

# 保持球对称的相容流体算法的构造\*

林雉伟, 江少恩

(中国工程物理研究院 激光聚变研究中心,四川 绵阳 621900)

**摘要:** 重点研究如何在二维柱坐标系中保持流体运动的球对称问题. 该问题需要对整个流体算法做细致的分析与设计,从而获得不同的方法. 基于 Caramana 介绍的修正压强梯度算子构造了保持球对称的相容流体算法,该算法还包括了边人工粘性方法、子网格压力的计算方法,以及预估步与校正步相结合的策略. 并且,考虑了总能量的守恒性,讨论了网格节点质量保持不变的必要性,以及基于相容格式证明了边人工粘性的耗散性. 数值模拟结果与已知数据的比对验证了程序的正确性、稳定性.

**关键词:** 球对称; 交错 Lagrange 算法; 相容格式; 边人工粘性; 子网格压强

**中图分类号:** O354;O242      **文献标志码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.05.011

## 引 言

流体力学的数值模拟方法分为三类:一类是 Euler 方法<sup>[1]</sup>,流体流过固定的网格;一类是 Lagrange 方法<sup>[2]</sup>,网格跟随流体一起运动;第三类是任意 Lagrange-Euler(ALE)方法<sup>[3]</sup>,由 Lagrange 步、网格重分步和物理量重映步构成. 它们有着各自的适用范围,而惯性约束聚变(inertial confinement fusion, ICF)的流体力学数值模拟经常采用 Lagrange 方法.

拉氏算法保持球对称的性质十分重要,例如在 ICF 等强压缩过程中,一旦对称性有些微的偏离,Rayleigh-Taylor(RT)界面不稳定性将造成不能忍受的计算结果. 另外在内爆模拟中,当出现非对称的计算结果时,人们很难辨别:哪些结果是物理问题本身具有的,哪些是非物理的计算误差造成的.

本文重点研究如何在二维柱坐标系中保持流体运动的球对称问题. 这个问题需要我们对整个流体算法做出细致的分析与设计,从而获得不同的方法<sup>[4-6]</sup>. 文献[2]中介绍了一种所有物理量都定义在网格中心的流体力学计算方法,而我们采用交错 Lagrange 算法<sup>[7]</sup>. 交错 Lagrange 算法相对于网格中心算法的主要优点在于:节点的运动速度是直接计算得到的,不需要对网格中心的速度进行插值;动量演化方程则采用 Caramana 介绍的修正压强梯度算子<sup>[8]</sup>;内能演化方程采用相容格式<sup>[9]</sup>,不同于传统的-pdV 格式;人工粘性采用边粘性方法<sup>[10]</sup>,这是 von Neumann 方法的推广;考虑了子网格压力的影响<sup>[11]</sup>;采用预估步与校正步相结合的方法保证

\* 收稿日期: 2013-01-08; 修订日期: 2013-03-25

基金项目: 中国工程物理研究院激光聚变研究中心创新基金资助项目(CX08201202)

作者简介: 林雉伟(1981—),男,四川内江人,助理研究员,硕士(通讯作者. Tel: +86-816-2480717; E-mail: lzw454721@caep.ac.cn).

时间 2 阶精度. 本文的工作还包括: 考察总能量的守恒性, 讨论网格节点质量保持不变的必要性, 以及基于相容格式证明边人工粘性的耗散性.

最后, 两个算例( Lazarus 内爆问题和 ICF 靶丸内爆问题) 的数值模拟结果验证了本文算法的正确性、稳定性.

## 1 交错 Lagrange 算法

讨论如下的非粘性流体动力学方程组

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p, \\ \rho \frac{de}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $d/dt$  是跟随流体的全导数, 也就是,  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

为了使方程组(1) 封闭, 还需要如下的状态方程,  $p = p(\rho, e)$ .

对理想气体而言, 有  $p = (\gamma - 1)\rho e$ , 其中,  $\gamma$  为绝热指数.

