

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0222_09

同位非结构和结构网格摄动有限体积法(PFV) 求解二维 Navier-Stokes 方程组*

高 智, 代民果, 李桂波, 柏 威

(中国科学院 力学研究所 LHD 高温气体重点开放实验室, 北京 100080)

(戴世强推荐)

摘要: 根据 NS 方程组的一阶迎风和二阶中心有限体积(UFV 和 CFV)格式, 导出 NS 方程组迎风和中心摄动有限体积(UPFV 和 CPFV)格式。该格式通过把控制体界面质量通量摄动展开成网格间距的幂级数, 并由守恒方程本身求得幂级数系数而获得。迎风和中心摄动有限体积格式使用了与一阶迎风和二阶中心格式相同的基点数和相同的表达形式, 宜于计算机编程。顶盖驱动方腔流和驻点流标量输运的数值实验证明, 迎风 PFV 格式比一阶 UFV、二阶 CFV 格式有更高的精度, 更高的分辨率。尤其是良好的鲁棒特性。对顶盖驱动方腔流, 在 Re 数从 10^2 到 10^4 范围内, 亚松弛系数可在 0.3~0.8 任取, 收敛性能良好。

关键词: 同位网格; 结构网格; 非结构网格; 摄动有限体积法; 不可压缩流体 NS 方程组; SIMPLEC 算法; MSIMPLEC 算法; SIMPLER 算法

中图分类号: O351 文献标识码: A

引 言

有限体积(FV)方法使用积分形式的守恒方程作为它的出发点, 能够方便地使用多种网格(结构网格和非结构网格), 也适用于具有复杂几何区域的流场。这使得它在工程计算上很流行, 广泛应用于各种商用计算流体力学软件。有限体积(FV)法相对有限差分(FD)法和有限元(FE)法的弱点是精度不太高。FV 方法为二级近似(积分近似和重构近似), 若积分近似为 n_1 阶, 重构近似为 n_2 阶, 则 FV 方法的精度为 $\min(n_1, n_2)$ 阶。国内外学者们经过多年的研究, 发展了一些实用的有限体积格式, 例如一阶迎风和二阶中心格式^[1]、Jameson 等^[2,3]的中心型有限体积格式、Liou 和 Steffen^[4,5]的对流迎风分裂算法(AUSM), 这些格式的精度小于或等于 2 阶。而目前的高精度格式一般是多基点格式。由于需要包括更多的控制单元, 求解更复杂的代数方程, 边界处理更复杂, 所以高于 2 阶的有限体积法在三维问题的开发中有较大困难。

近年来, 本文第一作者高智^[6,7]提出了摄动有限体积(PFV)法。该法与提高格式精度的常

* 收稿日期: 2003_01_21; 修订日期: 2004_10_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10032050; 10272106)

作者简介: 高智(1937—), 男, 山西人, 研究员, 博士生导师, 主要从事流体力学、计算流体力学和气流激光物理研究;

代民果(联系人, Tel: + 86_10_62545533_2216; Fax: + 86_10_62561284; E_mail: 20108009@sina.com)。

用方法(分别提高对流项和扩散项格式精度)不同,它综合考虑对流项和扩散项的相互作用,利用对流、扩散项之间的关系来提高格式精度。具体做法是对界面质量通量的数值进行摄动,并利用积分方程本身获得摄动幂级数的系数,最后给出对流扩散方程的迎风型和中心型 PFV 格式。PFV 格式保留了一阶迎风和二阶中心的优点,然而它的内插(或称之为重构)近似具有任意阶精度。对于已知速度场的标量输运问题和几个不同模型方程的 PFV 格式数值计算表明,PFV 格式比一阶迎风和二阶中心 FV 格式的精度和分辨率高、稳定性好、雷诺数适用范围更宽广。

本文进一步推导了不可压 NS 方程组 PFV 方法。在结构网格中使用 SIMPLER^[8]和 MSIMPLEC^[9]的混合算法预报压力速度耦合关系,在非结构网格中使用 SIMPLEC^[10]算法预报压力速度耦合关系,并用六阶迎风 UPFV、一阶迎风 FV 格式计算了顶盖驱动的方腔流问题;用二阶迎风 PFV、四阶中心 PFV、二阶中心 FV 和一阶迎风 FV 格式计算已知速度场的标量输运问题,给出计算结果并加以讨论。

