应用数学和力学, 第 26 卷 第 2 期(2005 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0178_05

# 旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的分解*

秦治安[1], 秦 睿[2], 陈 岩[1], 盛德元[1]

(1. 大连海事大学 数理系, 大连 116026;
2. 福冈大学 经济学部, 福冈 814_01, 日本)

(王彪推荐)

摘要: 介绍了一种推导无耗、互易和无界旋波媒质中谱域并矢 Green 函数表达式的新方法. 这种方法以 Hemholtz 定理以及并矢 Dirac δ 函数的无散和无旋分解为基础, 首先将电矢量的并矢 Green 函数方程分解成无散电矢量的并矢 Green 函数方程和无旋电矢量的并矢 Green 函数方程, 然后经 Fourier 变换导出了旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的无散分解表达式和无旋分解表达式. 用这种方法推导旋波媒质中并矢 Green 函数就可以避免必须用波场的分解法和并矢 Green 函数的本征函数展开法.

关 键 词: 并矢 Green 函数; 无散分量; 无旋分量; 电磁波场; 电荷场; 旋波媒质
中图分类号: O441.4 文献标识码: A

## 引 言

新型的特殊媒质材料——旋波媒质在微波、毫米波、电子器件、集成光学等许多领域的广阔应用前景引起人们普遍的关注, 旋波媒质中的电磁问题成了电磁理论研究的热点课题. 许多文献[1~6]对旋波媒质中电磁波场并矢 Green 函数的本征函数展开问题作了深入研究. 由 Helmholtz 定理, 一个任意的矢量场 $\boldsymbol{f}$ 一定可以按下式分解成无散场 $\boldsymbol{f}^{t}$($\nabla\cdot\boldsymbol{f}^{t}=0$) 和无旋场 $\boldsymbol{f}^{l}$($\nabla\times\boldsymbol{f}^{l}=0$) 即 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}^{t}+\boldsymbol{f}^{l}$[7]. 借助于 Helmholtz 定理、并矢 Dirac δ 函数的无散和无旋分解、Fourier 变换, 首先将旋波媒质中电矢量的并矢 Green 函数方程分解为无散场部分和无旋场部分, 然后直接推导出旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数无散分解式和无旋分解式, 这种方法避免了必须用波场的分解法(如 Bohren 分解法)和并矢 Green 函数的本征函数展开法, 有助于旋波媒质中电磁场问题的分析.

## 1 旋波媒质中电并矢 Green 函数方程的无散和无旋分解问题

从时谐电磁场 $[e^{-j\omega t}]$ 的 Maxwell 方程组: $\nabla\times\boldsymbol{E}=j\omega\boldsymbol{B}$, $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}-j\omega\boldsymbol{D}$, $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$, $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 和旋波媒质中时谐电磁场本构关系: $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+j\gamma\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}=j\gamma\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}/\mu$, 就可以得到旋波媒质中电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的 Helmholtz 方程

* 收稿日期: 2003_11_28; 修订日期: 2004_09_17
基金项目: 交通部建设基金资助项目(752147)
作者简介: 秦治安(1946—), 男, 上海崇明人, 教授(联系人. Tel: +86_411_84729399; Fax: +86_411_84727875; E_mail: Zhougy@dlut.edu.cn).

$$(\nabla\times\nabla\times-2\gamma\mu\omega\nabla\times-k^2)\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{J}, \tag{1}$$

其中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$, $\varepsilon$、$\mu$ 和 $\gamma$ 分别表示电容率、导磁率和手征导纳, 电矢量 $\boldsymbol{E}$ 在无界旋波媒质中满足无穷远处的辐射条件． 由于式(1)的线性性质, 式(1)具有如下形式的解:

$$\boldsymbol{E}(r)=\mathrm{j}\omega\mu\int_{v'}G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}v',$$

其中 $G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 是电矢量 $\boldsymbol{E}$ 的并矢 Green 函数, 积分遍及 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 占有的体积 $v'$． 该式代入式(1)可得电矢量的并矢 Green 函数方程

$$(\nabla\times\nabla\times-2\gamma\mu\omega\nabla\times-k^2)G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{2}$$

其中无界旋波媒质中电矢量的并矢 Green 函数 $G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 满足无穷远处的辐射条件． 文献[8]中引出的 Howard 推出的公式

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\nabla\times\nabla\times IG_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')-\nabla\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{3}$$