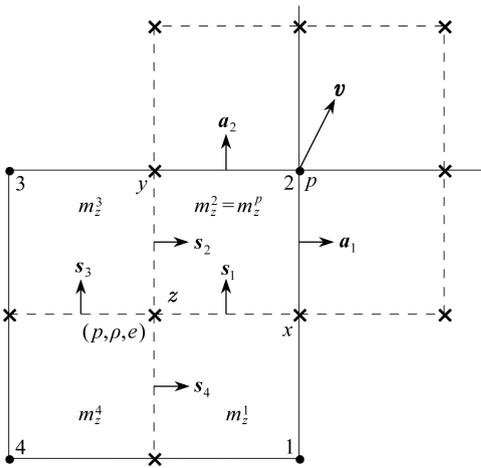


图 1 交错网格的示意图

Fig. 1 An illustration for the staggered mesh

对以上方程组的求解有许多方法, 基本思路都是先对求解区域进行网格剖分, 然后在网格上离散求解方程组. 这里主要讨论二维结构网格和交错 Lagrange 算法, 也就是, 网格可以用两个矩阵表示, 两个矩阵的相同位置的元素共同决定了网格的节点坐标; 流体的速度  $\mathbf{v}$  定义在网格节点上, 网格节点以流体的速度  $\mathbf{v}$  运动, 而流体的压强  $p$ 、密度  $\rho$ 、比内能  $e$  定义在网格的四边形单元的中心(其坐标为 4 个顶点坐标的平均值). 参考图 1.

在图 1 中, 实线代表网格, 虚线表示辅助网格 (median mesh), 辅助网格由四边形单元中心和 4 条边的中点的连线构成; 流体的速度  $\mathbf{v}$  定义在网格节点  $p$  上, 其他物理量  $(p, \rho, e)$  定义在网格的四边形单元的中心  $z$ ; 图 1 中的其他记号在下文中

还要讨论.

## 2 完整的算法

以下我们讨论完整的算法, 过程如下:

先用伪代码介绍算法(%后面的内容是注释), 再分别讨论代码中的关键函数.

```
hydro_motion(input)
```

```
1) [m1, m2, m3, m4] = corner_mass(input);
```

% 网格的四边形单元被其中心和 4 条边的中点的连线分割为 4 个子四边形, 由初始条件计算这 4 个子四边形的质量;

```
2) zone_mass = m1+m2+m3+m4;
```

```

3) point_mass = node_mass( m1, m2, m3, m4 );
% 由 2)、3) 可知, 网格的四边形单元质量和节点质量均为常数;
4) old_p = ( ( gamma-1 ) * old_rho ) * old_sien;
% 也就是,  $p = (\gamma - 1)\rho e$ , sien 表示比内能, 这里我们用的是理想气体状态方程;
5) [ atf_1, atf_2, atf_3, atf_4, atf_p ] = artificial_force( );
% 由  $n$  时刻的流体状态计算人工粘性力( atf_1, atf_2, atf_3, atf_4 )和人工粘性压( atf_p ),
atf_i 表示四边形单元作用在它的第  $i$  个顶点上的人工粘性力;
6) [ meanpf_1, meanpf_2, meanpf_3, meanpf_4 ] = mean_pressure_force( );
% 由  $n$  时刻的流体状态计算网格的四边形单元的平均压力, meanpf_i 表示四边形单元作用
用在它的第  $i$  个顶点上的平均压力;
7) [ subpf_1, subpf_2, subpf_3, subpf_4, subzone_p ] = subzone_pressure_force( );
% 由  $n$  时刻的流体状态计算网格的四边形单元的子网格压力( subpf_1, subpf_2, subpf_3,
subpf_4 )和子网格压强( subzone_p ), subpf_i 表示四边形单元作用在它的第  $i$  个顶点上的子网
格压力;
8) 基于 Courant 条件、体积变化条件等, 由 old_p, atf_p, subzone_p 等计算时间步长 new_
dt;
9) while 循环条件( 比如, 迭代次数、计算时间等)
do
force_i = meanpf_i + subpf_i + atf_i, i = 1, 2, 3, 4;
point_force = node_force( force_1, force_2, force_3, force_4 );
% 由四边形单元作用在其顶点上的力计算网格节点所受到的力;
% point_force 需要考虑可能的边界力;
[ new_vx, new_vy ] = new_node_velocity( );
% 计算  $(n + 1)$  时刻的网格节点速度, 考虑匀加速模型;
% [ new_vx, new_vy ] 需要考虑可能的边界速度;
mean_vx = ( old_vx + new_vx ) / 2;
mean_vy = ( old_vy + new_vy ) / 2;
new_x = old_x + mean_vx * new_dt;
new_y = old_y + mean_vy * new_dt;
new_rho = new_zone_density( zone_mass, new_x, new_y );
% 以上计算了  $(n + 1)$  时刻的网格节点坐标和网格四边形单元密度;
new_sien = new_specific_internal_energy_comp( );
% 计算  $(n + 1)$  时刻的网格四边形单元的比内能, 使用相容格式以保证总能量守恒;
% new_sien 需要考虑可能的比内能修正, 比如辐射加热;
new_p = ( ( gamma-1 ) * new_rho ) * new_sien;
% 以上为预估步( predictor-step ), 以下为校正步( corrector-step ), 算法与预估步类似。
在校正步中, 先计算  $(n + 1/2)$  时刻的流体状态。由  $(n + 1/2)$  时刻的流体状态计算网格的
四边形单元的平均压力, 以及子网格压力和子网格压强; 其余与预估步类似; 直至完成  $(n + 1)$ 
时刻的流体状态的计算。
接下来输出  $(n + 1)$  时刻的流体状态;