1 摄动有限体积(PFV)格式

标量输运积分方程的一般形式如下

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mu \cdot \nabla \cdot \phi \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1)$$

其中 ϕ 是通用标量变量, ρ , \mathbf{u} , t 和 μ 分别是流体密度、速度、时间和动力学粘性系数, V 和 S 分别是控制体(CV)体积和表面积。 \mathbf{n} 是控制体界面单位外法向矢量。摄动有限体积法(PFV)以积分形式的对流扩散方程的一阶迎风和二阶中心格式作为它的出发点。把通过控制体每个界面质量通量的数值摄动展开成网格间距的幂级数,幂级数的系数通过使用空间分裂技术和对流扩散通量之间的关系求得。在两相邻控制体的中心 P_0 和 P_j 连线近似垂直于公共界面的假定下,半离散的迎风和中心型 PFV 格式分别如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V_{P_0} \phi_{P_0}) &= \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j} \left[\mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} - \frac{1}{2} n_{\mathcal{D}f} (1 - \text{sign} n_{\mathcal{D}f}) \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{jf}^k \right] \times \\ &(\phi_j - \phi_{P_0}) - \sum_{j=1}^{n_{P_0}} p_j S_j + \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j} \left[(\mu \cdot \nabla \cdot \phi \cdot \mathbf{S})_j - \right. \\ &\left. \mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} (\phi_j - \phi_{P_0}) \right]_{\text{old}} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$G_j = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(k+1)!} R_{jf}^k (\text{sign} n_{\mathcal{D}f})^k, \quad (3)$$

$$\text{sign} n_{\mathcal{D}f} = \begin{cases} 1, & n_{\mathcal{D}f} > 0, \\ -1, & n_{\mathcal{D}f} < 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V_{P_0} \phi_{P_0}) &= \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j^c} \left[\mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} - \frac{1}{2} n_{\mathcal{D}f} \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{jf}^k \right] (\phi_j - \phi_{P_0}) - \\ &\sum_{j=1}^{n_{P_0}} p_j S_j + \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j^c} \left[(\mu \cdot \nabla \cdot \phi \cdot \mathbf{S})_j - \mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} (\phi_j - \phi_{P_0}) \right]_{\text{old}} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$G_j^c = \sum_{k=0}^N \frac{1}{(2k+1)!} R_{jf}^{2k}, \quad (6)$$

ϕ_{P_0} 为控制体 P_0 中心处的 ϕ 值; V_{P_0} 是控制体 P_0 的体积; d_j 是连接相邻两控制体中心, 从 P_0 指向 P_j 的矢量; S_j 是控制体 P_0 边界上 jj -面的面积矢量, 它的方向与控制体在该面处的外法向一致; $R_{jj} = F_{jj} \cdot |d_j|^2 / (\mu d_j \cdot S_j)$ 可以视为 d_j 方向的网格雷诺数; m_{jj} 是通过控制体 P_0 边界 jj -面的质量流量. 通过控制体界面的连续性方程为

$$\sum_{j=1}^{n_{P_0}} m_{jj} = 0 \tag{7}$$

式(2)、(5)右边最后一项标记 old, 是上一迭代步的值, 因为两相邻控制体中心节点的连线与控制体界面近似正交, 所以 old 项通常是个小量. 从 PFV 格式的推导过程来看, 我们知道迎风和中心 PFV 格式的修正微分方程的截断误差分别是 $(N + 1)$ 阶和 $(2N + 2)$ 阶. 因此, UPFV 格式(2) 是一个有 $N + 1$ 阶插值近似、二阶积分近似的混合格式; CPFV 格式(5) 是一个具有 $2N + 2$ 阶插值近似、二阶积分近似的混合格式. 如果在关系式(2) 和(5) 中令 $N = 0$, 一阶迎风摄动有限体积(UPFV) 格式和二阶中心摄动有限体积格式(CPFV) 就分别退化为积分方程(1) 的一阶迎风 FV 格式和二阶中心 FV 格式. 值得注意的是, UPFV 格式仍保留一阶迎风格式的保单调性质, CPFV 格式对任意网格 Peclet 数均为正型格式. 特别地, $|d_j|$ 表示由控制体 P_0 中心指向其相邻控制体 P_j 中心(以控制体 P_0 的 jj -界面为公共界面) 的矢量模. 若 $\xi |d_j|$ 表示中心节点 P_0 到公共界面 jj 的距离, $(1 - \xi) |d_j|$ 表示 P_0 的相邻中心节点 P_j 到公共界面 jj 的距离, 则距离因子 $\xi \neq 1/2$ 的 PFV 格式与 $\xi = 1/2$ 的 PFV 格式完全相同. 而对于大多数非结构网格和结构-非结构混合网格来说, ξ 一般不等于 $(1 - \xi)$. 所以这是 PFV 格式(2) 和(5) 一个非常好的性质, 使得公式简洁易于编程.

