

文章编号: 1000-0887(2005) 02-0239-07

一种新的声椭球无限单元*

杨瑞梁¹, 汪鸿振²

(1. 中原工学院 能源与环境工程系, 郑州 450007;
2. 上海交通大学 振动、冲击、噪声国家重点实验室, 上海 200030)

(马兴瑞推荐)

摘要: 提出了一种新的声椭球无限单元。这种声无限单元基于一种新的声压表达式, 这种声压表达式能够更准确地代表着椭球声场的声传播模式。这种新方法的形函数类似于 Burnett 方法, 而权函数定义为形函数和一个附加因子的乘积。因为仅需要一维的数值积分, 这种新方法的代码生成十分容易, 就像处理一维单元一样。耦合标准的有限元程序, 这种声无限单元理论上能够高效地求解任何形状的声源的声辐射和声散射现象。简要地推导了这种新方法, 并给出了这种方法详尽的推导结果。为更有效地检验该无限元方法的可行性, 文中例子仅考虑无限元求解的精度, 而不包括相应的有限元。使用这种新方法, 精确地推导出了摆动球的理论计算公式。而长旋转椭球的例子则表明了这种方法优于边界元方法和其他声椭球无限元方法。这些例子表明了这种新方法是切实可行的。

关键词: 无限元; 椭球声无限元; 形函数; 权函数; 椭球坐标; Burnett 方法
中图分类号: O422.7 **文献标识码:** A

引 言

使用无限元近似来求解外波传播的思想可以追溯到 Bettess^[1] 等人的早期著作。自那以后, 无限元开始广泛地应用于各种各样的其他工程问题。近年来, 无限元中涌现了大量的新方法, 例如 Burnett^[2]、Astley^[3]、Gerdes^[4] 相继提出了新的无限元。这些新的无限元是早期无限元^[5] 的拓展, 并分别在 1998 年被 Gerdes^[6]、在 2000 年被 Astley^[7]、在 2003 年被杨瑞梁^[8] 所综述。

在 2001 年, Astley^[9] 通过数值研究认为: 没有一个椭球声无限元的公式在高频和高比率能够准确地描述椭球声传播特性。因此, 本文提出了一种新的椭球声场声压表达式, 这种声压表达式能够更加准确地描述和求解椭球声场。为了简化并取消 Burnett 方法中的指数函数积分, 这篇论文提出了一种基于这种新的声压展开的无限元。为避免在远场出现有限振荡项和其他一些困难(这在文献[3]中有描述), 权函数取为形函数的复数共扼, 并乘以一个附加因子。在椭球坐标的半径方向, 使用解析积分, 而在角方向, 使用普通的数值积分, 这样, 使用这种新的无限元求解三维的声学问题, 可以转化为只需要一维的积分。寻找一个包围结构声源的人工

* 收稿日期: 2003_12_20; 修订日期: 2004_10_08

作者简介: 杨瑞梁(1977—), 男, 河南人, 博士, 从事噪声与振动控制的研究(联系人, Tel: + 86_371_7698821; Fax: + 86_371_7698961; E_mail: yangruiliang2001@sina.com.cn)。

边界,在边界之外,可以使用这种新的声无限元;而在声源和人工边界之间,可以仍然像通常那样使用传统的有限元。例子的结果显示了这种新的椭球声无限元优于其他声无限元。

1 椭球坐标系和一些概念

这里引入椭球坐标系,其坐标 (r, θ, ϕ) 被定义为:

$$\begin{cases} x = r(1 - qc \cos^2(\theta))^{1/2} \cos(\phi), \\ y = (r^2 - g^2)^{1/2} \sin(\theta) \sin(\phi), \\ z = (r^2 - f^2)^{1/2} \cos(\theta)(1 - p \cos^2(\phi))^{1/2}, \end{cases} \quad (1)$$