```

然后,由  $(n + 1)$  时刻的流体状态计算人工粘性力和人工粘性压,网格的四边形单元的平均压力,以及子网格压力和子网格压强,为下次循环做准备;

最后计算新的时间步长;

10) end(while 循环的结束)

以下具体讨论 hydro\_motion( )中的一些关键函数。

## 2.1 角体积、角质量和角力的概念

本小节针对函数 corner\_mass( ), node\_mass( )展开讨论,为此先介绍角体积(corner volume)、角质量(corner mass)和角力(corner force)的概念。

在图 1 中,四边形单元  $z$  被其中心和 4 条边的中点的连线分割为 4 个子四边形(比如四边形  $xpyz$ ),它们的体积称为角体积,它们的质量称为角质量(等于格子密度乘上角体积);格子  $z$  的以节点  $p$  为顶点的子四边形的角质量记为  $m_z^p$ ,规定  $m_z^p = m_z^s$ ,比如图 1 中的  $m_z^2$ ;我们定义格子  $z$  和节点  $p$  的质量分别为(均保持不变)

$$m_z = \sum_p m_p^z, m_p = \sum_z m_z^p. \quad (2)$$

格子  $z$  作用在节点  $p$  上的力称为角力,记为  $f_z^p$ ,规定  $f_z^p = f_p^z$ ,比如图 1 中由平均压强引起的角力为  $f_z^p = f_p^z = p(s_1 + s_2) = p(a_1 + a_2)$ ,其中,  $s_i, a_i$  垂直于它们所在的线段,在柱坐标系中的大小为它们所在的线段绕  $z$  轴旋转所得的旋转体的表面积,在柱坐标系中我们近似有  $s_1 + s_2 = a_1 + a_2$  成立;定义节点  $p$  所受到的合力为

$$f_p = \sum_z f_z^p. \quad (3)$$

## 2.2 平均压力的计算

本小节针对函数 mean\_pressure\_force( )展开讨论.该函数的返回值 meanpf\_i 表示四边形单元作用在它的第  $i$  个顶点上的平均压力,也就是上一小节讨论的  $f_z^i = p(a_1 + a_2)$ 。

为了保持球对称,我们按照 Caramana 介绍的方法<sup>[8]</sup>修正了节点  $p$  周围的向量  $a_i$ ,从而保证:(i)在球对称的情形,节点  $p$  所受到的平均压力的合力指向球心,并且合力在离球心等距离的节点处产生的加速度大小相同,从而理论上保持了球对称;(ii)在非球对称情形,向量  $a_i$  的修正对计算结果影响很小。

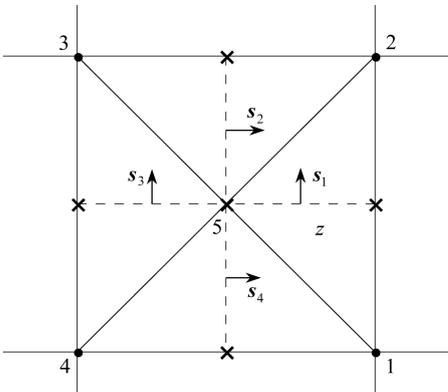


图 2 边人工粘性的示意图

Fig. 2 A sketch for the edge-centered artificial viscosity

## 2.3 人工粘性力的计算

本小节针对函数 artificial\_force( )展开讨论.该函数的返回值 atf\_i 表示四边形单元作用在它的第  $i$  个顶点上的人工粘性力,atf\_p 表示人工粘性压强,可用于 Courant 条件的计算。

人工粘性方法在拉氏方法中被广泛应用,它是一种比较实用的激波捕捉方法,其作用是将流体的动能耗散为内能,在激波压缩区域满足物理间断条件,而对激波之外区域几乎没有影响.我们这里采用边粘性方法<sup>[10]</sup>,它具有以下性质:耗散性;Galileo 不变性;相似运动不变性;人工粘性力连续性;波面不变性.其中波面不变性是指,只在激波法向施加人工粘性,而在激波切向无人工粘性;这就保证了在球对