2 NS 方程组的摄动有限体积格式

二维定常不可压流积分形式的 NS 方程组如下

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \tag{8}$$

$$\int_S \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_S \mu \nabla^2 \phi \cdot \mathbf{n} dS, \tag{9}$$

其中 $\mathbf{u} = (u, v)$, u 和 v 分别是笛卡儿坐标 x -和 y -方向的速度分量, p 表示压力.

2.1 动量方程(9) 的 PFV 格式

假定两相邻控制体中心 P_0 和 P_j 连线近似垂直于控制体公共界面 jj -面, 则 NS 动量方程(9) 的 UPFV 和 CPFV 格式分别为

$$\sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j} \left[\mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1}{2} m_{jj} (1 - \text{sign} m_{jj}) \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{jj}^k \right] (\phi_j - \phi_{P_0}) - \sum_{j=1}^{n_{P_0}} p_j S_j + \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j} \left[(\mu \nabla^2 \phi \cdot \mathbf{S})_j - \mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} (\phi_j - \phi_{P_0}) \right]^{\text{old}} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j^c} \left[\mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} - \frac{1}{2} m_{jj} \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{jj}^k \right] (\phi_j - \phi_{P_0}) - \sum_{j=1}^{n_{P_0}} p_j S_j + \sum_{j=1}^{n_{P_0}} \frac{1}{G_j^c} \left[(\mu \nabla^2 \phi \cdot \mathbf{S})_j - \mu \frac{d_j \cdot S_j}{|d_j|^2} (\phi_j - \phi_{P_0}) \right]^{\text{old}} = 0, \tag{11}$$

其中用 old 标记的项为上一次迭代的计算值. G_j 和 G_j^c 的表达式分别见(3) 式和(6) 式. 以上

方程可写为如下形式

$$a_0 \phi_{p_0} = \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j \phi_{p_j} + b_0, \quad (12)$$

其中

$$a_j = \frac{1}{G_j} \left[\mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} - \frac{1}{2} m_{\mathcal{D}} (1 - \text{sign} m_{\mathcal{D}}) \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{\mathcal{D}}^k \right] \quad \text{或}$$

$$\frac{1}{G_j^c} \left[\mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} - \frac{1}{2} m_{\mathcal{D}} \sum_{k=0}^{2N+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} R_{\mathcal{D}}^k \right], \quad (13)$$

$$a_0 = \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j, \quad (14)$$

$$b_0 = - \sum_{j=1}^{n_{p_0}} p_j \mathbf{S}_j + \sum_{j=1}^{n_{p_0}} \frac{1}{G_j} \left[(\mu \cdot \phi \cdot \mathbf{S})_j - \mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} (\phi_{p_j} - \phi_{p_0}) \right]^{\text{old}} \quad \text{或}$$

$$\sum_{j=1}^{n_{p_0}} p_j \mathbf{S}_j + \sum_{j=1}^{n_{p_0}} \frac{1}{G_j^c} \left[(\mu \cdot \phi \cdot \mathbf{S})_j - \mu \frac{\mathbf{d}_j \cdot \mathbf{S}_j}{|\mathbf{d}_j|^2} (\phi_{p_j} - \phi_{p_0}) \right]^{\text{old}}. \quad (15)$$

为了避免迭代过程发散, 在数值计算中采用亚松弛技术^[11]. 因此使用如下的方程进行数值求解

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \alpha_\phi \end{pmatrix} \phi_{p_0} = \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j \phi_{p_j} + b_0 + (1 - \alpha_\phi) \frac{a_0 \phi_{p_0}^{\text{old}}}{\alpha_\phi}, \quad (16)$$

其中 α_ϕ 是关于变量 ϕ 的亚松弛系数, 在当前的数值计算中速度分量 u, v 的亚松弛系数是 0.6, 压力的亚松弛系数也取为 0.6.

