 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0155_08

广义齐次函数和二体问题*

C·毕阿西, S·M·S·戈多

(圣保罗大学 数学与计算机科学学院 数学系, 圣保罗, 巴西)

(周哲玮推荐)

摘要: 讨论了齐次函数概念的推广, 并应用于求解二体问题·

关 键 词: 齐次函数; 广义齐次函数; Kepler 第二定律; 二体问题
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

本文推广了 α 阶齐次函数的经典概念, 研究了齐次函数概念与一个满足 Kepler 第二定律物体的运动之间的关系·

作为其技术的应用, 我们给出了二体问题的解· 利用齐次函数的概念, 给出了求解一个物体绕另一物体转动的时间方程的方法, 得到了二体问题的解·

我们得到了与文献[1] 相同的一系列结果·

1 广义齐次函数

设 U 为 R^n 的一个开子集, 并使若 $x \in U$ 且 λ 为一实数, $0 < \lambda < 1$, 则 $\lambda \cdot x \in U$·

定义 1 设 $f: U \to \mathbf{R}$ 为一 C^r 函数· 当 $\lambda > 0$ 时, 若 $f(\lambda \cdot x) = \lambda^{\alpha} \cdot f(x)$, 则称 f 为 α 次齐次函数·

下面要用到众所周知的齐次函数的概念·

设 θ 为一 C^r 阶函数, 使得 $\theta: (0, \infty) \times (0, \infty) \to (0, \infty)$, 且

$$\begin{cases} \theta(1, z) = z, \\ \theta(\lambda_1 \cdot \lambda_2, z) = \theta(\lambda_1, \theta(\lambda_2, z)), \end{cases} \tag{1}$$

注意到, θ 为 $(0, \infty)$ 到 $(0, \infty)$ 的乘法运算·

考虑函数

$$\alpha(z) = \frac{\partial \theta(1, z)}{\partial \lambda}, \qquad z \in (0, \infty)·$$

现在我们推广齐次函数的概念·

定义 2 设 $f: U \to \mathbf{R}$ 为一 C^r 阶函数, 若

---

* 收稿日期: 2002_11_30
作者简介: C· 毕阿西(联系人. 教授, 副博士. E_mail: biasi@ icmc. sc. usp. br);
S·M·S· 戈多(E_mail: smsgodoy@ icmc. sc. usp. br)·

本文原文为英文, 由吴承平 译, 张禄坤 校.

i) $f(\lambda\cdot x) = \theta(\lambda, f(x))$,

ii) $\alpha(f(x)) > 0$,

则称 f 为θ_齐次的·

引理 1　设 θ 为一 $(0, \infty)$ 的运算, 则 f 为一θ_齐次函数的充分必要条件是:

$$\langle \nabla f(x), x\rangle = \alpha(f(x))\cdot$$

证明　⇒) 的证明·　注意到

$$\langle \nabla f(\lambda x), x\rangle = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(\lambda, f(x)),$$

则当 $\lambda = 1$, 有 $\langle \nabla f(x), x\rangle = \frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(1, f(x)) = \alpha(f(x))\cdot$

⇐) 的证明·　对每一 x 值, 定义函数

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda x),\quad \phi(\lambda) = \theta(\lambda, f(x))\cdot$$

注意到 $\varphi(1) = f(x) = \phi(1)$, 我们将要证明 φ 和 ϕ 为具有相同初始条件的常微分方程的解·

我们有

$$\alpha(f(\lambda x)) = \langle \nabla f(\lambda x), \lambda x\rangle = \lambda\langle \nabla f(\lambda x), x\rangle = \lambda\varphi'(\lambda),$$

则

$$\alpha(\varphi(\lambda)) = \lambda\varphi'(\lambda)\cdot$$

因此 φ 为方程 $\varphi' = \varphi\alpha/\lambda$ 的解·

对函数 $\phi(\lambda)$ 有

$$\lambda\phi'(\lambda) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(t\lambda, f(x))\cdot$$

考虑函数 $h(t) = \theta(t, \theta(\lambda, f(x))) = \theta(t\lambda, f(x))$,

则　$$h'(t) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(t\lambda, f(x)),$$