称的情形,节点所受到的人工粘性力指向球心,并且在离球心等距离的节点处产生的加速度大小相同,从而理论上保持了球对称。下面我们讨论边人工粘性的具体构造,参考图 2。

在图 2 中,格子  $z$  被剖分为 4 个三角形(由实线表示),边人工粘性假设人工粘性张量在这 4 个三角形中分别为常数,记这 4 个三角形中的人工粘性力为  $f_i$ ,  $f_i$  的编号与  $s_i$  的编号一致,  $s_i$  的含义同图 1。以下以  $f_1$  为例,说明这 4 个人工粘性力的构造,定义

$$f_1 = \begin{cases} q_1(1 - \psi_1)(s_1 \cdot \Delta v_{21})\Delta v_{21} / |\Delta v_{21}|^2, & s_1 \cdot \Delta v_{21} < 0, \\ 0, & s_1 \cdot \Delta v_{21} \geq 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $\Delta v_{21} = v_2 - v_1$ ,也就是  $s_1$  所在的三角形的属于网格的那条边沿  $s_1$  方向的终点速度减去起点速度,而  $s_1 \cdot \Delta v_{21} < 0$  表示  $\Delta v_{21}$  和  $s_1$  成钝角(或者方向相反),也就是顶点 2 在靠近顶点 1(或者是  $\Delta 125$  在被压缩,近似的),从而引入人工粘性力  $f_1$ ,  $f_1$  与  $\Delta v_{21}$  方向相反( $q_1(1 - \psi_1) \geq 0$ ),所以  $f_1$  对顶点 2( $s_1$  方向的终点)的作用为正,对顶点 1( $s_1$  方向的起点)的作用为负,这也满足 Newton 第三定律,从而保持动量守恒;从式(4)容易看出  $f_1 \cdot \Delta v_{21} \leq 0$ ,并且,  $f_1 \cdot \Delta v_{21} = 0$  等价于  $f_1 = 0$ ;定义

$$q_1 = \rho \left\{ c_2 \frac{(\gamma + 1)}{4} |\Delta v_{21}| + \sqrt{c_2^2 \left( \frac{\gamma + 1}{4} \right)^2 |\Delta v_{21}|^2 + c_1^2 c_s^2} \right\} |\Delta v_{21}|, \quad (5)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  为常数,常取 1,  $\gamma$  为绝热指数,  $\rho$  和  $c_s$  通常取格子  $z$  的密度和声速(也可取相邻格子相关物理量的加权平均);而  $\psi_1$  为限制因子,定义

$$\psi_1 = \max \{ 0, \min [0.5(r_L + r_R), 2r_L, 2r_R, 1] \}, \quad (6)$$

其中,  $r_L$  和  $r_R$  由网格的边 12 的左右邻边共同决定(因为对于结构网格,它只有两个方向,任一方向上的一条边是有左右邻边的,对于图 2 中的网格边 12,它的左右邻边也就是它的上下网格边),显然,  $\psi_1 \in [0, 1]$ ;定义

$$r_L = \frac{(\Delta v_L \cdot \Delta v_{21}) |\Delta x_{21}|^2}{(\Delta x_L \cdot \Delta x_{21}) |\Delta v_{21}|^2}, \quad r_R = \frac{(\Delta v_R \cdot \Delta v_{21}) |\Delta x_{21}|^2}{(\Delta x_R \cdot \Delta x_{21}) |\Delta v_{21}|^2}, \quad (7)$$

其中,  $\Delta x_{21} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  为网格边 12 的边向量,  $\Delta v_L$  与  $\Delta v_R$ ,  $\Delta x_L$  与  $\Delta x_R$  的含义分别类似于  $\Delta v_{21}$ ,  $\Delta x_{21}$ ;需要指出的是,正是限制因子  $\psi_i$  的引入才保证了边人工粘性的相似运动不变性和波面不变性;对于网格边界附近的网格边,  $r_L$  或  $r_R$  可取为 1。

若按如上定义计算出格子  $z$  的 4 个三角形中的人工粘性力  $f_i$ ,则根据上面讨论的符号规则,格子  $z$  作用在它的 4 个顶点上的人工粘性力分别为

$$f_z^1 = -f_1 + f_4, \quad f_z^2 = f_1 + f_2, \quad f_z^3 = -f_2 + f_3, \quad f_z^4 = -f_3 - f_4. \quad (8)$$

最后,格子  $z$  的人工粘性压强可以简单定义为

$$q = \max_{1 \leq i \leq 4} \{ q_i(1 - \psi_i) \}. \quad (9)$$

## 2.4 子网格压力的计算

本小节针对函数 `subzone_pressure_force()` 展开讨论。该函数的返回值 `subpf_i` 表示四边形单元作用在它的第  $i$  个顶点上的子网格压力, `subzone_p` 表示子网格压强,可用于 Courant 条件的计算。

在 2.1 小节中,假设格子  $z$  和节点  $p$  的质量均保持不变,取初始时刻的值,也就是假设在图 1 中,格子  $z$  的边界和节点  $p$  的控制体的边界(由节点  $p$  周围的虚线构成)都没有流体流进或流出,所以它们的相交部分,即四边形  $xpyz$  的边界也没有流体流进或流出,所以四边形  $xpyz$  的质量保持不变,也就是角质量  $m_e^p$  保持不变;反之,若角质量  $m_e^p$  对任意的  $z$  和  $p$  保持不变,则由式

(2) 可知, 格子  $z$  和节点  $p$  的质量也保持不变, 因此, 这两种假设是等价的.