2.2 压力速度耦合关系方程及其离散

上一迭代步求得的压力场 $p_{p_0}^*$ 作为当前迭代的初始条件, 可由动量离散方程(16)式求得初始速度场 $\mathbf{u}_{p_0}^*$, 但此速度场通常不满足连续性方程(7). 为防止速度、压力失耦, 须对当前初始压力和速度进行修正. 本文对结构网格采用 SIMPLER 和 MSIMPLEC 混合算法; 对非结构网格采用 SIMPLEC 算法. 下面着重讨论 MSIMPLEC 和 SIMPLER 的混合算法.

根据 MSIMPLEC 算法, 界面流速的修正值 \mathbf{u}_j' 为

$$\mathbf{u}_j' = - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} V \\ a_0 \end{pmatrix}_{p_0} + \begin{pmatrix} V \\ a_0 \end{pmatrix}_{p_j} \right] \left[\frac{p_{p_j}' - p_{p_0}'}{|\mathbf{d}_j|} \right] \frac{\mathbf{S}_j}{|\mathbf{S}_j|}, \quad (17)$$

$$a_0' = \frac{a_0}{\alpha_\phi} - \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j', \quad (18)$$

其中 p_{p_0}' 和 p_{p_j}' 分别是控制体(CV) p_0 和 p_j 的压力修正值. 控制体界面流速 \mathbf{u}_j^* 通过初始速度值 $\mathbf{u}_{p_0}^*$ 线性内插得到. 并要求修正速度 \mathbf{u}_j' 能使 $(\mathbf{u}_j^* + \mathbf{u}_j')$ 满足连续性方程. 把以上方程代入连续性方程, 即可得到如下的关于压力修正值 p_{p_0}' 的离散方程.

$$a_0^p p_{p_0}' = \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j^p p_{p_j}' + b_0^p, \quad (19)$$

其中, 上标 p 表示系数是压力修正方程的系数. 系数计算式如下:

$$a_j^p = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V}{a_0} \right)_{P_0} + \left(\frac{V}{a_0} \right)_P \right] \frac{|S_j|}{|d_j|} \quad (20)$$

$$a_0^p = \sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_j^p, \quad (21)$$

$$b_0^p = - \sum_{j=1}^{n_{p_0}} F_j, \quad (22)$$

其中 b_0^p 表示通过控制体 CV P_0 边界面的质量通量求和。获得压力修正值 p_{P_0}' 后, 压力和速度按如下方式修正

$$p_{P_0} = p_{P_0}^* + \alpha_p p_{P_0}', \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_{P_0} = \mathbf{u}_{P_0}^* - \frac{V_{P_0}}{a_0^u} \cdot p_{P_0}' = \mathbf{u}_{P_0}^* - \sum_{j=1}^{n_{p_0}} \frac{p_j' S_j}{a_0^u}, \quad (24)$$

其中 α_p 是关于压力的亚松弛系数, 本文取为 0.6。然后根据 MSIMPLEC 的思想利用动量方程对速度作显式修正。

$$\mathbf{u}_{P_0} = \left[\sum_{j=1}^{n_{p_0}} a_p^j \mathbf{u}_p^j - V_{P_0} \cdot p \right]^{old} / a_0^u. \quad (25)$$

在速度被显式修正后, 再用 SIMPLER 的思想直接计算压力。这相当于利用显式修正后的速度对 SIMPLEC 计算出的预估压力作校正。

SIMPLER 直接计算压力的方程和 MSIMPLEC 计算修正压力的方程形式一样, 只是系数和流过控制体界面的质量流残差使用修正后的速度即 \mathbf{u}_{P_0} 进行计算。

3 数值结果

3.1 顶盖驱动方腔流

分别用网格中心型的六阶迎风 PFV 格式、一阶迎风 FV 格式、二阶中心 FV 格式, 并利用压力_速度耦合的 SIMPLER 和 MSIMPLEC 混合算法, 对结构网格计算 $Re = 1\,000$, $Re = 3\,200$, $Re = 5\,000$ 的顶盖驱动方腔流动。用网格中心型的 UPFV 格式, 压力_速度耦合的 SIMPLEC 算法, 对非结构网格计算 $Re = 1\,000$ 的顶盖驱动方腔流。离散代数方程组用 G-S 迭代法求解。内迭代统一设为 4 次。并把数值结果与 Ghia 的解^[12]进行了比较、分析。网格剖分见图 1、图 2。

