文章编号: 1000_0887(2004) 03_0323_08

关于连续型条件投入产出方程的一些结果——不动点与满射性方法*

刘颖范[1,2], 陈晓红[1]

(1. 南京航空航天大学 数学系, 南京 210016;
2. 南京邮电学院 数学系, 南京 210003)

(张石生推荐)

摘要: 基于经典(矩阵型)投入产出分析, 引入了一类非线性(连续型)条件 Leontief 模型、投入产出方程及相关的三个基本问题, 即可解性、连续性和满射性, 进而非线性分析的一些不动点与满射性方法被用于处理这些问题· 作为结果, 得到了三个重要定理, 这些定理给出了用企业的消耗算子的边界性质描述的解答如上问题的一些充分性准则·

关 键 词: 投入产出方程; 可解性; 连续性; 满射性; 不动点; 上半连续; 上 h 连续; 非线性分析

中图分类号: O29; O177.91 文献标识码: A

引 言

本文记 R^n 为赋于范数 $\|\cdot\|$ 的 n 维空间, $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 为其元素, $R^{n^*} = (R^n, \|\cdot\|)^*$ 为其对偶空间, 并记 R^n_+ 为 R^n 中由所有非负向量所成的闭凸锥·

定义 设 $F \subset R^n_+$ 是企业的总产出向量集, $\boldsymbol{A}$ 是从F 到R^n_+ 的一非负映射称作企业的消耗算子, $\boldsymbol{I}$ 是从R^n 到自身的恒等映射· 设 $\boldsymbol{c} \in R^n_+$ 是一固定元称作市场配置给企业的(预期)最终需求(向量), 则分别称

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}; F) \tag{1}$$

与

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} \in F, \\ \text{s.t.}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}, \end{cases} \tag{2}$$

为条件 Leontief 模型与条件投入产出方程(简记为条件 IO 方程)·

(2) 的经济意义是明确的, 即是否能找到一合适的产出 $\boldsymbol{x} \in F$, 使之与对应消耗 $\boldsymbol{Ax}$ 的差恰好是最终需求 $\boldsymbol{c}$· 若回答肯定, 则称 $\boldsymbol{c}$ 是可解的最终需求·

注1 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 是一非负矩阵且 $F = R^n_+$, 则(1) 与(2) 分别是著名的经典 Leontief 模型与 IO 方程[1,2]·

---

* 收稿日期: 2002_07_17; 修订日期: 2003_10_06
作者简介: 刘颖范(1948—), 男, 江苏无锡人, 教授(联系人. Tel: 86_25_83722226; E_mail: yingfanliu@hotmail.com).

对于一般的条件 IO 方程(2), 我们提出本文将处理的三个基本问题:

问题 1(可解性) 对何种 $\boldsymbol{c} \in R_+^n$, 它必是可解的最终需求?

问题 2(连续性) 方程(2) 对应于可解最终需求 $\boldsymbol{c}$ 的相关解集, 随着 $\boldsymbol{c}$ 的小扰动是否有任何种类的连续性质?

问题 3(满射性) 是否 F 中的每个元素都能以统一的形式可被近似地取为可解的最终需求?

注 2 引入问题 3 据于一经济事实• 若企业经营高效, 这意味着对所有的 $\boldsymbol{x} \in F$, 消耗 $\boldsymbol{Ax}$ 的范数整体很小, 那么无论 IO 方程(2) 可解与否, 企业总是倾向于将最终需求 $\boldsymbol{c}$ 取作为预期的产出 $\boldsymbol{x}$• 至少就我们所知, 除了经典 IO 方程的可解性问题被研究过外, 至今未见有文献对如上方程作出系统的研究• 处理经典 IO 方程的传统方法是估计矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值 λ, 且当 $\lambda < 1$ 时, 有 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{c} = \sum_{i=0}^{\infty}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{c}$[1]• 沿着这一途径, 除了熟知的圆盘定理外, 文[3, 4] 中的结果也对该类方程有用• 然而, 从经济学的角度来看, 经典模型有如下两个缺陷; 1) 由于企业的产出集一般是 R_+^n 中的有界集, 故将 R_+^n 取作产出 F 是不恰当的; 2) 因为企业的对应消耗很难以线性形式刻划, 故将矩阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 取作消耗 $\boldsymbol{A}$ 也是不恰当的• 基于如上理由, 为了以相对合理的方式对条件 IO 方程作一初步的研究, 我们提出两个基本假设如下:

基本假设 1 F 是 R_+^n 的凸紧子集并具有非空内部(即 $\mathrm{Int}F \neq \varnothing$);

基本假设 2 消耗 $\boldsymbol{A} = (A_1, \cdots, A_n): F \to \mathbf{R}_+^n$ 是连续的, 即对每个 $i = 1, \cdots, n$, $A_i: F \to \mathbf{R}_+$ 是连续的•

对于基本假设 1 有一些特例如下:

a) $F = \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ 其中 $0 < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, \cdots, n$, a_i 和 b_i 可分别假设为市场对第 i 种产品的最小和最大需求, 或分别理解为对第 i 种产品, 为维持企业生存的最低生产量或基于企业生产能力的最高生产量•

b) $F = \left\{\boldsymbol{x} \in R_+^n \mid c_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \leqslant c_2\right\}$, 其中 $q_i\,(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是第 i 种产品的单位花费, $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, 且 $[c_1, c_2]$ 是企业总花费的允许区间•

c) $F = \left\{\boldsymbol{x} \in \prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] \mid c_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \leqslant c_2\right\}$ 满足 $\mathrm{Int}F \neq \varnothing$, 这是情形 a) 与 b) 的混合•

显然, 只要 $F \neq R_+^n$ 或 A 不是矩阵, 则基于最大特征值的经典方法就不再适合用于一般的条件 IO 方程• 以下, 我们将在基本假设 1 与 2 下, 用非线性分析方法对问题 1~ 3 作初步的探索•

1 主要结果及其经济意义

1.1 主要定理

在如下的定理中, 我们总设条件 Leontief 模型(1) 满足基本假设 1 与 2, 并总记 $\partial F = F \setminus \mathrm{Int}F$ 为 F 的边界• 诸如上半连续(u. s. c), 上 h 半连续(u. h. c), 连续, 闭与剩余(residual) 等术语均可参阅文[5]•

定理 1 设 R^n 赋于由内积$(\cdot, \cdot)$ 导出的欧氏范数 $\|\cdot\| (= \|\cdot\|_2)$• 又设 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{Int}F$ 及 $\boldsymbol{c}_0 \in R_+^n$ 满足以下诸边界条件之一:

1) (Rothe) $\|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}_0\| \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|$, $\boldsymbol{x} \in \partial F$;

2) (Krasnoselskii) $(\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leqslant \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^2$, $\boldsymbol{x} \in \partial F$;

3) (Petryshen) $\|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}\| \geqslant \|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}_0\|$, $\boldsymbol{x} \in \partial F$;

4) (Altman) $\|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}_0\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|^2$, $\boldsymbol{x} \in \partial F$•

那么下列陈述成立:

(ⅰ) IO 方程(2) 对 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_0$ 有解;

(ⅱ) 令

$$\begin{cases} F_A := \left\{\boldsymbol{c}\in R_+^n \mid \|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{x}\|^2 \geqslant \|\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{x}_0\|^2-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|^2,\ \boldsymbol{x}\in\partial F\right\}, \\ G_A: F_A \to 2^F: \boldsymbol{c}\mapsto G_A(\boldsymbol{c}) := \left\{\boldsymbol{x}\in F \mid (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\right\}. \end{cases} \tag{3}$$

则 a) 作为集值映射, 在文[5] 的意义下, G_A 是严格上半连续与上 h 半连续的, 且使 G_A 连续的点的集合是剩余的.

b) 若 $\boldsymbol{A}$ 是一压缩映射, 则 G_A 是单值连续映射.