考虑角质量  $m_z^n$  保持不变的情形, 这时, 子网格  $xpyz$  的平均密度就有了意义; 随着网格节点的运动, 格子  $z$  的相关物理量也随之更新, 从而子网格  $xpyz$  的平均密度将不同于格子  $z$  的平均密度, 假设子网格  $xpyz$  的比内能等于格子  $z$  的比内能, 那么子网格  $xpyz$  的压强将不同于格子  $z$  的压强, 两者的差记为  $\Delta p_z^i$  (这里  $i = 2$ , 对于其它子网格也有类似讨论). 压强差  $\Delta p_z^i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 将产生子网格压力和子网格压强 (可简单取为  $\Delta p_z^i$  中的最大值), 子网格压力的计算需考虑以下两点:

(i) 基于 2.2 小节讨论的方法修正有关向量, 从而保证球对称;

(ii) 计算所得的子网格压力需保持动量守恒, 也就是,  $\sum_p \mathbf{f}_p^z = \mathbf{0}$ , 注意到式(8)中的人工粘性力就满足该等式.

实际的数值模拟表明, 子网格压力能够有效地消除人为网格变形和网格的沙漏运动, 从而极大地改进计算结果<sup>[11]</sup>.

## 2.5 内能演化方程与相容格式

本小节针对函数 `new_specific_internal_energy_comp()` 展开讨论. 该函数的返回值 `new_sien` 表示  $(n + 1)$  时刻的网格四边形单元的比内能, 使用相容格式以保证总能量守恒.

首先, 定义网络的总能量如下:

$$E_T = \sum_z m_z e_z + \sum_p \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_p^2. \quad (10)$$

也就是, 网络的总能量等于所有格子的内能与所有节点的动能之和, 这是因为我们主要讨论交错网格; 利用式(2), 式(10)也可以如下理解:

$$\begin{aligned} E_T &= \sum_z \left( \sum_p \left( m_p^z e_z + \frac{1}{2} m_p^z \mathbf{v}_p^2 \right) \right) = \\ &= \sum_z \left( \sum_p m_p^z \right) e_z + \sum_p \left( \sum_z \frac{1}{2} m_p^z \mathbf{v}_p^2 \right) = \\ &= \sum_z m_z e_z + \sum_p \frac{1}{2} m_p \mathbf{v}_p^2. \end{aligned}$$

其次, 若计算了所有的角力  $\mathbf{f}_z^p$ , 又规定  $\Delta \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p^{n+1} - \mathbf{v}_p^n$ ,  $\mathbf{v}_p^{n+1/2} = (\mathbf{v}_p^{n+1} + \mathbf{v}_p^n)/2$ ,  $\Delta e_z = e_z^{n+1} - e_z^n$ , 则节点  $p$  的动量演化方程和格子  $z$  的内能演化方程分别为

$$m_p \Delta \mathbf{v}_p = \sum_z \mathbf{f}_z^p \Delta t, \quad (11)$$

$$m_z \Delta e_z = - \sum_p \mathbf{f}_p^z \cdot \mathbf{v}_p^{n+1/2} \Delta t. \quad (12)$$

下面证明在外力为 0 的情形, 基于式(11)、(12)演化的网络的总能量守恒:

$$\begin{aligned} \Delta E_T &= E_T^{n+1} - E_T^n = \\ &= \sum_z m_z (e_z^{n+1} - e_z^n) + \sum_p \frac{1}{2} m_p ((\mathbf{v}_p^{n+1})^2 - (\mathbf{v}_p^n)^2) = \\ &= \sum_z m_z \Delta e_z + \sum_p m_p \Delta \mathbf{v}_p \cdot \mathbf{v}_p^{n+1/2} = \\ &= \sum_z \left( - \sum_p \mathbf{f}_p^z \cdot \mathbf{v}_p^{n+1/2} \Delta t \right) + \sum_p \left( \sum_z \mathbf{f}_z^p \Delta t \right) \cdot \mathbf{v}_p^{n+1/2} = \\ &= 0 \quad (\mathbf{f}_p^z = \mathbf{f}_z^p). \end{aligned}$$

我们称式(11)、(12)为相容格式 (compatible formulation)<sup>[9]</sup>, 也就是指内能的演化与动量

的演化是相容的,它们基于相同的角力,从而保证总能量守恒.