坐标 (x, y, z) 表示传统的 Cartesian 坐标系, $p = g^2/f^2$, $q = 1 - p$, $f^2 = a^2 - c^2$, $g^2 = a^2 - b^2$, $a \geq b \geq c$, $2a, 2b$ 和 $2c$ 分别是椭球的长轴、中轴和短轴。令 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, 这样 r 为常值就意味着椭球的外表面, θ 为常值就意味着单叶双曲面, ϕ 为常值意味着双叶双曲面。当 $a = c$ 时, 椭球就变成球, 并有 $f = 0, g = 0$ 。此时, 为保证方程的连续性, 我们假定 p 等于 1, 那么方程(1)就转变为普通的球坐标系。

为简化分析, 我们假定 $\varepsilon = f/r$, $F = (1 - \varepsilon^2)^{1/2}$, $G = (1 - g^2\varepsilon^2/f^2)^{1/2}$, $P = (1 - g^2 \cos^2 \phi/f^2)^{1/2}$, $Q = [1 - (1 - g^2/f^2) \cos^2 \theta]^{1/2}$ 。

2 形函数和权函数的选择

图 1 显示的是椭球表面的无限单元基底。单元被沿 r, θ, ϕ 的方向进行划分, 也就是, 坐标面的每个表面都在坐标面上。声场中散射和辐射的声压可以表示成:

$$p(r, \theta, \phi) = \sum_{j=1}^N \frac{\sqrt{1 - f^2/a^2}}{\sqrt{1 - f^2 \sin^2 \theta/a^2}} \times \frac{\sqrt{1 - g^2/a^2}}{\sqrt{1 - g^2 \sin^2 \phi/a^2}} \mathcal{R}_j P_j, \quad (2)$$

这里 \mathcal{R}_j 是在节点取 1, 而在无穷远处为 0 的函数。

$$\mathcal{R}_j = \phi_{\mu}^{(r)} \phi_{\nu}^{(\phi)} \phi_w^{(\theta)}, \quad (3)$$

其中 $\phi_{\mu}^{(r)}$ 是沿着双曲线插值的“径向”形函数, 而 $\phi_{\nu}^{(\phi)}$ 、 $\phi_w^{(\theta)}$ 是沿着角方向的“角”形函数。半径形函数 $\phi_{\mu}^{(r)}$ 可以表示为:

$$\phi_{\mu}^{(r)}(r) = e^{-ik(r-a)} \times (a/r) \times F_{\mu}(a/r), \quad (4)$$

这里的 $F_{\mu}(a/r)$ 是 $(n-1)$ 阶的多项式, 它有多种选法^[7], 包括有: Lagrange 插值多项式^[1-4], shifted Legendre 多项式^[10] 和 shifted Chebyshev 多项式^[11]。“角”函数 $\phi_{\nu}^{(\phi)}$ 和 $\phi_w^{(\theta)}$ 是传统的 1 维多项式(例如有 serendipity, Lagrange, 或者 hierarchic, 等等)。可以验证^[12], 方程(2)能够比以前的公式更准确地描述椭球声场。

我们假定:

$$U = \frac{\sqrt{1 - f^2/a^2}}{\sqrt{1 - f^2 \sin^2 \theta/a^2}}, \quad X = \frac{\sqrt{1 - g^2/a^2}}{\sqrt{1 - g^2 \sin^2 \phi/a^2}}, \quad Y_{\mu} = (a/r) \times F_{\mu}(a/r). \quad (5)$$

那么形函数可以定义为:

$$\phi_l = U \times X \times e^{-ik(r-a)} \times Y_{\mu} \times \phi_{\nu}^{(\phi)} \times \phi_w^{(\theta)}. \quad (6)$$

在三维的例子中, 如果权函数选择为形函数复数共扼, 或者是形函数, 那么可能产生以下

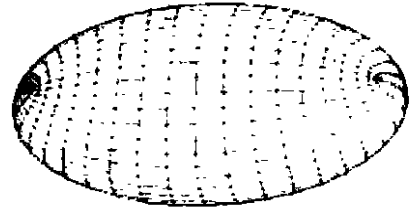


图 1 椭球表面的无限元基底
(实线代表 θ, ϕ 坐标线)