因此　$$h'(1) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}(\lambda, f(x))\cdot$$

另一方面,

$$h'(1) = \frac{\partial\theta}{\partial t}(1, \theta(\lambda, f(x))) = \alpha(\theta(\lambda, f(x))),$$

则　$$\lambda\phi'(\lambda) = \alpha(\phi(\lambda)),$$

因此　$$\phi' = \frac{\alpha}{\lambda}\phi,$$

所以　$$\varphi = \phi\cdot$$

注 1　设 f 为 $\theta(\lambda, z) = \lambda^{\alpha}z$ 的θ_齐次函数, 则 f 是 $\alpha(z) = \alpha z$ 的 α 阶齐次函数·

事实上, 若 f 为一θ_齐次函数, 则 $f(\lambda x) = \theta(\lambda, f(x)) = \lambda^{\alpha}f(x)$·　但对 $\lambda = 1$, 有 $\alpha(z) = \partial\theta(1, z)/\partial\lambda = \alpha\lambda^{\alpha-1}z$, 因此 $\alpha(z) = \alpha z$·

注 2　当 P_0 为任意点, 若 $f(P_0 + \lambda(x - P_0)) = \theta(\lambda, f(x))$, 则称 f 为与 P_0 相对应的θ_齐次函数·

正如引理 1 的证明一样, 我们很容易证明 $\langle \nabla f(x), x - P_0\rangle = \alpha(f(x))\cdot$

定理 1　设 θ 为方程组(1) 中的一个运算, C 为一曲线且 $P_0 \notin C$·　则存在与 P_0 相对应的θ_齐次函数 f, 使 $f(x) = 1, \forall x \in C$·

证明　定义 $\psi(\lambda) = \theta(\lambda, 1)$·　令 $P_0 = 0$·　对每一 $x \in C$, 总能找到 y 使 $(x/\psi^{-1}(y)) \in$

C. 因此定义 $f(x)=y$. 显然 $f(x)=1,\ \forall x\in C$.

有

$$\frac{\lambda x}{\psi^{-1}(\theta(\lambda,f(x)))}=\frac{\lambda x}{\lambda\psi^{-1}(f(x))}\in C,$$

因此

$$\theta(\lambda\psi^{-1}(f(x)),1)=\phi(\lambda\psi^{-1}(f(x)))=$$
$$\phi(\psi^{-1}(\theta(\lambda,f(x))))=\theta(\lambda,f(x)).$$

所以 $f(\lambda,x)=\theta(\lambda,f(x))$ 且函数 f 是 θ_齐次的.

推论 1 若 C 为任意曲线, 则 C 为 $\alpha(\alpha>0)$ 阶齐次函数的水平曲线.

现在我们回顾一下 Kepler 第二定律: 面积定律. 设 P_1 和 P_2 是 δt 时间间隔物体的两个相邻位置(见图 1). 该时间间隔的面积单元为 $\delta A=r^2\delta\Phi/2$, 或

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{r^2}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

为一常数, 即是说, 面积和时间成正比.

考虑一 C^r 平面曲线 C, $r\geqslant 1$, 且点 $P=(P_1,P_2)\notin C$. 设 C 由 $x=x(t)=(x_1(t),x_2(t))$ 确定(见图 2), 使

$$\det\begin{vmatrix}x(t)-P\\ x'(t)\end{vmatrix}=\det\begin{vmatrix}x_1(t)-P_1 & x_2(t)-P_2\\ x_1'(t) & x_2'(t)\end{vmatrix}>0. \tag{2}$$

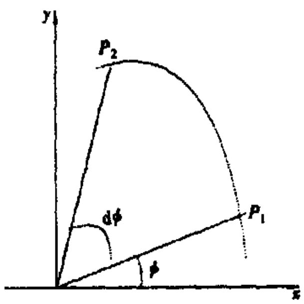

图 1 面积定律示意图

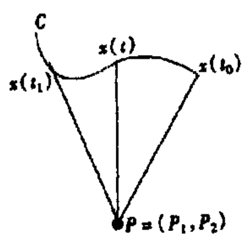

图 2 平面曲线 C

我们知道, 物体从 $Q_0=(x_1(t_0),x_2(t_0))$ 运动到 $Q_1=(x_1(t_1),x_2(t_1))$ 扫过的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\begin{vmatrix}x(t)-P\\ x'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t,$$

