

文章编号: 1000\_0887(2005) 03\_0281\_06

# 张量封闭模型与三维取向分布 对纤维悬浮槽流稳定性的影响\*

游振江, 林建忠

(浙江大学 力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

(本刊编委林建忠来稿)

摘要: 应用 3 种不同的纤维方向张量封闭模型, 数值模拟了纤维悬浮槽流的流动稳定性问题, 从而研究封闭模型和纤维的三维取向分布对稳定性分析的影响。结果发现, 采用 3 种不同封闭模型所得到的流动稳定特性与纤维参数之间的关系是相同的, 但采用三维混合封闭模型时, 由于纤维的取向与流向的偏差程度较大, 所以纤维对流动的不稳定性具有最强的抑制作用。而采用二维混合封闭模型时, 由于纤维在平面取向条件下, 其轴线整体上趋于呈流向排列, 使得对流体的作用削弱, 导致纤维对流动不稳定性抑制的作用最弱。

关键词: 纤维悬浮流; 流动稳定性; 槽流; 封闭模型; 纤维取向

中图分类号: O373 文献标识码: A

## 引 言

含有悬浮纤维的流动在工业领域中十分常见。在许多类型的流场中, 纤维添加剂对于流动减阻起了重要作用<sup>[1~3]</sup>。纤维的存在导致悬浮流的一些特征发生改变, 其中之一就是流动稳定性。

涉及纤维对剪切流稳定性影响的研究成果非常少。Pilipenko 等<sup>[4]</sup>分析了共轴圆柱间纤维悬浮 Couette 流的线性稳定性。Azaiez<sup>[5]</sup>给出高  $Re$  数条件下纤维自由剪切流的线性稳定性分析结果, 并总结了纤维对流动时间不稳定性的影响。Azaiez<sup>[6]</sup>进一步考虑了纤维取向分布模型及空间分布状态对分析结果的影响。Lin 和 You<sup>[7]</sup>研究了平面纤维悬浮槽流场的线性稳定性, 发现纤维抑制流动不稳定性现象并给出解释。You 和 Lin<sup>[8]</sup>分析了纤维悬浮圆管流动的线性稳定性, 揭示了纤维增强流动稳定性的规律。Lin 和 You<sup>[9]</sup>采用空间增长模式分析了纤维悬浮槽流的稳定性, 结果表明, 悬浮纤维使得扰动不稳定的区域整体缩小, 且长波扰动所受的影响更为显著。

然而, 纤维的三维取向分布对槽流稳定性的影响尚没有结论。因此, 本文应用 3 种不同的

\* 收稿日期: 2003\_10\_09; 修订日期: 2004\_11\_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372090)

作者简介: 游振江(1976-), 男, 湖北襄樊人, 博士;

林建忠(联系人, Tel: + 86\_571\_87952882; Fax: + 86\_571\_87951464; E\_mail: jzlin@sfp.zju.edu.cn)。

纤维方向张量模型进行稳定性分析,即在纤维平面取向条件下分别采用自然封闭模型和二维混合封闭模型;而在三维取向状态下采用三维混合封闭模型。以此给出模型种类与稳定性分析结果之间的关系以及纤维的三维取向分布对流场稳定性的影响。

## 1 计算模型

### 1.1 问题描述

本文研究图 1 所示的平面槽流场,建立直角坐标系,其中  $x$  轴位于槽道中心线,  $y$  轴与之垂直。基本流动为层流,流向与垂向的速度分量分别为  $U_0$ 、 $V_0$ ,  $U_0$  最大值  $U$  在  $x$  轴上,槽宽为  $d$ 。

定义  $Re$  数为:  $Re = \rho U(d/2)/\eta$ , 其中  $\rho$ ,  $\eta$  分别为流体的密度与动力粘度。流场的控制方程和边界条件为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{u}|_{y=\pm 1} = 0, \quad (1)$$

式中  $\mathbf{u}$  为速度矢量,  $p$  为压力,  $\boldsymbol{\tau}$  为表观应力张量,它包含牛顿流体和纤维两部分的贡献,可以表示成:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_f, \quad (2)$$