图 3~ 图 10 给出了雷诺数 Re 分别为 1 000, 3 200, 5 000 的方腔垂直和水平中线上垂直速度分量 u 和 v 的图形。从图中可以看出: 对 $Re = 1\,000$, 无论是结构网格还是非结构网格, PFV 解与 Ghia 解基本完全重合。 $Re = 3\,200$ 和 $Re = 5\,000$ 时与 Ghia 的解结果吻合得很好, 但后者使用了多重结构网格技术。从图 3~ 图 10 可以看出, 六阶 UPFV 格式比标准的一阶迎风格式的精度有明显提高。一般来说, 随网格加密, 收敛会变困难, 所以不失一般性, 论文给出了 $Re = 5\,000$, 320×320 CV 下的几种不同格式全域绝对质量流残差和相对质量流残差^[13]收敛曲线的比较。从图 11 可以看出, 与 UPFV 格式相比, 二阶中心 FV 格式的相对质量流残差在 1 000 步以前振荡很大, 而 UPFV 保持得很稳定。从图 12 可以看出, 虽然 6UPFV 和一阶迎风 UFV 格式都是振荡收敛, 但 6UPFV 的振幅明显小于 UFV 格式, 而且振幅衰减速度也比 UFV 快。从图 12 中明显可以看出, 当达到收敛时, 6UPFV 约比 UFV 提前 1 500 个迭代步收敛。

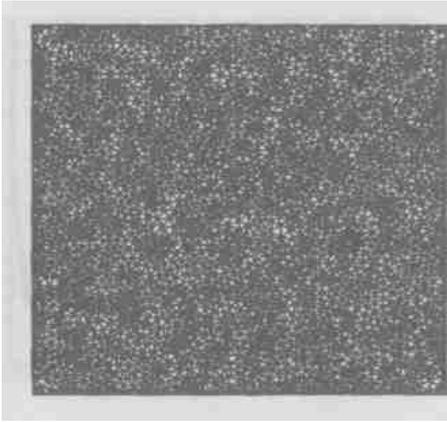


图 1 顶盖驱动方腔流动三角单元剖分图

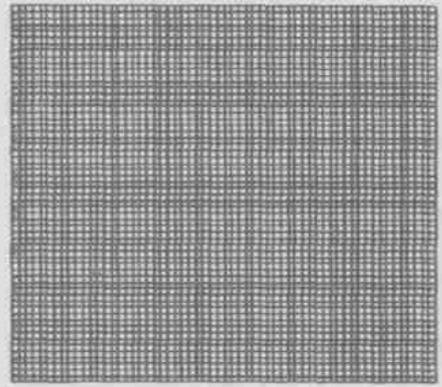
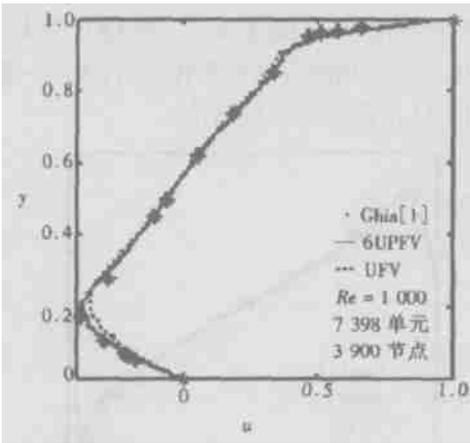
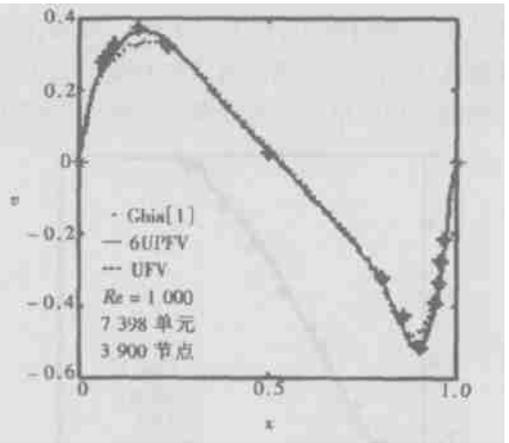
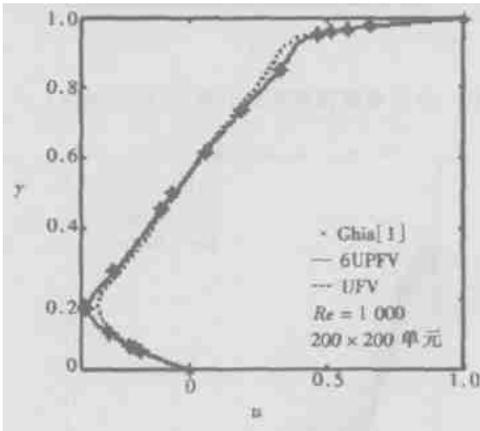
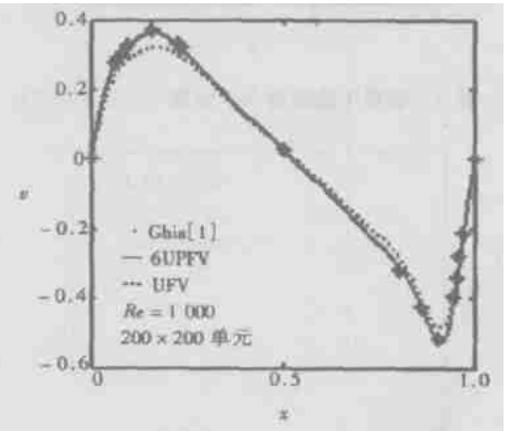