一些困难^[3]:

- 1) 只有当参数矩阵确定以后, 在质量和刚度矩阵中的积分才有可能取消。
 - 2) 甚至当半径方向趋于无穷大, 由于消声的辐射积分而引起的阻尼项仍然是有限的。
- 这些问题可以通过在权函数中乘以一个附加的权因子 ($1/r^2$) 而得到解决。权函数因此

可以定义为:

$$W_l = U \times X \times e^{ik(r-a)} \times (1/r^2) \times Y_\mu \times \phi_v^{(\phi)} \times \phi_w^{(\theta)}. \quad (7)$$

3 无限元

应用 Galerkin 权残值方法到单个无限单元的 Helmholtz 微分方程上, 有:

$$([K] - k^2[M])\{P\} = \{F\}, \quad (8)$$

这里 $[K]$ 为刚度矩阵, $[M]$ 为质量矩阵, $\{F\}$ 是压力梯度矢量。他们分别为:

$$K_{ij} = \iiint_{V^e} W_l \cdot \nabla^2 \phi_j dV, \quad (9)$$

$$M_{ij} = \iiint_{V^e} W_l \phi_j dV, \quad (10)$$

$$F_l = \iint_{S^e} W_l \frac{\partial p}{\partial n} dS, \quad (11)$$

其中 V^e 表示单元的体积, 而 S^e 表示单元的表面积。Burnett 方法^[2] 和其他的方法^{[3,4],[6,7],[10]} 把 F_l 视为 0。本文作者在后面的例子中将计算这一项的影响。

方程(5)、(6)、(7)可以分别带入 K_{ij} 、 M_{ij} 和 F_l , 得:

$$K_{ij} = S_{\mu\mu}^{(1)} T_{wvw'}^{(1)} + S_{\mu\mu}^{(2)} T_{wvw'}^{(2)} - S_{\mu\mu}^{(3)} T_{wvw'}^{(3)}, \quad (12)$$

$$M_{ij} = S_{\mu\mu}^{(4)} T_{wvw'}^{(1)} - f^2 S_{\mu\mu}^{(2)} T_{wvw'}^{(4)} + f^2 a^4 S_{\mu\mu}^{(3)} T_{wvw'}^{(5)}, \quad (13)$$

$$F_l = F_l^{(1)} + F_l^{(2)} + F_l^{(3)} + F_l^{(4)} + F_l^{(5)} + F_l^{(6)}, \quad (14)$$

这里

$$S_{\mu\mu}^{(1)} = \int_a^\infty FG \left[\frac{\partial Y_\mu}{\partial r} - ik \right] \left[ik - \frac{2Y_\mu}{r} + \frac{\partial Y_\mu}{\partial r} \right] dr, \quad S_{\mu\mu}^{(2)} = \int_a^\infty \frac{1}{FG} Y_\mu Y_\mu dr,$$

$$S_{\mu\mu}^{(3)} = \int_a^\infty \frac{1}{r^2 FG} Y_\mu Y_\mu dr, \quad S_{\mu\mu}^{(4)} = \int_a^\infty \frac{r^2}{FG} Y_\mu Y_\mu dr,$$

$$T_{wvw'}^{(1)} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} P X^2 \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi)} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{U^2}{Q} \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta)} d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2}{P} \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi)} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{(Q^2 - 1) U^2 \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta)}}{Q} d\theta,$$

$$T_{wvw'}^{(2)} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2 \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi)}}{P} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q \frac{\partial \phi_w^{(\theta)}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_w^{(\theta)}}{\partial \theta} d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi_2} X^2 P \frac{\partial \phi_v^{(\phi)}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi_v^{(\phi)}}{\partial \phi} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{U^2 \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta)}}{Q} d\theta,$$