再次,讨论网格节点的质量保持不变这个假设的必要性.虽然上面的证明没有用到网格节点质量不变的假设,但是,如果在每次更新网格节点的速度(即使用式(11))之前,都重新计算当前时刻的节点质量,那么在 $(n+1)$ 时刻,网格总能量就有两种计算方法,一种是在式(10)中节点质量使用 $n$ 时刻的节点质量,记为 $E_T^{n+1}$ ,一种是在式(10)中节点质量使用 $(n+1)$ 时刻的节点质量,记为 $F_T^{n+1}$ ,一般地我们有

$$E_T^{n+1} \neq F_T^{n+1}, E_T^{n+1} = F_T^n.$$

前者成立是由于在式(10)中使用的节点质量不同,后者成立是因为上面的证明;因此,我们有 $F_T^{n+1} \neq F_T^n$ ,以及 $E_T^{n+2} = F_T^{n+1} \neq E_T^{n+1}$ ,所以,无论选取哪种定义,网格总能量都不守恒.所以在相容格式中我们经常假设网格节点质量不变.

最后,基于相容格式说明2.3小节定义的边人工粘性的耗散性.只考虑人工粘性时,由式(8)、(12)可得(参考图2,  $\Delta t > 0$ )

$$m_z \Delta e_z = - \sum_p f_p^z \cdot v_p^{n+1/2} \Delta t = - \Delta t \sum_{1 \leq i \leq 4} f_i \cdot \Delta v_{i+1,i}^{n+1/2},$$

其中,  $\Delta v_{21}^{n+1/2} = v_2^{n+1/2} - v_1^{n+1/2}$ ,其余类似,它们的详细规定见2.3小节(比如 $\Delta v_{21}$ 的定义),而 $f_i$ 的定义也在2.3小节;计算可得

$$\Delta v_{21}^{n+1/2} = (v_2^n - v_1^n) + \frac{1}{2}(a_2^n - a_1^n) \Delta t.$$

显然,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_1 \cdot \Delta v_{21}^{n+1/2} = f_1 \cdot \Delta v_{21} \leq 0$ ;

当 $f_1 \cdot \Delta v_{21} < 0$ 时,只要 $\Delta t$ 充分小,就有 $f_1 \cdot \Delta v_{21}^{n+1/2} < 0$ ;

当 $f_1 \cdot \Delta v_{21} = 0$ 时,  $f_1 = \mathbf{0}$ ,则 $f_1 \cdot \Delta v_{21}^{n+1/2} = 0$ ;

所以 $f_1 \cdot \Delta v_{21}^{n+1/2} \leq 0$ ,对其余的 $i$ 可类似讨论.因此,当 $m_z \Delta e_z \geq 0$ ,在边人工粘性力的作用下网格格子的内能增加,所以边人工粘性具有耗散性质.

## 2.6 预估步与校正步

本小节针对预估步与校正步展开讨论.在hydro\_motion的while循环中,先执行预估步,后执行校正步.

在预估步中,先利用 $n$ 时刻节点的受力情况计算 $(n+1)$ 时刻的节点速度,节点速度只具有1阶时间精度;然后利用 $n$ 时刻和 $(n+1)$ 时刻的节点速度的平均值计算 $(n+1)$ 时刻的节点坐标,节点坐标具有2阶时间精度<sup>[9]</sup>;为了使节点速度也具有2阶时间精度,在校正步中,我们利用 $n$ 时刻的和预估步计算所得的 $(n+1)$ 时刻的流体状态,计算 $(n+1/2)$ 时刻的流体状态(即取两者的平均值),然后利用这些平均值计算 $(n+1/2)$ 时刻节点的受力情况,再利用这些受力情况计算 $(n+1)$ 时刻的流体状态即可.

在预估步与校正步的执行过程中,需要注意以下两点:

(i) 在校正步中,只重新计算平均压力和子网格压力,而人工粘性力还是取预估步中的值;我们发现这样做会产生更少的数值噪声;

(ii) 无论是在预估步还是在校正步,内能的演化都采用相容格式,也就是,内能的演化与动量的演化都必须使用相同的角力,详见式(11)、(12).

## 3 数值模拟结果

根据以上算法编制了相关程序,对许多问题进行了数值模拟(包括ICF等强压缩、Lazarus

内爆问题、Saltzman 活塞问题,等等),得到了理想的计算结果.限于篇幅,这里只讨论 Lazarus 内爆问题和 ICF 靶丸内爆问题,更多的算例就不给出了.