其中第 1 项代表牛顿流体的贡献:

$$\boldsymbol{\tau}_s = \frac{1}{Re} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3)$$

式中应变率张量  $\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$ 。第 2 项  $\boldsymbol{\tau}_f$  代表纤维的贡献,取决于纤维的取向状态。

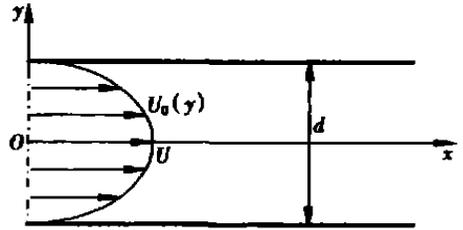


图 1 平面槽流场

### 1.2 本构方程

假设纤维是刚性的轴对称圆柱体,用轴向单位矢量  $p$  描述单根纤维的取向。定义概率分布函数  $\phi(p)$ , 则  $\phi(p) dp$  表示纤维分布于  $p$  同  $(p+dp)$  之间的概率。于是纤维取向的二阶和四阶方向张量 ( $a_2$  和  $a_4$ ) 定义为<sup>[10]</sup>:

$$a_{ij} = \int p_i p_j \phi(p) dp, \quad a_{ijkl} = \int p_i p_j p_k p_l \phi(p) dp, \quad (4)$$

式中积分遍历  $p$  的所有值。二阶张量  $a_2$  的变化率为:

$$\frac{Da_2}{Dt} = -\frac{1}{2}(\omega \cdot a_2 - a_2 \cdot \omega) - \frac{\lambda}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot a_2 + a_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} - 2\boldsymbol{\varepsilon} : a_4) + 2D_r \cdot (I - m a_2), \quad (5)$$

式中  $\omega$  是涡度张量,  $\lambda = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$ ,  $r$  为长径比。  $I$  是单位张量,  $m$  为空间维数。取向扩散张量  $D_r$  来源于纤维间的水动力相互作用<sup>[11]</sup>。Folgar 和 Tucker<sup>[12]</sup> 提出将  $D_r$  表示为  $C_I |\boldsymbol{\varepsilon}| I$ , 相互作用系数  $C_I$  取 0.01。

纤维取向的二阶方向张量  $a_2$  的方程中含有未知的四阶方向张量  $a_4$ , 为使方程封闭就必须建立这两个张量之间的关系。本文研究 3 种类型的近似封闭模型: 第 1 种是 Verwey 和 Dupret<sup>[13]</sup> 提出的自然封闭模型, 该模型在纤维平面取向的条件下具有简单形式并且适用于多种流场, 其分量形式为:

$$a_{ijkl} = \frac{1}{6} \det(a_{ij}) (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{3} (a_{ij} a_{kl} + a_{ik} a_{jl} + a_{il} a_{jk}), \quad (6)$$

式中  $\det(a_{ij})$  代表二阶张量的行列式。然而, 这种模型对于三维取向分布的情况没有显式解

析式<sup>[14]</sup>。第2和第3种是混合封闭模型,分别对应于纤维的二维和三维取向分布状态,前者定义为:

$$a_{ijkl} = f a_{\bar{j}} a_{kl} + (1-f) \left[ \frac{1}{6} (a_{\bar{j}} \delta_{kl} + a_{ik} \delta_{jl} + a_{il} \delta_{jk} + a_{kl} \delta_{ij} + a_{jl} \delta_{ik} + a_{jk} \delta_{il}) - \frac{1}{24} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right], \quad (7)$$

其中  $f = 1 - 4 \det(a_{\bar{j}})$ 。后者定义为:

$$a_{ijkl} = f a_{\bar{j}} a_{kl} + (1-f) \left[ \frac{1}{7} (a_{\bar{j}} \delta_{kl} + a_{ik} \delta_{jl} + a_{il} \delta_{jk} + a_{kl} \delta_{ij} + a_{jl} \delta_{ik} + a_{jk} \delta_{il}) - \frac{1}{35} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right], \quad (8)$$