图 2 顶盖驱动方腔流动结构网格剖分图

图 3 垂直中线流速水平分量 u (非结构网格)图 4 水平中线流速垂直分量 v (非结构网格)图 5 垂直中线流速水平分量 u (结构网格)图 6 水平中线流速垂直分量 v (结构网格)

3.2 已知速度场的标量输运问题

控制方程为(1)式。驻点($x = 0, y = 0$)邻域的速度场已知为 $u = x, v = -y$ 。边界条件为:入口($y = 1$), $\phi = 0$; 固壁($x = 0$), $\phi = 1 - y$; 固壁($y = 0$), $\partial\phi/\partial y = 0$; 出口($x = 1$), $\partial\phi/\partial x = 0$ 。图 13 给出结构网格 40×40 单元, $\rho = 1, \Gamma = 0.001$, 二阶 UPFV 格式算出的 ϕ 等

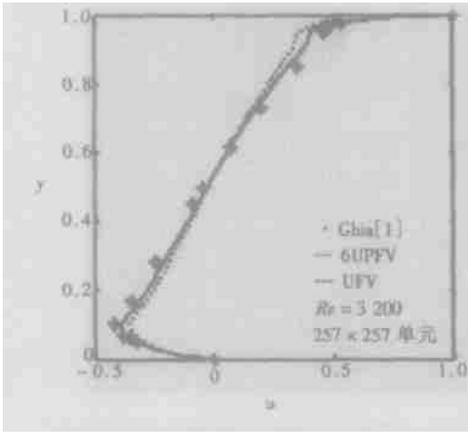


图 7 垂直中线流速水平分量 u (结构网格)

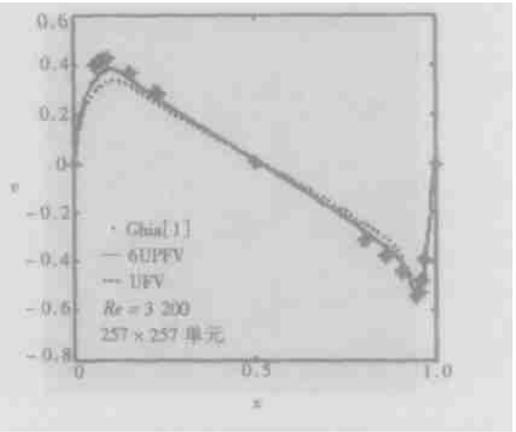


图 8 水平中线流速垂直分量 v (结构网格)

值线分布。在计算中,对 $\Gamma = 0.001$, 如果计算单元较少(例如 $10 \times 10 CV$)时,二阶 CFV 格式会出现振荡,得不到收敛解;而二阶 UPFV 和四阶 CPFV 格式此时仍能得到光滑收敛解;虽然一阶 UFV 也能在粗网格上得到光滑收敛解,但误差较大。图 14 清楚说明了这结论。