### 3.1 Lazarus 内爆问题

Lazarus 内爆问题拥有自相似解,在这个问题中,一个半径为 1、比内能为 0、密度为 1、内部速度为 0 的球被沿径向向内方向的边界速度驱动,其大小为

$$V_R(t) = \frac{-\alpha f}{(1-ft)^{1-\alpha}},$$

其中,  $\alpha = 0.688\ 354\ 5$ ,  $f = 1 - 0.185t - 0.28t^3$ .

由于 Lazarus 内爆问题是轴对称问题,所以在二维柱坐标系中我们只模拟球在 I 象限内的部分,即四分之一圆;并且采用反射边界条件和理想气体状态方程,  $\gamma = 5/3$ ;使用  $11 \times 201$  的结构网格,在  $t = 0.80$  时刻,激波刚从球心反射回来并向外传播,这从图 3 可以明显看出;此外,对图 3 中的数据进行仔细计算可以发现,球对称得到了完美的保持(在舍入误差以内);图 4 给出了  $t = 0.72$  和  $t = 0.80$  时刻密度随半径变化的曲线,实线为计算结果,虚线为已知数据,两者十分吻合<sup>[8]</sup>.

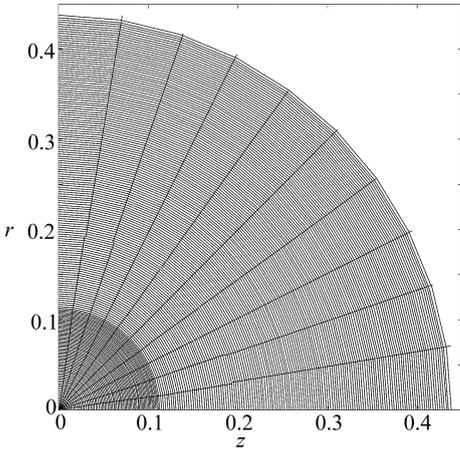


图 3  $t = 0.80$  时刻的计算网格  
( $11 \times 201$ )

Fig. 3 The computing mesh at time  
 $t = 0.80$  ( $11 \times 201$ )

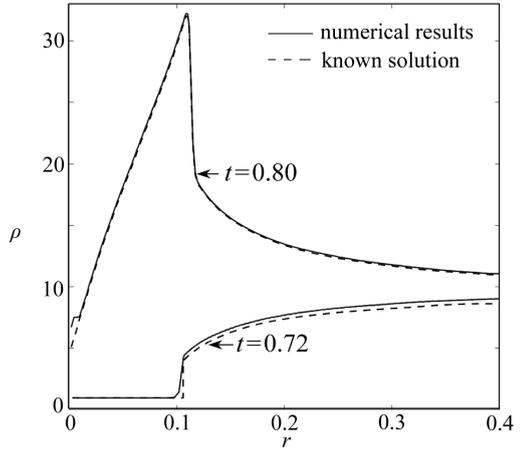


图 4  $t = 0.72$  和  $t = 0.80$  时刻的密度  
随半径变化的曲线

Fig. 4 The curves for density versus radius  
at times  $t = 0.72$  and  $t = 0.80$

### 3.2 ICF 靶丸内爆问题

该算例主要用于考察相容算法的稳定性. ICF 靶丸由两层物质组成,里层为 DT 气体(初始密度  $\rho_{DT} = 1\text{ mg/cm}^3$ ,半径为 0.1 cm,剖分为 50 等份),外层为 CH 烧蚀层(初始密度为  $\rho_{CH} = 1\text{ g/cm}^3$ ,厚度为 0.02 cm,剖分为 150 等份),在 CH 烧蚀层的外边界施以一恒值压强( $P = 10^{13}\text{ Pa}$ ).图 5 为 7.199 7 ns 时刻的计算网格( $31 \times 201$ ),该时刻 DT 气体被多次强冲击波压缩到最小半径 0.009 8 cm,压缩率(convergence ratio)  $C_r > 10$ ;注意到  $\rho_{CH}/\rho_{DT} = 1\ 000 \gg 1$ ,在这种比较极端的情形,计算很容易受到 Rayleigh-Taylor 不稳定性的严重影响而无法进行,但是我们的计算结果却很令人满意(见图 5).主要表现为:经计算,“同一圆周上”的节点和坐标原点的距离与其最小值的相对误差不超过 0.009 72( $< 1\%$ );这就表明了相容算法的稳定性.