因此

$$A'(t)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x(t)-P\\ x'(t)\end{vmatrix}=c.$$

定义 3 对某一 $c>0$, 如果 $A'(t)=c$, 则曲线 C 满足相对于点 P 的 Kepler 第二定律, 那么

$$A(T)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\begin{vmatrix}x(u)-P\\ x'(u)\end{vmatrix}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}2c(t-t_0)=c(t-t_0).$$

因此, 从 $x(t_0)$ 到 $x(t)$ 的面积正比于时间, 所以满足面积 Kepler 定律.

注 3 若 $x(t)$, $t\in(a,b)$ 为一参数曲线 C, 并满足 Kepler 第二定律, 常数 c 对应于 P, 我们有

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b\begin{vmatrix}x(t)-P\\ x'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t=c(b-a)=cp,$$

其中 $p = b - a$•

2　表面度规与参数表示

可以方便地从曲线的一个参数表示变换到曲线的另一个参数表示, 以实现满足 Kepler 第二定律的特定参数表示• 设 $x(u)$, $u \in (c, d)$ 为曲线 C 的参数表示• 我们有

$$A(u) = \frac{1}{2}\int_{u_0}^{u} \begin{vmatrix} x(v) - P \\ x'v \end{vmatrix} \mathrm{d}v,$$

于是

$$A'(u) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u) - P \\ x'u \end{vmatrix} > 0, \qquad \forall u•$$

我们取如下参数变换: $t = A(u)$, $t \in (a, b)$, 且 $h(t) = u$, 并定义 $x(t) = x(h(t))$•

这样来选取参数表示, 使曲线 C 满足与 P 相应的 Kepler 第二定律•

实际上, 我们有

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u) - P \\ x'(u) \cdot h'(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}h'(t)\begin{vmatrix} x(u) - P \\ x'(u) \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{\begin{vmatrix} x(u) - P \\ x'(u) \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} x(u) - P \\ x'(u) \end{vmatrix} = 1,$$

因此

$$\begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = 2$$

并满足 Kepler 第二定律•

定义 4　若一曲线 C 满足 Kepler 第二定律, 且有对应于 P 的常数 $c = 1$, 则称曲线 C 具有表面度规的参数表示•

上面, 我们证明了任意曲线可以用表面度规的参数表示, 它类似于我们熟知的, 用某曲线的孤长来进行的对曲线的参数表示[2]•

因此, 我们可以证明, 若 $x(t)$ 为某曲线的表面度规的参数表示, 点 Q_1 运动到点 Q_2 的时间为 T, 则扫过的面积亦为 T•

3　广义齐次函数和 Kepler 第二定律

设 U 是 R^2 的一个开子集, $f: U \to \mathbf{R}$ 为 C^1 函数, f 在点 x 的导数用 $f'(x)$ 表示• 对所有的 $\boldsymbol{v} \in R^2$, 存在唯一矢量 $\boldsymbol{g}(x) \in R^2$ 使 $f'(x) \cdot \boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{g}(x), \boldsymbol{v} \rangle$, 其中 $\langle, \rangle$ 表示 R^2 中的内积• 设 $\boldsymbol{u}(x)$ 为 $\boldsymbol{g}(x)$ 以 $\pi/2$ 幅角旋转而得的 Hamilton 场• 我们发现矢量 $\boldsymbol{u}(x)$ 为 f 的水平曲线的切线, 因此矢量 $\boldsymbol{g}(x)$ 为 f 的水平曲线的垂线•

定理 2　设 f 为一θ_齐次函数, $x(t)$ 为初值问题

$$\begin{cases} x >= u(x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3}$$