其中  $f = 1 - 27 \det(a_{\bar{j}})$ 。混合封闭模型是线性封闭模型( $f = 0$ )与二次封闭模型( $f = 1$ )的组合,前者可以精确模拟纤维的随机取向分布,而后者适用于纤维的完全规则排列状态<sup>[15]</sup>。对于一般的流场,混合封闭模型比线性或二次封闭模型更加优越,但不如自然封闭模型精度高。根据方程(5)以及任一种封闭模型,可以完全确定流场中纤维的取向分布状态。描述纤维应力与取向分布关系的本构方程为<sup>[16, 17]</sup>:

$$\tau_f = \frac{A\phi}{Re} \left[ \mathbf{a}_4 - \frac{1}{3} \mathbf{I} \mathbf{a}_2 \right] : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (9)$$

式中  $\phi$  是纤维的体积分数。在半稀相情况下, Batchelor 得到:

$$A = \frac{r^2}{3 \ln(\sqrt{2\pi}/\phi)}. \quad (10)$$

方程(9)的右端第2项很小,与其余项相比可以忽略。为简便起见,定义,  $H = A\phi/Re$ ,  $F = \mathbf{a}_4$ :  $\boldsymbol{\varepsilon}$  纤维的应力可写为  $\tau_f = HF$ 。

### 1.3 线性稳定性方程

将纤维应力表达式及方程(2)、(3)代入动量方程(1),得到:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot (HF), \quad (11)$$

采用线性稳定性分析,在基本流之上叠加二维无限小扰动来预测流动转捩过程的初期阶段。基本流取为:

$$U_0(y) = 1 - y^2, \quad V_0(y) = 0, \quad \omega_0(y) = 2y, \quad \Psi_0(y) = y - \frac{y^3}{3}, \quad (12)$$

其中  $U_0(y)$ 、 $V_0(y)$  是基本流速度的两个分量,  $\omega_0(y)$ 、 $\Psi_0(y)$  分别为基本流的涡量和流函数。由此可得张量  $\mathbf{a}_{02}(y)$  和  $\mathbf{F}_0(y)$  的各个分量。将扰动项叠加到基本流之上并作 Fourier 展开得:

$$\phi(x, y, t) = \Psi_0(y) + \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (13)$$

式中  $\alpha$  波数为实数,  $c = c_r + ic_i$  为复数,  $c_r$  表示扰动相速度, 扰动增长率  $\beta_i = \alpha c_i$ 。其它流动变量均可作类似展开, 将展开式代入方程(11)并忽略高阶小量后可得纤维悬浮流的线性稳定性方程:

$$i\alpha [ (U_0 - c)(D^2 - \alpha^2) - D^2 U_0 ] \varphi - \frac{1}{Re} (D^2 - \alpha^2)^2 \varphi = H [ (D^2 + \alpha^2) F_{12} + i\alpha D (F_{11} - F_{22}) ] \varphi. \quad (14)$$

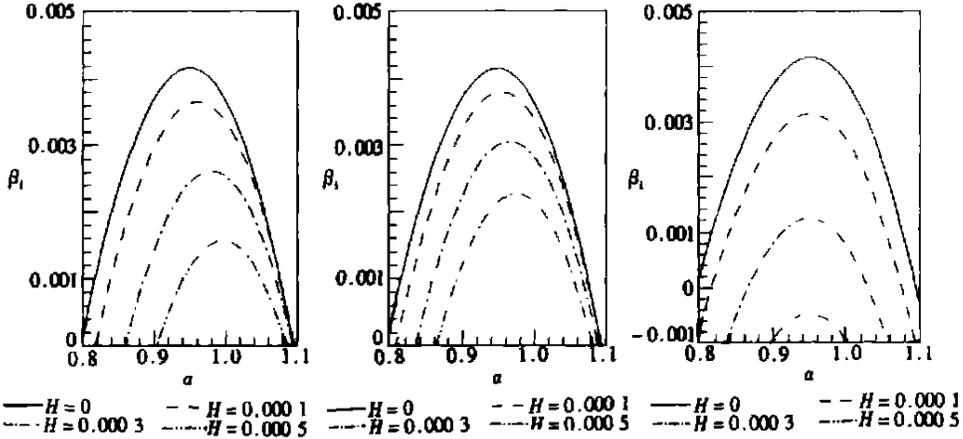
式中  $D = d/dy$ , 流函数扰动幅值  $\varphi$  的边界条件是:

$$\varphi(\pm 1) = 0, \quad D\varphi(\pm 1) = 0. \quad (15)$$

对于牛顿流 ( $H = 0$ ), 方程(14)退化为标准的 Orr\_Sommerfeld 方程。

## 2 结果及讨论

稳定性方程(14)由边界条件(15)采用有限差分法求解<sup>[7]</sup>。对于每一组给定的参数  $Re$ ,  $\alpha$  和  $H$ , 求出复特征值  $c$  使得系数矩阵的行列式为零。对应的特征向量  $\varphi$  以及其它流动变量随之确定。



(a) 自然封闭模型 (b) 二维混合封闭模型 (c) 三维混合封闭模型

图2 扰动增长率与波数关系曲线 ( $Re = 10\ 000$ )

### 2.1 扰动增长率

不同参数  $H$  条件下, 三类封闭模型得到的扰动增长率  $\beta_i$  同扰动波数  $\alpha$  的关系曲线如图 2 所示, 可见不同模型得到的线性扰动增长率及不稳定扰动的波数范围均随  $H$  值的增加而减小, 但是减小的程度却不相同。当纤维为平面取向分布时, 在相同参数条件下, 用自然封闭模型比用二维混合封闭模型得到的扰动增长率更低, 流动更不易失稳。若取消纤维平面取向的限制, 则用三维混合封闭模型所得到的扰动增长率显著降低, 而且  $H$  值的增加对不稳定性的抑制作用更为明显。

### 2.2 纤维取向分布

图 3 为不同封闭模型和参数  $H$  条件下, 纤维方向张量的分量  $a_{11}$  与坐标  $y$  的关系。  $a_{11}$  的值反映了纤维取向偏离流向的程度。由图可见, 基于三维混合封闭模型得到的取向偏离程度最高, 自然封闭模型居中, 二维混合封闭模型的结果偏离程度最低。  $a_{11}$  的峰值在远离近壁区以后逐渐衰减, 到流场中心区接近于零, 三维混合封闭模型的结果波动范围最大, 而另外两类模型波动范围较小。此外, 三类封闭模型均表明  $a_{11}$  的峰值随  $H$  值的增大而增大, 但三维混合封闭模型的结果受值的影响最明显。

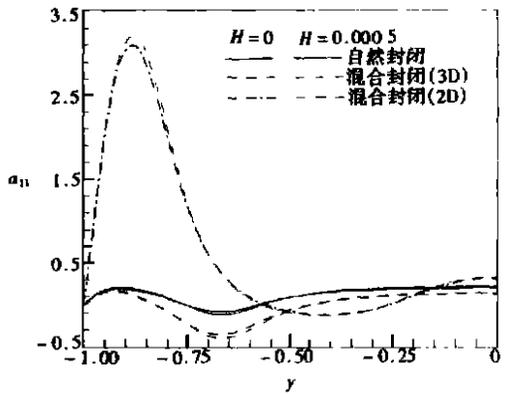


图3 纤维二阶方向张量分布规律

### 3 结 论

本文采用 3 种不同的纤维取向张量封闭模型,对纤维悬浮槽流作了线性稳定性分析,得到了稳定性分析的结果与封闭模型的关系。采用 3 种封闭模型得到的结果都说明纤维参数的增加可提高流动的稳定性,所不同的是,采用三维混合封闭模型得到的不稳定扰动增长率最小,二维混合封闭模型的增长率则最大。造成这种差别的主要原因为:当假设纤维为平面取向时,纤维趋向于沿流向排列,于是对不稳定性的抑制作用就较弱;而如果纤维为三维取向分布,则会导致纤维取向偏离流向的程度较大,从而增强了流动稳定性。