定理 2 设 R^n 上赋于最大模范数 $\|\cdot\|(=\|\cdot\|_0)$, $F=\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ 满足 $0\leqslant a_i<b_i<+\infty$, $i=1,\cdots,n$. 设 $\boldsymbol{c}_0\in R_+^n$ 满足如下两个条件之一:

1) (Rothe) $\quad a_i\leqslant A_i\boldsymbol{x}+c_{0i}\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \boldsymbol{x}\in\partial F$;

2) (Petryshen) $\quad \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{|A_i\boldsymbol{x}+c_{0i}-\boldsymbol{x}_i|}{b_i-a_i}\geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{|A_i\boldsymbol{x}+c_{0i}-(a_i+b_i)/2|}{b_i-a_i},\ \boldsymbol{x}\in\partial F$.

则下列 2 个陈述成立:

(ⅰ) 对 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_0$, 方程(2) 可解;

(ⅱ) 令

$$\begin{cases} F_R := \left\{\boldsymbol{c}\in R_+^n \mid a_i\leqslant A_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\leqslant b_i,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ \boldsymbol{x}\in\partial F\right\}, \\ G_R: F_R\to 2^F: \boldsymbol{c}\mapsto G_R(\boldsymbol{c}) := \left\{\boldsymbol{x}\in F \mid (I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\right\} \end{cases} \tag{4}$$

及

$$\begin{cases} F_P := \left\{\boldsymbol{c}\in R_+^n \mid \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{|A_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i-\boldsymbol{x}_i|}{b_i-a_i}\geqslant \right. \\ \qquad \left. \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\dfrac{|A_i\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i-(a_i+b_i)/2|}{b_i-a_i},\ \boldsymbol{x}\in\partial F\right\}, \\ G_P: F_P\to 2^F: \boldsymbol{c}\mapsto G_P(\boldsymbol{c}) := \left\{\boldsymbol{x}\in F \mid (I-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\right\}. \end{cases} \tag{5}$$

则 a) 当 F_R(或 F_P) 非空时, 在文[5] 的意义下, G_R(或 G_P) 是严格, 上半连续与上 h 半连续的, 且其连续点集是剩余的.

b) 进而, 若 $\boldsymbol{A}$ 是一压缩映射, 则 G_R(或 G_P) 是严格的单值连续映射.

定理 3 设 R^n 赋于欧氏范数 $\|\cdot\|(=\|\cdot\|_2)$, 且 $F\subset \mathrm{Int}R_+^n$. 定义

$$\mu_0=\sup_{\boldsymbol{x}\in\partial F}\|\boldsymbol{Ax}\|. \tag{6}$$

并令

$$\begin{cases} G: F \to 2^F: \boldsymbol{c}\mapsto G(\boldsymbol{c}), \\ G(\boldsymbol{c}) = \left\{\boldsymbol{x}\in F \mid \exists\ \Delta\boldsymbol{c}\in R^n, \right. \\ \qquad \left. \text{s.t.}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c},\ \|\Delta\boldsymbol{c}\|\leqslant\mu_0\right\}. \end{cases} \tag{7}$$

则: (ⅰ) G 是严格的, 即对任意 $\boldsymbol{c}\in F$, 存在 $\boldsymbol{x}\in F$ 及 $\Delta\boldsymbol{c}\in R^n$ 使得

$$\begin{cases} (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}, \\ \|\Delta\boldsymbol{c}\|\leqslant\mu_0. \end{cases} \tag{8}$$

(ⅱ) 同样在文[5] 的意义下, G 是上半连续与上 h 半连续的, 且其连续点集是剩余的.