的解, 其中 u 的定义同前• 则 $x(t)$ 满足与原点相应的 Kepler 第二定律•

证明　因为 $x(t)$ 是方程(3) 的一个解, 则它是部分水平曲线 $f^{-1}(f(x_0))$ 的参数函数• 据此以及引理 1, 说明

$$A'(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \langle \nabla f(x), x \rangle = \alpha(f(x)) = \alpha(f(x_0))$$

为常数•

推论 2　设f 为α阶齐次函数, α > 0, 则方程 $\dot{x} = u(x)$ 的解满足常数 $c = \alpha/2$ 的 Kepler 第二定律•

证明　因函数f 是α阶齐次的, 则由注 1, $\alpha(z) = \alpha z$•　设 $x(t)$ 为 $\dot{x} = u(x)$ 的解, 则 $f(x(t)) = 1$, 由定理 2,

$$2c = A'(t) = \alpha \cdot f(x_0) = \alpha \cdot 1,$$

因此 $c = \alpha/2$•

引理 2　设 $x(t)$, $t \in (a, b)$ 为具有与 P 相应的常数c, 且满足 Kepler 第二定律的曲线 C 的参数表示, 则得到另一个满足 Kepler 第二定律的参数表示 $x_1(s)$, $s \in (c, d)$, 且常数 c_1 取 $x_1(s) = x(sc/c_1)$ 是充分的•

证明　设 $h: (c, d) \to (a, b)$ 为一函数, 即 $t = h(s)$, $x(t) = x_1(h(s))$•　则

$$2c = \begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(h(s)) - P \\ h'(s) x_1'(h(s)) \end{vmatrix} =$$

$$h'(s) \begin{vmatrix} x_1(h(s)) - P \\ x_1'(h(s)) \end{vmatrix} = h'(s) 2c_1,$$

因此 $h'(s) = c/c_1$, 它表明 $t = h(s) = sc/c_1 + t_0$, 从而 $x_1(s) = x(sc/c_1 + t_0)$•

引理 3　设 $x(t)$, $t \in J$ 和$x(s)$, $s \in J_1$ 为曲线 C 与P 相应具有相同常数c, 且满足 Kepler 第二定律的参数表示, 则 $t = s + d$, d 为常数•

证明　因为 $x(t)$ 和 $x(s)$ 为同一曲线 C 的参数化, $x(s) = x(t) = x(h(s))$, $t = h(s)$, 则$x'(s) = h'(s) x'(h(s)) = h'(s) x'(t)$•　因此

$$2c = \begin{vmatrix} x(s) - P \\ x'(s) \end{vmatrix} = h'(s) \begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = h'(s) 2c,$$

所以, $h'(s) = 1$, $h(s) = s + d$•

定理 3　设$x(t)$为曲线 C 具有与原点相应的常数α = c, 且满足Kepler第二定律的一个参数表示, 则存在 α = $2c$ 的齐次函数, 使 $x(t)$ 为方程(3)的一个解•

证明　由推论 1 知, $C = \left\{ x(t), t \in J \right\}$ 为α = $2c$ 阶齐次函数f 的水平曲线, 即$f(x(t)) = 1$, $x(t_0) = x_0$, $f(x_0) = 1$•

考虑方程(3)并设其解为 $x(s)$ 使$x(t_0) = x_0$, 则$f(x(s)) = 1$, 又因$x(s)$ 满足 Kepler 第二定律, 且有相同常数 c 和$x(t_0) = x_0$, 则 $x(t) = x(t)$•

我们发现, 若改变点 P, 并考虑同一参数, 由点 P 运动到点P_1, 掠过的面积由下式给出:

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t = \int_a^b \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(t) - P_1 + P_1 - P \\ x'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$\int_a^b \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x(t) - P_1 \\ x'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t + \int_a^b \frac{1}{2} \begin{vmatrix} P_1 - P \\ \int_a^b x'(t) \end{vmatrix} \mathrm{d}t = A_1 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} P_1 - P \\ x(t) - x(a) \end{vmatrix} \cdot \qquad (4)$$

若f 是θ_齐次的且对$t \in (t_0, t_1)$, $x(t)$ 为方程(3)的一个解, 有

$$\begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x(t) - P \\ u(x) \end{vmatrix} = \alpha(f(x)),$$