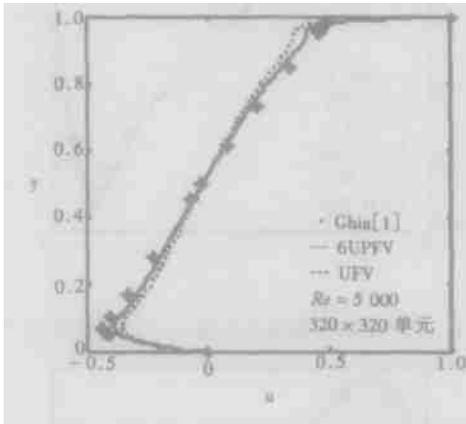


图 9 垂直中线流速水平分量 u (结构网格)

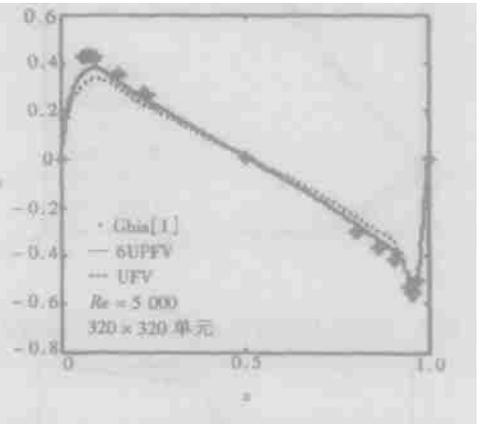


图 10 水平中线流速垂直分量 v (结构网格)

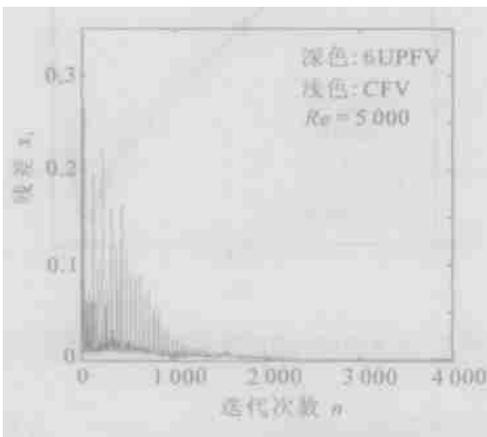


图 11 相对质量流残差收敛

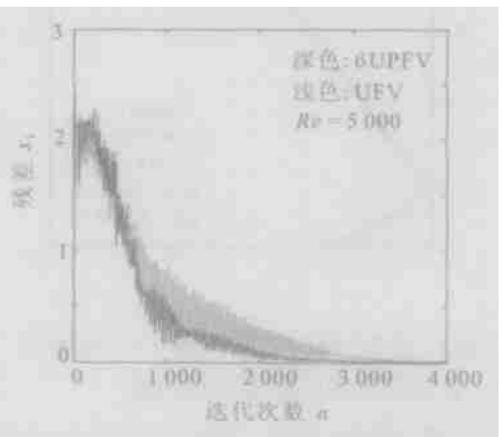


图 12 全域绝对质量流残差收敛

图 14 给出了一阶 UFV、二阶 CFV、二阶 UPFV 和四阶 CPFV 格式算出的西边壁扩散通量随

单元数的收敛曲线。可以看出,二阶 CFV 在粗网格下得不到收敛解,二阶 UPFV 和四阶 CPFV 格式在粗网格下可得到收敛解。在网格数相同条件下,PFV 格式求出解的精度比 FV 格式高,收敛到准确值的速度也快。