注1.1 值得提及的是产生上述主要结果的思想• a) 可解性部分(即定理1(ⅰ)与定理2(ⅰ))分别归功于文[6]与[7]• b)连续性部分(即从定理1到3的(ⅱ))主要源自于文献[5,8,9]• c) 满射性部分(即定理3(ⅰ))则得益于文[10],所有证明在最后一节给出•

注1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是一凸算子,即对 $i=1,\cdots,n$, $A_i:F\to R_+$ 是凸函数,且设 F' 是任一具有非空内部的凸紧集,且满足 $F'\subset \mathrm{Int}F$,则文[5,8,9,11]表明所有如上的定理(在定理2情形,我们应设 $F=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ 及 $F'=\prod_{i=1}^{n}[a_i',b_i']$•)对如下新的IO方程成立:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\in F', \\ \text{s.t. } (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}\text{•} \end{cases}$$

1.2 一些经济意义

1) 定理1(ⅰ)实际上为我们提供了一个用消耗算子 $\boldsymbol{A}$ 在 F 上的边界性质来判断是否 R_+^n 中的元素能作为可解的最终需求的充分条件• 这里我们根据Rothe条件来展示这一事实•

设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 F 的中心, $\mu_0=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\partial F}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$ 及 $\varepsilon_0=\inf\limits_{\boldsymbol{x}\in\partial F}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|$ 并满足 $\mu_0<\varepsilon_0$• 令

$$O(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon_0-\mu_0) \mathrel{¦} \left\{\boldsymbol{x}\in R^n \mid \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\|<\varepsilon_0-\mu_0\right\},$$

则 $O(\boldsymbol{x}_0,\varepsilon_0-\mu_0)\cap R_+^n$ 中的每一个元素满足Rothe条件• 这表明,只要 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的范数在 ∂F 上一致很小,则可解最终需求必存在且可从靠近 F 的中心的点中去寻找,此情当企业经营高效时是可能的•

2) 定理1(ⅱ)表明对于可解的最终需求 $\boldsymbol{c}$,方程(2)的解集随着 $\boldsymbol{c}$ 的小扰动是上半连续,上 h 半连续且几乎连续的•

与定理1相同,定理2揭示同样的经济意义,这儿细节从略•

3) 定理3表明,对于每个 $\boldsymbol{c}\in F$,总存在对 $\boldsymbol{c}$ 的一个扰动 $\Delta\boldsymbol{c}$ 满足 $\|\Delta\boldsymbol{c}\|\leqslant\mu_0=\sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\partial F}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|$,并使扰动后的向量 $\boldsymbol{c}+\Delta\boldsymbol{c}$ 使方程(2)可解,且由(7)定义的对应近似解集 $G(\boldsymbol{c})$ 也随 $\boldsymbol{c}$ 在 F 中的扰动是上半连续,上 h 半连续且几乎连续的• 更进一步,若企业经营良好使 μ_0 足够小,则 $F\cap[\mu_0,+\infty)^n$ 中的每个元必是近似的可解最终需求且近似解集也有相同的连续性质•

2 主要定理的证明

2.1 定理1的证明:

(ⅰ) 令 $F=\boldsymbol{x}_0+F_0$,则 F_0 也是具有非空内部的凸紧集,进而还有

$$\begin{cases} 0\in \mathrm{Int}F_0;\ \overline{\mathrm{Int}F_0}=F_0, \\ \boldsymbol{x}\in\partial F\Leftrightarrow \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0\in\partial F_0\text{•} \end{cases} \tag{9}$$

定义映射 $T:F_0\to R^n$ 为

$$Tz=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_0+z)+\boldsymbol{c}_0-\boldsymbol{x}_0 \qquad (z\in F_0), \tag{10}$$

则 T 是连续的,且由(9)与(10)知,条件(1)~(4)分别导出:

1) (Rothe) $\|Tz\|\leqslant\|z\|,\ z\in\partial F_0;$

2) (Krasnoselskii) $(Tz,z)\leqslant\|z\|^2,\ z\in\partial F_0;$

3) (Petryshen) $\|z-Tz\|\geqslant\|Tz\|,\ z\in\partial F_0;$

4) (Altman) $\|z-Tz\|^2\geqslant\|Tz\|^2-\|z\|^2,\ z\in\partial F_0$•

故由文[6](定理4.2.7)知 T 有一个不动点 z^*• 令 $\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{x}_0+z^*$,得 $\boldsymbol{x}^*\in F$ 且 $(I-A)\boldsymbol{x}^*=$

c_0, 这表明方程(2) 对 $c = c_0$ 是可解的•

(ii) 因为Altman 条件是该定理中所有从(1) 到(4) 条件中最弱的一个[6], 故由 $c_0 \in F_A$ 可知 F_A 非空, 且由证明的(i) 部分还可知对所有 $c \in F_A$, $G_A(c)$ 也是非空的• 进而, 易验证 F_A 是一闭子集且 G_A 是一具有闭图的严格集值映射• 于是由文[5](推论3.1.9; 定理3.1.10及性质3.2.2) 及 R^n 上的范数拓扑与弱拓扑一致[12, 13], 可得 $G_A: F_A \to 2^F$ 是上半连续与上h 半连续的, 且使 G_A 连续的点集是剩余的•

定理的其余部分是明显的, 证毕•

2.2 定理2 的证明:

(i) 引入 R^n 上的乘法* 如下:

$$\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y} = (x_1 y_1, \cdots, x_n y_n), \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n,$$

则 $(R^n, *, \|\cdot\|)$(其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_0$) 是一 Banach 代数•

设 $\boldsymbol{x}_0 = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \cdots, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right)$, $\prod\limits_{i=1}^{n}[-1, 1] = [-1, 1]^n$, 则

$$\begin{cases} F = \boldsymbol{x}_0 + \left(\dfrac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \dfrac{b_n - a_n}{2}\right) * [-1, 1]^n, \\ z \in \partial([-1, 1]^n) \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \\ \qquad \boldsymbol{x}_0 + \left(\dfrac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \dfrac{b_n - a_n}{2}\right) * z \in \partial F\bullet \end{cases} \tag{11}$$

定义映射 $B: [-1, 1]^n \to R^n$ 为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = {} & \left(\frac{2}{b_1 - a_1}, \cdots, \frac{2}{b_n - a_n}\right) * \left\{\boldsymbol{A}\left[\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \frac{b_n - a_n}{2}\right) * \boldsymbol{u}\right] + \right. \\ & \left. \boldsymbol{c}_0 - \boldsymbol{x}_0\right\}, \ \boldsymbol{u} \in [-1, 1]^n \bullet \end{aligned} \tag{12}$$

明显, B 是连续的•

a) 先设1) (Rothe)条件对 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_0$ 成立, 则由(11) 知对每个 $\boldsymbol{u} \in \partial([-1, 1]^n)$, 存在唯一的 $\boldsymbol{x} \in \partial F$, 使得

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \frac{b_n - a_n}{2}\right) * \boldsymbol{u}\bullet$$

于是 Rothe 条件导出

$$\begin{aligned} -\frac{b_i - a_i}{2} \leqslant {} & A_i\left(\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \frac{b_n - a_n}{2}\right) * \boldsymbol{u}\right) + \\ & \boldsymbol{c}_{0i} - \boldsymbol{x}_{0i} \leqslant \frac{b_i - a_i}{2}, \quad (i = 1, \cdots, n)\bullet \end{aligned}$$

结合(12) 可得:

$$\begin{aligned} -1 \leqslant B_i \boldsymbol{u} = {} & \frac{2}{b_i - a_i}\left\{A_i\left(\boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \frac{b_n - a_n}{2}\right) * \boldsymbol{u}\right) + \right. \\ & \left. \boldsymbol{c}_{0i} - \boldsymbol{x}_{0i}\right\} \leqslant 1, \quad (i = 1, \cdots, n)\bullet \end{aligned}$$