#### [参 考 文 献]

- [1] Arranaga A B. Friction reduction characteristics of fibrous and colloidal substances[J]. *Nature*, 1970, **225**(9): 447—449.
- [2] Mansour A R. Simple and explicit equations for the friction factor in turbulent fiber suspension flow [J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1985, **17**(2): 245—247.
- [3] Nsom B. Computation of drag reduction in fiber suspensions[J]. *Fluid Dynamics Research*, 1994, **14**(5): 275—288.
- [4] Pilipenko V N, Kalinichenko N M, Lemak A S. Stability of the flow of a fiber suspension in the gap between coaxial cylinders[J]. *Sov Phys Dokl*, 1981, **26**(7): 646—648.
- [5] Azaiez J. Reduction of free shear flows instability: Effects of polymer versus fibre additives[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2000, **91**(2/3): 233—254.
- [6] Azaiez J. Stability of the mixing layer of fiber suspensions: role of the closure approximation and off plane orientation[J]. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2000, **95**(2/3): 253—276.
- [7] LIN Jian\_zhong, YOU Zhen\_jiang. Stability in channel flow with fiber suspensions[J]. *Progress in Natural Science*, 2003, **11**(2): 95—99.
- [8] YOU Zhen\_jiang, LIN Jian\_zhong. Stability in the circular pipe flow of fiber suspensions[J]. *J of Hydrodynamics*, 2003, **15**(2): 12—18.
- [9] 林建忠,游振江. 纤维悬浮槽流空间模式稳定性分析[J]. *应用数学和力学*, 2003, **24**(8): 771—778.
- [10] Hinch E J, Leal L G. Constitutive equations in suspension mechanics. Part 2. Approximate forms for a suspension of rigid particles affected by Brownian rotations[J]. *J Fluid Mech*, 1976, **76**(2): 187—208.
- [11] Koch D L. A model for orientational diffusion in fiber suspensions[J]. *Phys Fluids*, 1995, **7**(8): 2086—2088.
- [12] Folgar F P, Tucker C L. Orientation behaviour of rigid fibres in concentrated suspensions[J]. *J Rheol*, 1982, **26**(6): 604—614.
- [13] Verieye V, Dupret F. Prediction of fiber orientation in complex injection molded parts[A]. In: Angel Y C Ed. *ASME, Applied Mechanics Division [C]*. New York: Academic Press, 1993, 139—163.
- [14] Cintra J S, Tucker C L. Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation[J]. *J Rheol*, 1995, **39**(6): 1095—1122.
- [15] Advani S G, Tucker C L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites[J]. *J Rheol*, 1987, **31**(8): 751—784.
- [16] Batchelor G K. The stress generated in a non-dilute suspension of elongated particles by pure straining motion[J]. *J Fluid Mech*, 1971, **46**(8): 813—829.

- [17] Shaqfeh E S G, Fredrickson G H. The hydrodynamic stress in a suspension of rods[J]. Phys Fluids, 1990, 2(1): 7—24.

## Effects of Tensor Closure Models and 3\_D Orientation on the Stability of Fiber Suspensions in a Channel Flow

YOU Zhen\_jiang, LIN Jian\_zhong

( Department of Mechanics , State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control , Zhejiang University , Hangzhou 310027, P . R. China )

**Abstract:** Three different kinds of closure model of fiber orientation tensors were applied to simulate numerically the hydrodynamic stability of fiber suspensions in a channel flow. The effects of closure models and three\_dimensional ( 3\_D ) orientation distribution of fibers on the results of stability analysis were examined. It is found that the relationship of the behavior in hydrodynamic stability and the parameter of the fiber given by all the three models are the same. However, the attenuation of flow instability is most distinct using 3\_D hybrid model because the orientation of the fiber departs from the flow direction, and least apparent using its 2\_D counterpart for that the fibers show a tendency towards alignment with the flow direction in this case.

**Key words:** fiber suspension; hydrodynamic stability; channel flow; closure model; fiber orientation