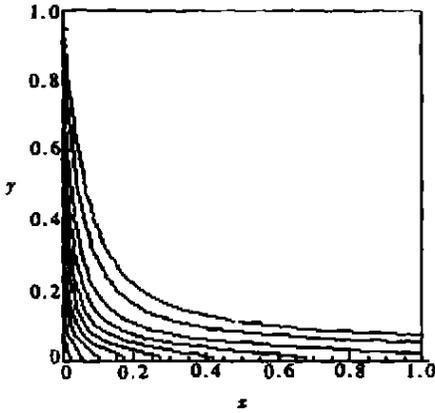


图 13 ϕ 等值线

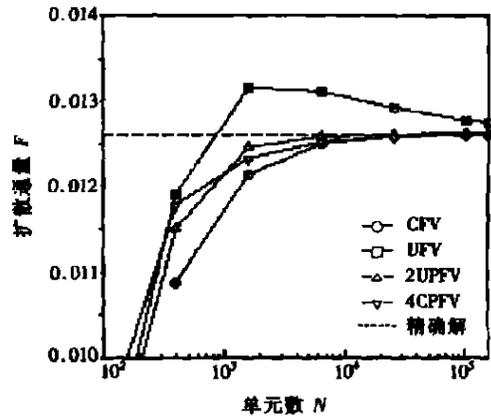


图 14 诸格式西边界扩散通量 F 随单元数 N 的收敛曲线

4 结 论

不可压缩流 NS 方程组的摄动有限体积(PFV)格式是一个简洁有效的公式。使用与标准一阶迎风和二阶中心 FV 格式相同的节点数,然而 PFV 格式的重构近似具有更高的精度。利用迎风 PFV 格式、一阶迎风和二阶中心 FV 格式对顶盖驱动方腔流的数值计算结果表明:PFV 格式的分辨率、效率比一阶迎风和二阶中心 FV 格式高,具有比二阶中心广得多的雷诺数应用范围。而且更重要的是 UPFV 格式具有良好的鲁棒性,对 Re 数从 10^2 到 10^4 的数值实验中,选定的亚松弛系数可维持在 0.6 保持不变;实际上,亚松弛系数取值范围很宽,在 0.3~0.8 之间任取,均能获得收敛解。

[参 考 文 献]

- [1] Ferziger J H, Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1999.
- [2] Jameson A, Baker T J. Multigrid solution of the Euler equations for aircraft configurations[R]. AIAA 84_0093, 1984, 12.
- [3] Jameson A, Yoon S. Lower_upper implicit schemes with multigrid for the Euler equations[J]. AIAA J, 1987, 25(7): 929—935.
- [4] Liou M, Steffen C J. A new flux splitting scheme[J]. J Comput Phys, 1993, 107(1): 23—39.
- [5] Liou M. A sequel to AUSM: AUSM+ [J]. J Comput Phys, 1996, 129(2): 364—382.
- [6] 高智. 对流扩散方程的摄动有限体积方法及讨论[A]. 见:中国空气动力学学会. 第十一届全国计算流体力学会议论文集[C]. 河南洛阳, 2002, 29—35.
- [7] 高智, 向华, 申义庆. 摄动有限体积法重构近似高精度的意义[J]. 计算物理, 2004, 21(2): 137—142.
- [8] Patankar S V. A calculation procedure for two_dimensional elliptic situations[J]. Numer Heat Transfer, 1981, 4(4): 409—425.

- [9] Yen R H, Liu C H. Enhancement of the SIMPLE algorithm by an additional explicit correction step [J]. Numer Heat Transfer, Part B, 1993, **24**(1): 127—141.
- [10] Van Doormaal J P, Raithby G D. Enhancement of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows [J]. Numer Heat Transfer, 1984, **7**(2): 147—163.
- [11] Peric M. Analysis of pressure velocity coupling on nonorthogonal grids [J]. Numer Heat Transfer, Part B, 1990, **17**(1): 63—82.
- [12] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method [J]. J Comput Phys, 1982, **48**(3): 387—411.
- [13] 陶文铨. 数值传热学[M]. 第二版. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.

Perturbational Finite Volume Method for the Solution of 2-D Navier-Stokes Equations on Unstructured and Structured Colocated Meshes

GAO Zhi, DAI Min_guo, LI Gui_bo, BAI Wei
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences,
Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: Based on the first order upwind and second order central type of finite volume (UFV and CFV) scheme, upwind and central type of perturbation finite volume (UPFV and CPFV) schemes of the Navier-Stokes equations were developed. In PFV method, the mass fluxes of across the cell faces of the control volume (CV) were expanded into power series of the grid spacing and the coefficients of the power series were determined by means of the conservation equation itself. The UPFV and CPFV scheme respectively uses the same nodes and expressions as those of the normal first_order upwind and second_order central scheme, which is apt to programming. The results of numerical experiments about the flow in a lid-driven cavity and the problem of transport of a scalar quantity in a known velocity field show that compared to the first order UFV and second order CFV schemes, upwind PFV scheme is higher accuracy and resolution, especially better robustness. The numerical computation to flow in a lid-driven cavity shows that the underrelaxation factor can be arbitrarily selected ranging from 0.3 to 0.8 and convergence perform excellent with Reynolds number variation from 10^2 to 10^4 .

Key words: colocated grid; structured grid; unstructured grid; perturbation finite volume method; incompressible fluid NS equations; SIMPLEC algorithm; MSIMPLEC algorithm; SIMPLER algorithm