因此, 对所有 $\boldsymbol{u} \in \partial([-1, 1]^n)$ 有 $\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\|$, 且由文[7](推论5.3.4) 可得 $\boldsymbol{B}$ 存在一个不动点 $\boldsymbol{u}_* \in [-1, 1]^n$• 取

$$\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{x}_0 + \left(\frac{b_1 - a_1}{2}, \cdots, \frac{b_n - a_n}{2}\right) * \boldsymbol{u}_*,$$

则有 $\boldsymbol{x}_* \in F$, 且 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{c}_0$•

b) 现设 2) (Petryshen) 条件对 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_0$ 成立• 如同上证, 可知对每个 $\boldsymbol{u}\in\partial([-1,1]^n)$, 存在唯一的 $\boldsymbol{x}\in\partial F$, 使

$$\boldsymbol{u}=\left(\frac{2}{b_1-a_1},\cdots,\frac{2}{b_n-a_n}\right)*(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)•$$

于是

$$\begin{cases}\boldsymbol{Bu}-\boldsymbol{u}=\left(\frac{2}{b_1-a_1},\cdots,\frac{2}{b_n-a_n}\right)*(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{c}_0-\boldsymbol{x}),\\ \boldsymbol{Bu}=\left(\frac{2}{b_1-a_1},\cdots,\frac{2}{b_n-a_n}\right)*(\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{c}_0-\boldsymbol{x}_0)•\end{cases}$$

且 2) (Petryshen) 条件隐含对每个 $\boldsymbol{u}\in\partial([-1,1]^n)$, 有 $\|\boldsymbol{Bu}-\boldsymbol{u}\|\geqslant\|\boldsymbol{Bu}\|$, 故同样由[7]可知 $\boldsymbol{c}_0$ 必是可解的最终需求向量•

(ii) 定理的其余部分可用定理 1 同样的方法证明• 证毕•

2.3 定理 3 的证明 我们用四步进行证明•

第一步: 先证明下述引理•

引理 1 设 Y 是 R^n 中具有非空内部的凸紧集, ∂Y 是其边界, 设 $\boldsymbol{B}$ 是从 Y 到 R^n 的连续映射满足 $\boldsymbol{B}|_{\partial Y}=0$, 则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})Y\supset Y$•

由 Rogalski_Cornet 定理([10], 定理 15.1.4), 只须证明对任意 $\boldsymbol{p}\in R^{n*}=R^n$ 及 $\boldsymbol{y}\in\partial(Y,\boldsymbol{p})=\left\{\boldsymbol{y}\in Y\mid\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{y}\rangle=\min\limits_{z\in Y}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}\rangle\right\}$, 有

$$\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{y}\rangle\geqslant\langle\boldsymbol{p},(I-B)\boldsymbol{y}\rangle\text{i.e.}\ \langle\boldsymbol{p},B\boldsymbol{y}\rangle\geqslant0• \tag{13}$$

(对于欧氏空间 $(R^n,\|\cdot\|)$ (其中 $\|\cdot\|=\|\cdot\|_2$), 对偶积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 与内积$(\cdot,\cdot)$ 一致)• 事实上,

若 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$, (13) 立即成立• 若 $\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$, 则由 $\mathrm{Int}\,Y$ 非空及 $\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{y}\rangle=\min\limits_{z\in Y}\langle\boldsymbol{p},\boldsymbol{z}\rangle$ 可知, $\boldsymbol{y}\in\partial(Y,\boldsymbol{p})$ 导出 $\boldsymbol{y}\in\partial Y$, 故 $B\boldsymbol{y}=0$, 且(13) 成立•