则

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \alpha(f(x(t)))\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \alpha(z_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha(z_0)(t_1 - t_0)\cdot$$

4 应用: 二体问题

考虑如下经典问题: 一质量为 m 的物体绕另一个质量非常大为M 的物体运动· 设 F 为 m 和M 间的质心, 并且假设运动轨迹为椭圆, 也就是说, 质量为 m 的物体作椭圆运动, 其焦点为 F(见图 3)·

对于质量 m 和M, 其轨道周期 P 是已知的, 即

$$P = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m + M)},$$

其中 G 为引力常数·

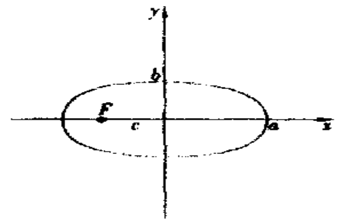

图 3 经典二体问题示意图

我们发现, 它是一个满足 Kepler 第二定律的运动, 因此

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(t) - F \\ x'(t) \end{vmatrix} = c \text{ 和} A = \pi ab,$$

则

$$\pi ab = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(t) - F \\ x'(t) \end{vmatrix}\mathrm{d}t = (t_1 - t_0)c = Pc\cdot$$

所以 $c = \pi ab/P$·

我们的目的是得到质量为 m 的物体关于$x(t)$ 的运动方程(具有相应于 F 的 Kepler 常数 c)·

给定

$$f = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1,$$

则运动轨道由f 的水平曲线之一给出, 即

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1\cdot$$

f 为二阶齐次函数, $\therefore f(x) = (2x_1/a^2, 2x_2/b^2)$, $u(x) = (-2x_2/b^2, 2x_1/a^2)$·

常微分为 $x' = (-2x_2/b^2, 2x_1/a^2)$· 其解为 $x(s) = (a\cos(2s/ab), b\sin(2s/ab))$· 该解对应于 $P = 0$ 的常数为:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(t) - P \\ x'(t) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos\frac{2t}{ab} & b\sin\frac{2t}{ab} \\ -\frac{2}{b}\sin\frac{2t}{ab} & \frac{2}{a}\cos\frac{2t}{ab} \end{vmatrix} = 1\cdot$$

设$x(t)$ 为对应于 F, 常数 $c = 1$ 的参数表示· 我们知道, 任何曲线都可以有一个满足 Kepler 第二定律的参数表示, 因此

$$t = A(s) = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\begin{vmatrix} x(v) - F \\ x'(v) \end{vmatrix}\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\begin{vmatrix} x(v) \\ x'(v) \end{vmatrix}\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{s_0}^{s}\begin{vmatrix} F \\ x'(v) \end{vmatrix}\mathrm{d}v =$$

$$s - s_0 - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} F \\ x(s) - x(s_0) \end{vmatrix}\cdot$$

因为 $F = -\sqrt{a^2 - b^2}$ 且取 $s_0 = 0$, 有

$$t=A(s)=s-s_0+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(-\sqrt{a^2-b^2},0)\\ x(s)-x(0)\end{vmatrix}=$$
$$s+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-\sqrt{a^2-b^2} & 0\\ a(\cos(2s/ab)-1) & b\sin(2s/2b)\end{vmatrix},$$

则

$$t=s-\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-b^2}\sin\frac{2s}{ab}=$$
$$s-\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-b^2}\left[\frac{2s}{ab}-\left(\frac{2s}{ab}\right)^3\frac{1}{3!}+\left(\frac{2s}{ab}\right)^5\frac{1}{5!}+\cdots\right]\cdot$$

而 $t=A(s)$, $s=h(t)$, 则 $x(t)=x(h(t))$, 我们记得, 在这一方法中 $x(t)$ 满足常数 $c=1$ 的 Kepler 第二定律•

