Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations [M]. Berlin: Springer_Verlag, 1997.
[18] Aitchison J M, Poole M W. A numerical algorithm for the solution of Signorini problems[J]. Journal of Computational & Applied Mathematics, 1998, **94**(1): 55—67.
[19] 郑铁生, 李立, 许庆余. 一类椭圆型变分不等式离散问题的迭代算法[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(4): 329—335.

New Variational Inequality Formulation for Seepage Problems With Free Surfaces

ZHENG Hong[1,2], LIU De_fu[1], LEE C. F.[3], THAM L. G.[3]

(1. College of Civil & Hydroelectric Engineering, Three Gorges University, Yichang Hubei 443002, P.R. China;
2. Institute of Rock & Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, P.R. China;
3. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong, P. R. China)

Abstract: A new variational inequality formulation for seepage problems with free surfaces was presented, in which a boundary condition of Signorini's type was prescribed over the potential seepage surfaces. This made the singularity of seepage points eliminated and the location of seepage points determined. Compared to other variational formulations, the proposed formulation owns better numerical stability.

Key words: free boundary problem; seepage; variational inequality; finite element