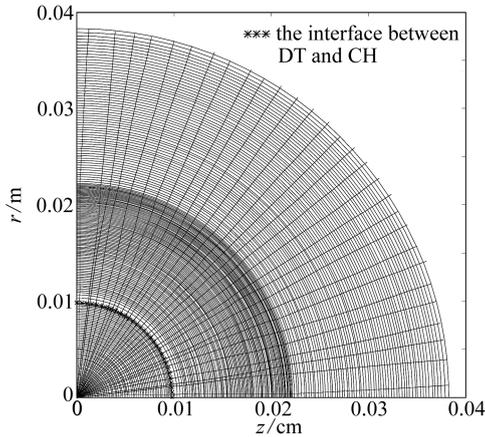


图5  $t = 7.1997$  ns 时刻的计算网格(31×201)

Fig. 5 The computing mesh at time  $t = 7.1997$  ns (31×201)

## 4 结 论

本文针对如何在二维柱坐标系中保持球对称的问题研究了相关流体算法,编制了相关程序.数值模拟结果验证了算法的正确性、稳定性,未来的重点是把该算法耦合到 ICF 的辐射输运模块中去.

### 参考文献(References):

- [1] 高正红. 关于绕任意机翼非定常流动的一种无条件稳定的欧拉方程解[J]. 应用数学和力学, 1995, **16**(12): 1123-1134. (GAO Zheng-hong. Unconditional stable solutions of the Euler equations for two- and three-D wings in arbitrary motion[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 1995, **16**(12): 1209-1220.)
- [2] Cheng J, Shu C W. A cell-centered Lagrangian scheme with the preservation of symmetry and conservation properties for compressible fluid flows in two-dimensional cylindrical geometry [J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, **229**(19): 7191-7206.
- [3] Hirt C W, Amsden A A, Cook J L. An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds[J]. *Journal of Computational Physics*, 1974, **14**(3): 227-253.
- [4] 王希诚, 葛增杰, 吴宏宇. 可变形孔隙介质中热、水耦合力学问题的代数多格子分析方法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(12): 1307-1313. (WANG Xi-cheng, GE Zeng-jie, WU Hong-yu. An algebraic multigrid method for coupled thermo-hydro-mechanical problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2002, **23**(12): 1464-1471.)
- [5] 吴望一, 蔡庆东. 时间空间均为二阶的新型 NND 差分格式[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(6): 561-572. (WU Wang-yi, CAI Qing-dong. A new NND difference scheme of second order in time and space[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2000, **21**(6): 617-630.)
- [6] 罗振东, 毛允魁, 朱江. 定常的磁流体力学方程的非线性 Galerkin 混合元法[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(12): 1486-1496. (LUO Zhen-dong, MAO Yun-kui, ZHU Jiang. Nonlinear Galerkin mixed element methods for the stationary incompressible magnetohydrodynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2006, **27**(12): 1697-1707.)
- [7] 王艺. 交错网格上的压力 Poisson 方程法和抛射法的本质相容性[J]. 应用数学和力学, 2011,

- 32**(6) : 741-745. (WANG Yi. Essential consistency of pressure Poisson equation method and projection method on staggered grid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*(English Edition), 2011, **32**(6) : 789-794. )
- [8] Caramana E J, Whalen P P. Numerical preservation of symmetry properties of continuum problems[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **141**(2) : 174-198.
- [9] Caramana E J, Burton D E, Shashkov M J, Whalen P P. The construction of compatible hydrodynamics algorithms utilizing conservation of total energy[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **146**(1) : 227-262.
- [10] Caramana E J, Shashkov M J, Whalen P P. Formulations of artificial viscosity for multi-dimensional shock wave computations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **144**(1) : 70-97.
- [11] Caramana E J, Shashkov M J. Elimination of artificial grid distortion and hourglass-type motions by means of Lagrangian subzonal masses and pressures[J]. *Journal of Computational Physics*, 1998, **142**(2) : 521-561.

## **Construction of Compatible Hydrodynamics Algorithms With the Preservation of Spherical Symmetry**

LIN Zhi-wei, JIANG Shao-en

(Laser Fusion Research Center, Chinese Academy of Engineering Physics,  
Mianyang, Sichuan 621900, P. R. China)

**Abstract:** The problem of preserving the spherical symmetry of fluid flow in two-dimensional cylindrical geometry was studied in detail. This problem called for cautious analysis and design of the entire hydrodynamics algorithms, which led to various methods. A programs was created, which was based on the following schemes: utilizing the staggered Lagrangian algorithms; evolving the momentum by using the modified pressure gradient operators introduced by Caramana; advancing the internal energy compatibly; utilizing the edge-centered artificial viscosity; including the effects of the subzonal pressure forces; and ensuring the second-order time accuracy by combining the predictor and corrector steps. The conservation of total energy was also investigated, the necessity of maintaining constant nodal masses was discussed, and the dissipativity of edge-centered artificial viscosity based on the compatible hydrodynamics algorithms was proved. In the end, the comparisons between numerical results and the known solutions demonstrated the correctness and robustness of the programs.

**Key words:** spherical symmetry; staggered Lagrangian algorithms; compatible schemes; edge-centered artificial viscosity; subzonal pressure