用于现在的研究中． 式(3)中, $G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=1/(4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$ 为自由空间标量 Green 函数, $I$ 为单位并矢． 式(3)右边第一项是 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的无散分量 $\delta^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, 即 $\delta^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\nabla\times\nabla\times IG_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 而式(3)右边第二项是 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的无旋分量 $\delta^{\mathrm{l}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, 即 $\delta^{\mathrm{l}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=-\nabla\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$． 于是, 由 Helmholtz 定理和式(3), $G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=G^{\mathrm{t}}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+G^{\mathrm{l}}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$, 无散电矢量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}$ 的并矢 Green 函数方程和无旋电矢量 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{l}}$ 的并矢 Green 函数方程可分别写成如下形式

$$(\nabla\times\nabla\times-2\gamma\mu\omega\nabla\times-k^2)G^{\mathrm{t}}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\delta^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\nabla\times\nabla\times IG_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'), \tag{4}$$

$$G^{\mathrm{l}}_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{\delta^{\mathrm{l}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{k^2}=\frac{\nabla\nabla G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{k^2}． \tag{5}$$

## 2　旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数无散和无旋分解式

利用三维 Fourier 变换式[9]

$$\tilde{G}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=F[G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{6}$$

$$G_0(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=F[G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{7}$$

$$G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\tilde{G}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z, \tag{8}$$

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}G_0(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z, \tag{9}$$

和

$$F[\nabla G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=\mathrm{j}\boldsymbol{K}\tilde{G}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}'), \tag{10}$$

$$F[\nabla\times G_e(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')]=-\mathrm{j}\boldsymbol{K}\times\tilde{G}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}'), \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{K}=k_x\boldsymbol{i}+k_y\boldsymbol{j}+k_z\boldsymbol{k}$． 将方程式(4)关于 $\boldsymbol{r}$ 取 Fourier 变换可得

$$K^2\tilde{G}^{\mathrm{t}}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')+2\gamma\mu\omega\mathrm{j}\boldsymbol{K}\times\tilde{G}^{\mathrm{t}}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')-k^2\tilde{G}^{\mathrm{t}}_e(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=-\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times IG_0(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')． \tag{12}$$

如以 $\boldsymbol{K}$ 点乘式(12)两边可得

$$\boldsymbol{K}\cdot\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=0. \tag{13}$$

如以 $\boldsymbol{K}$ 叉乘式(12)两边可得

$$\boldsymbol{K}\times\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=\frac{2\gamma\mu\omega jK^{2}\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')-2\gamma\mu\omega j\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}\cdot\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')+\boldsymbol{K}\times IK^{2}G_{0}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')}{K^{2}-k^{2}}. \tag{14}$$

从式(12)、式(13)和式(14)可得

$$\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=\frac{(K^{2}-k^{2})(IK^{2}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K})-2\gamma\mu\omega jK^{2}\boldsymbol{K}\times I}{(K^{2}-k^{2})^{2}-4\gamma^{2}\mu^{2}\omega^{2}K^{2}}G_{0}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}'), \tag{15}$$

将式 $G_{0}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=(1/\sqrt{(2\pi)^{3}})(e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}/K^{2})$ 代入式(15)就可得到如下旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的无散分解式

$$\tilde{G}^{t}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\frac{(K^{2}-k^{2})(IK^{2}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K})-2\gamma\mu\omega jK^{2}\boldsymbol{K}\times I}{(K^{2}-k^{2})^{2}-4\gamma^{2}\mu^{2}\omega^{2}K^{2}}\frac{e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}}{K^{2}}. \tag{16}$$

将式(5)关于 $\boldsymbol{r}$ 取 Fourier 变换可得

$$\tilde{G}^{l}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=-\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}}{k^{2}}G_{0}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}'). \tag{17}$$

将式 $G_{0}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=(1/\sqrt{(2\pi)^{3}})(e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}/K^{2})$ 代入式(17)就可得到如下旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的无旋分解式

$$\tilde{G}^{l}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}}{k^{2}}\frac{e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}}{K^{2}}. \tag{18}$$

将旋波媒质中空域电并矢 Green 函数的无散分解式用对应的旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数式无散分解式(16)表示就可得

$$G^{t}_{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3}}\times\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{[(K^{2}-k^{2})(IK^{2}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K})-2\gamma\mu\omega jK^{2}\boldsymbol{K}\times I]e^{-j\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{K^{2}[(K^{2}-k^{2})^{2}-4\gamma^{2}\mu^{2}\omega^{2}K^{2}]}dk_{x}dk_{y}dk_{z}. \tag{19}$$

将旋波媒质中空域电并矢 Green 函数的无旋分解式用对应的旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数式无旋分解式(18)表示就可得

$$G^{l}_{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{(2\pi)^{3}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}e^{-j\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{K^{2}k^{2}}dk_{x}dk_{y}dk_{z}. \tag{20}$$