$$T_{wvw'}^{(3)} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2 (1 - P^2) \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi)}}{P} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q \frac{\partial \phi_w^{(\theta)}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_w^{(\theta)}}{\partial \theta} d\theta + \int_{\phi_1}^{\phi_2} X^2 P \frac{\partial \phi_v^{(\phi)}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi_v^{(\phi)}}{\partial \phi} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta)} d\theta,$$

$$\begin{aligned}
T_{ww'}^{(4)} &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2}{P} \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi')} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q^3 \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta')} d\theta - \\
&\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2(1-P^2)^2}{P} \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi')} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{U^2}{Q} \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta')} d\theta, \\
T_{ww'}^{(5)} &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} X^2(1-P^2)P \phi_v^{(\phi)} \phi_v^{(\phi')} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q \frac{\partial \phi_w^{(\theta)}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_w^{(\theta')}}{\partial \theta} d\theta + \\
&\int_{\phi_1}^{\phi_2} \frac{X^2(1-P^2)}{P} \frac{\partial \phi_v^{(\phi)}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi_v^{(\phi')}}{\partial \phi} d\phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} U^2 Q(Q^2+1) \phi_w^{(\theta)} \phi_w^{(\theta')} d\theta, \\
F_l^{(1)} &= \iint_{S^{(e)(r)\text{out}}} W_l \frac{\partial p}{\partial r} \frac{A A_\phi}{A_r} d\theta d\phi \Big|_{r=r_2}, \quad F_l^{(2)} = \iint_{S^{(e)(r)\text{in}}} W_l \frac{\partial p}{\partial r} \frac{A A_\phi}{A_r} d\theta d\phi \Big|_{r=r_1}, \\
F_l^{(3)} &= \iint_{S^{(e)(\theta)\text{out}}} W_l \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{A_r A_\phi}{A_\theta} dr d\phi \Big|_{\theta=\theta_2}, \quad F_l^{(4)} = \iint_{S^{(e)(\theta)\text{in}}} W_l \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{A_r A_\phi}{A_\theta} dr d\phi \Big|_{\theta=\theta_1}, \\
F_l^{(5)} &= \iint_{S^{(e)(\phi)\text{out}}} W_l \frac{\partial p}{\partial \phi} \frac{A A_\theta}{A_\phi} dr d\theta \Big|_{\phi=\phi_2}, \quad F_l^{(6)} = \iint_{S^{(e)(\phi)\text{in}}} W_l \frac{\partial p}{\partial \phi} \frac{A A_\theta}{A_\phi} dr d\theta \Big|_{\phi=\phi_1}, \\
A_r &= \frac{(1-\varepsilon^2 Q^2)^{1/2} [1-\varepsilon^2(1-P^2)]^{1/2}}{FG}, \quad A_\theta = \frac{r(1-\varepsilon^2 Q^2)^{1/2} (P^2+Q^2-1)^{1/2}}{Q}, \\
A_\phi &= \frac{r[1-\varepsilon^2(1-P^2)]^{1/2} (P^2+Q^2-1)^{1/2}}{P},
\end{aligned}$$

其中 $S^{(e)(r)\text{out}}$ 、 $S^{(e)(r)\text{in}}$ 、 $S^{(e)(\phi)\text{out}}$ 、 $S^{(e)(\phi)\text{in}}$ 、 $S^{(e)(\theta)\text{out}}$ 、 $S^{(e)(\theta)\text{in}}$ 都是单元的表面。实际上, 表面的法方向必须予以考虑。刚度矩阵 $[K]$ 和质量矩阵 $[M]$ 都是 $N \times N$ ($N = nm^2$) 矩阵, 他们都是在半径方向的 $n \times n$ 项的相乘和两个角方向的 $m \times m$ 项的相乘。压力梯度矢量 $\{F\}$ 是 N 阶矢量。对于无限元, 当 $r \rightarrow \infty$ 时, 应用无穷远处的 Sommerfeld 辐射条件, 有:

$$F_l^{(1)} = 0$$

如果结构的表面声压已知, 也就没有必要求解 $F_l^{(2)}$, 可以直接使用方程(2)。

4 例 子

因为这篇文章关心的是无限元, 因此在下面的章节中, 只考虑无限元。这样我们就可以准确地判定这种方法是否真的可行。这一节的例子包括: 一个摆动球和一个长椭球。

4.1 摆动球

这里我们来考虑摆动球的例子。摆动球的辐射公式可以表示为:

$$p = - \left\{ ik \Omega a^3 v / r^2 \right\} \left\{ (1 + kr) / [2(1 - ika) - (ka)^2] \right\} e^{-ik(r-a)} \cos \phi, \quad (15)$$

这里 $\cos \phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_R$, \mathbf{n} 是表面的法向矢量, \mathbf{e}_R 表示从源到接受者之间的波传播方向。相似地, 这里我们使用一层无限单元, 每层单元半径方向的节点数目为 2, 并使用 Lagrange 插值多项式来求解这个例子。当然, 半径方向节点的数目可以任意选择。

使用方程(6)有:

$$\phi_1 = e^{-ik(r-a)} \left[\frac{-a}{r} + \frac{2a^2}{r^2} \right] \cos \phi, \quad (16)$$

$$\phi_2 = e^{-ik(r-a)} \left[\frac{4a}{r} - \frac{4a^2}{r^2} \right] \cos \phi \quad (17)$$

假定 $r_2 = 2a$, 方程(5)、(6)、(7)可以带入方程(9)、(10)、(11)中:

$$[M] = \begin{bmatrix} a/3 & -(2/3)a \\ -(2/3)a & (16/3)a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^3 \phi_1 - \cos^3 \phi_2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}k^2 a + \frac{1}{3}ki + \frac{12}{5a} & \frac{4}{3}ki - \frac{2}{3}k^2 a - \frac{14}{5a} \\ -\frac{2}{3}k^2 a - \frac{4}{3}ki - \frac{4}{5a} & \frac{16}{3}k^2 a + \frac{8}{3}ki + \frac{8}{5a} \end{bmatrix} \frac{\cos^3 \phi_1 - \cos^3 \phi_2}{3} + \begin{bmatrix} 2/(15a) & 1/(15a) \\ 1/(15a) & 8/(15a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^3 \phi_2 - \cos^3 \phi_1 \\ 3 \end{bmatrix} + \cos \phi_1 - \cos \phi_2, \quad (19)$$

$$\{F\} = \begin{bmatrix} i\rho v (\cos^3 \phi_1 - \cos^3 \phi_2)/3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/(15a) & 1/(15a) \\ 1/(15a) & 8/(15a) \end{bmatrix} \times (\cos \phi_2 \sin^2 \phi_2 - \cos \phi_1 \sin^2 \phi_1) \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

使用上述方程有:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{i\rho c a v (1 + ika)}{2(1 - ika) - (ka)^2} \\ -\frac{i\rho c a v (1 + 2ika)/4}{2(1 - ika) - (ka)^2} \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

带入方程(2)得:

$$p = -\left\{ ik\rho c a^3 v / r^2 \right\} \left\{ (1 + kr) / [2(1 - ika) - (ka)^2] \right\} e^{-ik(r-a)} \cos \phi \quad (22)$$

方程(22)同方程(15)完全相同,这就意味着这种新的椭球声无限元能够十分精确求解这类问题。Astley^[3]使用了1764个等参矩形单元,和294个线性波包络单元^[8],来求解这个例子。尽管结果同精确解接近,但是仍然有误差。因此,可以说:这种方法优于Astley的方法(无限波包络单元)。