取 $x(t)=x(ct)$, $t=ct$, 则它满足常数为 $c=\pi ab/P$ 的 Kepler 第二定律•

这就是二体问题行星运动的参数表示, 其 Kepler 常数作为一周期函数给定•

让我们来考虑其轨道为抛物线的情况(见图 4) ,

$$y=\frac{1}{2d}(x^2-d^2)\cdot$$

参数表示为

$$\begin{cases}x=u,\\ y=\dfrac{1}{2d}(u^2-d^2)\cdot\end{cases}$$

它不能满足 Kepler 第二定律, 因此我们需要通过表面度规来进行参数表示, 取

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}u & \frac{1}{2d}(u^2-d^2)\\ 1 & u/d\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{d}-\frac{1}{2d}(u^2-d^2)\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+d^2}{2d}\right)=\frac{1}{4d}(u^2+d^2),$$

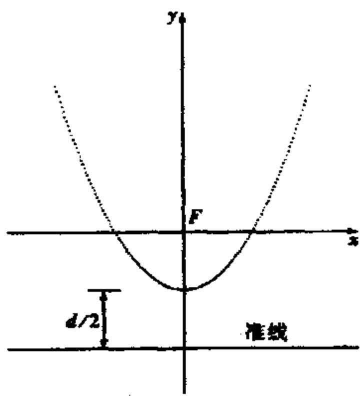

图 4 抛物线轨道示意图

则

$$t=\frac{1}{2}\int_0^u\frac{u^2+d^2}{2d}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6d}u^3+\frac{d}{2}u\right)=\frac{1}{12d}u^3+\frac{d}{4}u=\theta(u),$$

因此 $u=\theta^{-1}(t)\cdot$

通过参数变换, 可得到满足对应于 F 的常数为 1 的 Kepler 第二定律的新的参数表示• 取 $(x(t),y(t))$ 为这一新的参数表示, 则 $(x(ct),y(ct))$ 将满足 Kepler 第二定律, 具有常数 c, 它由 $t=0$ 时的速度 v_0 来确定•

而

$$(x(ct),y(ct))=\left(u,\frac{1}{2d}(u^2-d^2)\right)=\left(\theta^{-1}(ct),\frac{1}{2d}(\theta^{-1}(ct))^2-d^2\right)$$

以及 $$(x'(ct),y'(ct))_{t=0}=\left(\frac{1}{\theta'(u)},\frac{2}{2d}\frac{1}{\theta'(u)}u\right)_{u=0},$$

其中 $$\theta'(u)=\left(\frac{3u^2+3d^2}{12d}\right)_{u=0}=\frac{1}{4}d\cdot$$

本例中, 由于我们是作为抛物线情况处理的, 因此常数 c 不能用周期函数确定, 而用初始速度的函数确定的•

现在取 $x(t)=x(ct)$, $y(t)=y(ct)$, 则 $(x'(0), y'(0))4/d=(1,0)$, 因此 $\boldsymbol{v}_0=(4c/d,0)$, $v_0=|\boldsymbol{v}_0|=4c/d$, 所以 $c=dv_0/4$• 这样, $(x(t), y(t))$ 就是满足对应于 F, 常数为 c 的 Kepler 第二定律的参数表示, 其中常数 c 如上面给出•

在此情况下, 我们通过分解三次方程, 在 t 的函数中得到 u•

在椭圆情况下得出的方程是完美的•

用类似的方法, 我们可以描述双曲线轨道的运动• 这时候, 参数表示包括了双曲函数•

[参 考 文 献]

[1] Herrick C. On the computation of nearly parabolic two_body orbits[J]. Astronom J, 1960, **65**(6): 386—388.

[2] Stoker J J. Differential Geometry, Pure and Applied Mathematics[M]. Wiley_Interscience, 1969.

Generalized Homogeneous Functions and the Two_Body Problem

C. Biasi, S. M. S. Godoy

(Departamento de Matemûtica, Instituto de Ci ncias Matemûticas e de Computa ‚ño, Universidade de Sño Paulo_Campus de Sño Carlos, Caixa Postal_668, 13560_970 Sño Carlos_SP, Bracil)

Abstract: A generalization of the homogeneous function concept is studied. An application is done with a solution of the two_body problem.

Key words: homogeneous function; generalized homogeneous function; Kepler' s second law; two_body problem