这里,旋波媒质中电并矢 Green 函数的无散分解式对应于电磁波的场,而旋波媒质中电并矢 Green 函数的无旋分解式则对应于电荷场,从式(16)和式(18)就可得到如下旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的表达式

$$\tilde{G}_{e}(\boldsymbol{K},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\frac{(K^{2}-k^{2})(IK^{2}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{K})-2\gamma\mu\omega jK^{2}\boldsymbol{K}\times I}{(K^{2}-k^{2})^{2}-4\gamma^{2}\mu^{2}\omega^{2}K^{2}}\frac{e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}}{K^{2}}-\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{3}}}\frac{\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}}{k^{2}}\frac{e^{j\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}}{K^{2}}. \tag{21}$$

从式(19)和式(20)就可得到如下旋波媒质中空域电并矢 Green 函数的表达式

$$G_{e}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3}}\times$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{[(K^2 - k^2)(IK^2 - \boldsymbol{KK}) - 2\gamma\mu\omega jK^2 \boldsymbol{K} \times I]\mathrm{e}^{-j\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{K^2[(K^2 - k^2)^2 - 4\gamma^2\mu^2\omega^2 K^2]} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z - \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\boldsymbol{KK}\mathrm{e}^{-j\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{K^2 k^2} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z \cdot \tag{22}$$

## 3　结束语

从Helmholtz 定理和并矢 Dirac δ函数的无散和无旋分解出发,导出了旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数无散分解式和无旋分解式· 旋波媒质的特点是其描述介电参量的关系式中存在电场和磁场之间的耦合,由此可表现出电磁波的旋波特性· 从式(16)和式(18)也不难看出,旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数的无旋分解式(18)与文献[9]中的非旋波媒质中 Coulomb 规范下的无旋分解式是相同的,但旋波媒质中谱域电并矢 Green 函数无散分解式(16)和文献[9]中非旋波媒质中 Coulomb 规范下谱域电并矢 Green 函数无散分解式是不同的· 如令式(16)中 $\gamma = 0$ 可得到文献[9]中非旋波媒质中 Coulomb 规范下谱域电并矢 Green 函数无散分解式,由此可见,文献[9]中给出的电并矢 Green 函数无散分解式只是式(16)的特例· 这里给出的方法具有一定的适应性,可不难推出旋波媒质中磁并矢 Green 函数表达式,也可应用于其它复杂的情况·

## [参　考　文　献]


[1] Bohren C F. Light scattering by an optically active sphere[J]. Chemical Physics Lett, 1974, **29**(3): 458—462.

[2] Eftimiu C. Guided electromagnetic waves in chiral media[J]. Radio Sci, 1989, **24**(3): 351—359.

[3] Zhang L Y. The dominant mode in a parallel_plate chirowaveguide[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1994, **42**(10): 2009—2012.

[4] HUI Hon_tai. The eigenfunction expansion of dyadic Green' s functions for chirowaveguide[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1996, **44**(9): 1575—1582.

[5] HUI Hon_tai. Dyadic Green' s functions for the parallel_plate chirowaveguide[J]. IEE Proc Micro Antennas Propag, 1998, **145**(4): 273—278.

[6] LI Le_wei. Rectangular modes and dyadic Green' s functions in a rectangular chirowaveguide[J]. IEEE Trans Microwave Theory and Tech, 1999, **47**(1): 67—73.

[7] D·卢里. 粒子和场[M]. 董明德, 吴　时, 安瑛, 等 译. 北京: 科学出版社, 1981: 42—47.

[8] Johnson W A, Uehling D T, Updike S J, et al. On the irrotational component of the electric Green' s dyadic[J]. Radio Science, 1979, **14**(6): 961—967.

[9] 周希朗. 库仑规范下谱域电并矢格林函数的纵向和横向分解[J]. 微波学报, 1997, **13**(3): 244—247.

# Splitting of the Spectral Domain Electrical Dyadic Green's Function in Chiral Media

QIN Zhi_an[1], QIN Rui[2], CHEN Yan[1], SHENG De_yuan[1]

(1. Department of Mathematics and Physics, Dalian Maritime University, Dalian 116026, P.R. China;

2. Department of Economics, Fukuoka University, Fukuoka 814_01, Japan)

**Abstract:** A new method of formulating dyadic Green's functions in lossless, reciprocal and unbounded chiral medium was presented. Based on Helmholtz theorem and the non_divergence and irrotational splitting of dyadic Dirac delta_function was this method, the electrical vector dyadic Green's function equation was first decomposed into the non_divergence electrical vector dyadic Green's function equation and irrotational electrical vector dyadic Green's function equation, and then Fourier's transformation was used to derive the expressions of the non_divergence and irrotational component of the spectral domain electrical dyadic Green's function in chiral media. It can avoid having to use the wavefield decomposition method and dyadic Green's function eigenfunction expansion technique that this method is used to derive the dyadic Green's functions in chiral media.

**Key words:** dyadic Green's function; non_divergence component; irrotational component; electromagnetic wave field; charge field; chiral medium