压力梯度(不包括表面项)不为0,使用Burnett方法^[1-4]无法获得此类结果。并且,使用Burnett方法意味着必须处理繁复的积分运算。通过方程(19)、(20),可以看出被Burnett方法^[2]等忽略的项分别为:

$$[K'] = \begin{bmatrix} 2/(15a) & 1/(15a) \\ 1/(15a) & 8/(15a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^3 \phi_2 - \cos^3 \phi_1 \\ 3 \end{bmatrix} + \cos \phi_1 - \cos \phi_2, \quad (23)$$

$$[F'_l] = \begin{bmatrix} 2/(15a) & 1/(15a) \\ 1/(15a) & 8/(15a) \end{bmatrix} (\cos \phi_2 \sin^2 \phi_2 - \cos \phi_1 \sin^2 \phi_1) \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}. \quad (24)$$

它们同其他项的阶次相同,因此在这个例子中,它们不能被轻易忽略掉。可以得出结论就是:除非表面振速或者压力只同半径方向相关而同角方向无关,否则我们不能忽略掉这些项。通过式(23)、(24),我们可以看出忽略掉的项对结果的影响很大,而不论单元的尺寸有多小。

4.2 长椭球

在方程(1)中,令 $b = c = 0.5$, $a = 1$, 频率为600 Hz,周围的媒质为空气,空气的密度为 1.225 kg/m^3 ,声速为 340 m/s 。如果在方程表面取表面声压均匀分布为 1 Pa ,则根据本文的方法,就可以得出声场中任一点的声压。因为这个问题没有精确解,我们把计算的 10 m 处的远场指向性结果和使用边界元的计算结果相比较。

如果仅使用Burnett方法,则计算在远场不收敛^{[7],[9],[10]},无法在此作为参照对象。这里修正Burnett方法,把Burnett方法的权函数取为形函数的复数共扼,再乘以一个修正因子,命名为共扼Burnett方法,然后作为参考对象^{[7],[9],[10]}。

本计算取半径方向的节点数为 7, 角方向的节点数为 40, 共 40 个无限单元, 在作者的计算机上, 无限元的计算时间极短, 小于 1 s, 而边界元的计算时间则超过 10 min(计算比率为 10 的椭球的声辐射问题时, 耗时超过 1 h)。

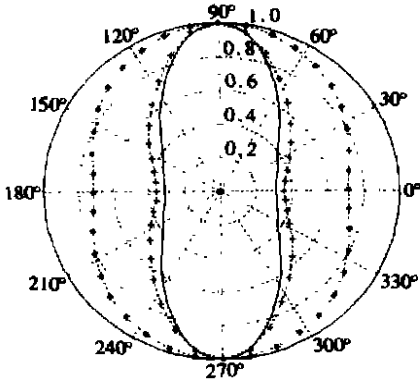


图 2 $a/b = 2, f = 600 \text{ Hz}$ 时 10 m 处远场指向性的比较(实线表示 BEM 计算结果; * 表示共扼 Burnett 方法计算结果; + 表示本文计算结果)

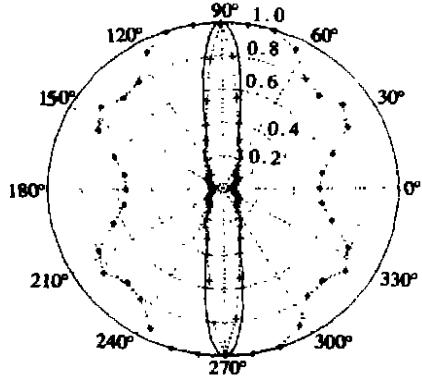


图 3 $a/b = 10, f = 600 \text{ Hz}$ 时 10 m 处远场指向性的比较(实线表示 BEM 计算结果; * 表示共扼 Burnett 方法计算结果; + 表示本文计算结果)

图 2 中, 根据 Burnett 方法计算的远场指向性表示为 *, 而本文计算的远场指向性表示为 +, 边界元计算的远场指向性表示为实线。如果 $b = c = 0.1$, 其他条件都不发生变化的计算结果如图 3 所示。需要说明的是, 当频率增加, 计算时间基本上不会增加。从图 2 和图 3 可以看出这种新的方法确实优于其他的声无限元方法。