第二步: 令 $\varepsilon_0=\mathrm{dist}(F,\partial R^n_+)=\inf\limits_{x\in F,\,y\in\partial R^n_+}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$, 则 $\varepsilon_0>0$(这因为 F 紧, ∂R^n_+ 闭且 $F\subset\mathrm{Int}R^n_+$)• 对每个 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, 定义 $F_\varepsilon=\left\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid\mathrm{dist}(\boldsymbol{x},F)\leqslant\varepsilon\right\}$, 则有:

$$\begin{cases}\text{a) } F_\varepsilon \text{ 也是 } R^n \text{ 的凸紧子集},\\ \text{b) } F\subset F_\varepsilon\subset\mathrm{Int}R^n_+ \text{ 且 } F\subset\mathrm{Int}F_\varepsilon•\end{cases}$$

我们将证存在一个从 F_ε 到 R^n 的映射 $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ 满足:

$$\begin{cases}\text{a) } \boldsymbol{A}_\varepsilon \text{ 是非负连续的},\\ \text{b) } \boldsymbol{A}_\varepsilon|_F=\boldsymbol{A},\ \text{i.e.},\ \forall\boldsymbol{x}\in F,\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}_\varepsilon\boldsymbol{x},\\ \text{c) } \boldsymbol{A}_\varepsilon|_{\partial F_\varepsilon}=0,\ \text{i.e.},\ \forall\boldsymbol{x}\in\partial F_\varepsilon,\ \boldsymbol{A}_\varepsilon\boldsymbol{x}=0•\end{cases} \tag{14}$$

设 $\boldsymbol{P}$ 是从 F_ε 到 F 上的最佳逼近算子, 即对每个 $\boldsymbol{x}\in F_\varepsilon$, $\boldsymbol{Px}\in F$ 满足 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Px}\|=\inf\limits_{z\in F}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\|$[14], 则立得:

$$\begin{cases}\text{a) } \boldsymbol{P} \text{ 是连续的},\\ \text{b) } \boldsymbol{P}|_F=I•\end{cases} \tag{15}$$

又由方程的截断技巧[15,16], 可找到一函数 $g\in C_c(R^n)$ 使得

$$\begin{cases}\text{a) } 0\leqslant g(\boldsymbol{x})\leqslant1,\ \boldsymbol{x}\in R^n,\\ \text{b) } g|_F=1,\\ \text{c) } \mathrm{supp}\,g\subset\mathrm{int}F_\varepsilon,\ \text{由此 } g|_{\partial F_\varepsilon}=0•\end{cases} \tag{16}$$

限制 g 在 F_ε 上仍记之为 g，定义一从 F_ε 到 R^n 的映射 $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ 为

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon \boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x} \in F_\varepsilon,$$

则(15)与(16)立即表明 A_ε 即为(14)所求•

第三步：我们来证，对每个 $\boldsymbol{c} \in F$ 及 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，存在 $\boldsymbol{x}_\varepsilon \in F$ 及 $\Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon \in R^n$ 使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon, \\ \| \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon + \mu_0 \text{•} \end{cases} \tag{17}$$

设 $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ 是如上满足(14)的映射，则由引理 1 得

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_\varepsilon) F_\varepsilon \supset F_\varepsilon \supset F \text{•}$$

因为 $\boldsymbol{c} \in F$，故可找到 $\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon \in F_\varepsilon$ 使

$$\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon = \boldsymbol{c} \text{•} \tag{18}$$

取

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon (\in F), \\ \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon = \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{c}, \ \text{i. e.}\ \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon \text{•} \end{cases} \tag{19}$$

若 $\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon \in F$，则由(14)，(15)，(18)与(19)，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{c}, \\ \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon = \boldsymbol{0} \text{•} \end{cases}$$

若 $\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon \in F_\varepsilon \setminus F$，则由(18)，(19)及 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ 的定义可知

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_\varepsilon \in \partial F, \ \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon, \\ \| \boldsymbol{x}_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon, \\ \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon = (\boldsymbol{x}_\varepsilon - \hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon) + (g(\hat{\boldsymbol{x}}_\varepsilon) - 1)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon \text{•} \end{cases}$$

结合(16)并利用 μ_0 的定义，可得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon, \\ \| \Delta \boldsymbol{c}_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon + \mu_0 \text{•} \end{cases}$$

第四步：最后证明定理 3 成立•

(ⅰ) 设 $\boldsymbol{c} \in F$ 被固定• 由第三步知，对 $k = 1, 2, \cdots$，存在 $\boldsymbol{x}_k \in F$ 及 $\Delta \boldsymbol{c}_k \in R^n$，使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k - A\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}_k, \\ \| \Delta \boldsymbol{c}_k \| \leqslant \dfrac{1}{k} + \mu_0 \text{•} \end{cases} \tag{20}$$

因为 F 紧及 $\{\Delta \boldsymbol{c}_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有界，可设 $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x} \in F$，$\Delta \boldsymbol{c}_k \to \Delta \boldsymbol{c} \in R^n (k \to \infty)$•

令 $k \to +\infty$，则从(20)立得

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{c}, \\ \| \Delta \boldsymbol{c} \| \leqslant \mu_0 \text{•} \end{cases}$$

(ⅱ) 易知由(7)定义的 G 是闭的，故由文[5]知定理 3(ⅱ)成立•

这就完成了证明•

致谢　本课题得到长风机械厂科技基金资助(NUJJ, 2001_081_001)，在此表示衷心感谢!

[参　考　文　献]

[1]　潘吉勋，张顺明. 经济均衡的数学原理[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1997.

[2]　张金水. 可计算非线性动态投入产出模型[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[3] LI Luo_luo. An improvement on Ky-Fan('s) theorem of matrix eigenvalues[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1998, **279**(1): 111—117.

[4] 刘秀红. 关于矩阵特征值 Ky_Fan 定理的另一个改进[J]. 应用数学, 2001, **14**(2): 13—16.

[5] Aubin J P, Ekeland I. Applied Nonlinear Analysis [M]. New York: John Wiley & Sons, 1984.

[6] 张石生. 不动点理论及其应用[M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

[7] Istr¾tescu Vasile I. Fixed Point Theory —An Introduction [M]. Dordrechet, Holland/Boston, U S A: D Reidel Publishing Company, 1981.

[8] Aubin J P. Optima and Equilibria—An Introduction to Nonlinear Analysis [M]. New York: Springer_Verlag/Beijing: World Publishing Corporation, 1998.

[9] Aubin J P, Frankowska H. Set_Valued Analysis [M]. Boston, Basel, Berlin: Birkh¾user, 1990.

[10] Aubin J P. Mathematical Methods of Game and Economic Theory [M]. Amsterdam: North_Holland, 1979.

[11] Rockafellar R T. Convex Analysis [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

[12] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

[13] Holmes R B. Geometric Functional Analysis and Its Applications [M]. New York, Berlin: Springer_Verlag, 1975.

[14] Yosida K. Functional Analysis [M]. New York, Berlin: Springer_Verlag, 1965.

[15] 王耀东. 偏微分方程的 L^2 理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 1989.

[16] Wloka J. Partial Differential Equations [M]. Cambridge, London: Cambridge University Press, 1987.

Some Results on Continuous Type Conditional Input_Output Equation — Fixed Point and Surjectivity Methods

LIU Ying_fan[1,2], CHEN Xiao_hong[1]

(1. Department of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R. China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University of Post and Telecommunications, Nanjing 210003, P.R. China)

Abstract: Based on the classical (matrix type) input_output analysis, a type of nonlinear (continuous type) conditional Leontief model, input_output equation were introduced, as well as three corresponding questions, namely, solvability, continuity and surjectivity, and some fixed point and surjectivity methods in nonlinear analysis were used to deal with these questions. As a result, the main theorems are obtained, which provide some sufficient criterions to solve above questions described by the boundary properties of the enterprise('s) consuming operator.

Key words: input_output equation; solvability; continuity; surjectivity; fixed point, upper semi_continuous; upper hemi_continuous; nonlinear analysis