5 结 论

这篇论文提出了一种基于一个新的声压表达式的椭球声无限元。这种椭球无限元的形函数类似于 Burnett 方法^[2], 而权函数定义为形函数的复数共扼, 并乘以一个权因子。求解外波问题时, 这种方法首先要寻找一个包围结构的人工边界, 在结构和人工边界之间使用传统的有限元代码, 而在人工边界外, 使用这种新的椭球声无限元。摆动球的例子说明了这种新的声无限元能够精确地求解这类问题, 这一点优于其他声无限元, 例如文献[1]~[4]。然后, 我们分析了长椭球的辐射问题。相对于边界元方法, 这种新的无限元的计算效率有极大的提高, 而这种新的无限元的计算精度又优于 Burnett 方法。这些例子说明了这种新无限元方法的计算结果是可靠的, 这种无限元方法是可行的。

[参 考 文 献]

- [1] Bettess P. Infinite elements[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1977, 11(1): 53—64.
- [2] Burnett David S. A three-dimensional acoustic infinite element based on a prolate spheroidal multipole expansion[J]. J Acoust Soc Amer, 1994, 96(5): 2798—2816.
- [3] Astley R J, Macaulay G J. Mapped wave envelope for acoustical radiation and scattering[J]. J Sound Vibration, 1994, 170(1): 97—118.
- [4] Gerdes K. Solution of the 3D-Helmholtz equation in the exterior domain of arbitrary shape using hp-finite infinite elements[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1998, 29(1): 1—20.

- [5] Bettess P. Infinite Element [M]. London: Wheeler's Hill, 1992: 1—264.
- [6] Gerdes K. A summary of infinite element formulations for exterior Helmholtz problems[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **164**(1): 95—105.
- [7] Astley R J. Infinite elements for wave problems: A review of current formulations and an assessment of accuracy[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2000, **49**(3): 951—976.
- [8] 杨瑞梁, 汪鸿振. 声无限元进展[J]. *机械工程学报*, 2003, **39**(11): 82—87.
- [9] Astley R J, Coyette J P. The performance of spheroidal infinite elements[J]. *Internat J Numer Methods Engrg*, 2001, **52**(3): 1379—1396.
- [10] Shirron Joseph J, Babuska Ivo. A comparison of approximate boundary conditions and infinite element methods for exterior Helmholtz problems[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1998, **164**(1): 123—139.
- [11] Shirron Joseph J, Dey Saikat. Acoustic infinite elements for non_separable geometries[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, **191**(5): 4123—4139.
- [12] YANG Rui_liang, WANG Hong_zhen. Adaptive ellipsoidal acoustic infinite element [J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, **17**(2): 293—297.

A Novel Ellipsoidal Acoustic Infinite Element

YANG Rui_liang¹, WANG Hong_zhen²

(1. Department of Energy and Environmental Engineering, Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou 450007, P. R. China;

2. State Key Laboratory of Vibration, Shock & Noise, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: A novel ellipsoidal acoustic infinite element is proposed. It is based a new pressure representation, which can describe and solve the ellipsoidal acoustic field more exactly. The shape functions of this novel acoustic infinite element are similar to the Burnett's method, while the weight functions are defined as the product of the complex conjugates of the shaped functions and an additional weighting factor. The code of this method is cheap to generate as for 1_D element because only 1_D integral needs to be numerical. Coupling with the standard finite element, this method provides a capability for very efficiently modeling acoustic fields surrounding structures of virtually any practical shape. This method was deduced in brief and the conclusion was kept in detail. To test the feasibility of this novel method efficiently, in the examples the infinite elements were considered, excluding the finite elements relative. This novel ellipsoidal acoustic infinite element can deduce the analytic solution of an oscillating sphere. The example of a prolate spheroid shows that the novel infinite element is superior to the boundary element and other acoustic infinite elements. Analytical and numerical results of these examples show that this novel method is feasible.

Key words: infinite element; ellipsoidal acoustic infinite element; shape function; weight function; ellipsoidal coordinate; Burnett's method