

# 计算机代数应用中的一个半逆序算法\*

戴世强<sup>1</sup> 臧宏鸣<sup>1</sup>

(1995年10月11日收到)

## 摘 要

为了克服计算机代数应用中出现的“中间表达式爆炸”的困难, 本文提出一种半逆序算法, 将中间表达式在运算过程中以符号形式冻结起来, 到求解的最后阶段予以解冻, 从而避免了因存贮空间不足而导致的溢出。文中简述了该算法在非线性振动、冷却塔动力优化和非线性水波问题中的应用, 证实了算法的有效性。

**关键词** 计算机代数 符号运算 中间表达式爆炸 摄动法 非线性分析

## 一、引 言

计算机代数(即符号运算)在科学计算和工程分析中得到越来越广泛的应用(参看文献[1~3]中的评述)。正如A. I. Beltzer<sup>[3]</sup>所指出的, 这是计算机应用的一个重大突破。计算机代数与摄动法相结合, 是解决实际问题的有力工具, 符号运算克服了手工摄动高阶计算的困难<sup>[3-7]</sup>, 使摄动级数解的计算机延伸成为可能。然而, M. Van Dyke 教授指出<sup>[8]</sup>, 在实际应用过程中经常出现“中间表达式爆炸”, 影响了摄动—计算机代数方法的适用性。为了解决这一问题, 我们设计了一种带半逆序算法, 其基本思想是: 求 $N$ 阶摄动解时, 将前 $N-1$ 项解赋以符号, 冻结存贮起来, 到最后阶段再逐一解冻。实际上这样做改变了原有顺序求摄动解的步骤, 先求出 $N$ 阶形式解, 再逆推回去, 所以我们称之为“半逆序算法”。

下节我们将进一步叙述半逆序算法的步骤概要, 接着用以分析三个实际问题: 非线性振动的 Duffing 方程; 双曲冷却塔的动力优化; 分层流体中的界面孤立波。实践证明, 用我们的算法可有效地节省存贮空间, 避免了溢出, 可在小型机甚至微机上实现复杂问题的计算机代数解。

## 二、半逆序算法概述

我们先来分析“中间表达式爆炸”的原因。计算机代数符号运算与寻常的数值计算不同, 数值计算中参数单元可作多用途安排, 整个计算不必开出很多单元多占用存贮空间, 而

\* 国家自然科学基金和上海市自然科学基金及上海市高教局博士点基金资助课题。本文曾在第三届国际工业与应用数学大会(汉堡, 1995. 7. 3-7)上宣读。

1 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

符号运算过程中所有的变量参数都需有自己的单元而无法共用，且不能控制中间结果以固定格式存贮，须多占相当大的空间；随着求解阶数的增大，这种问题愈益显得突出。若不加以控制，中间表达式爆炸而引起的溢出在所难免。鉴于此，我们放弃常规的运算顺序，将中间运算步骤进行调整。例如，求四阶解 $u_4$ 时，先求出 $u_4 = u_4(u_1, u_2, u_3)$ ，再求 $u_3 = u_3(u_1, u_2)$ ， $u_2 = u_2(u_1)$ ，最后求 $u_1$ ，且把中间结果逐一冻结，使之不参加下一步的计算，而在最后的整理化简的运算中再予以解冻，从而使上述困难得到克服。该算法的程序框图见图1。

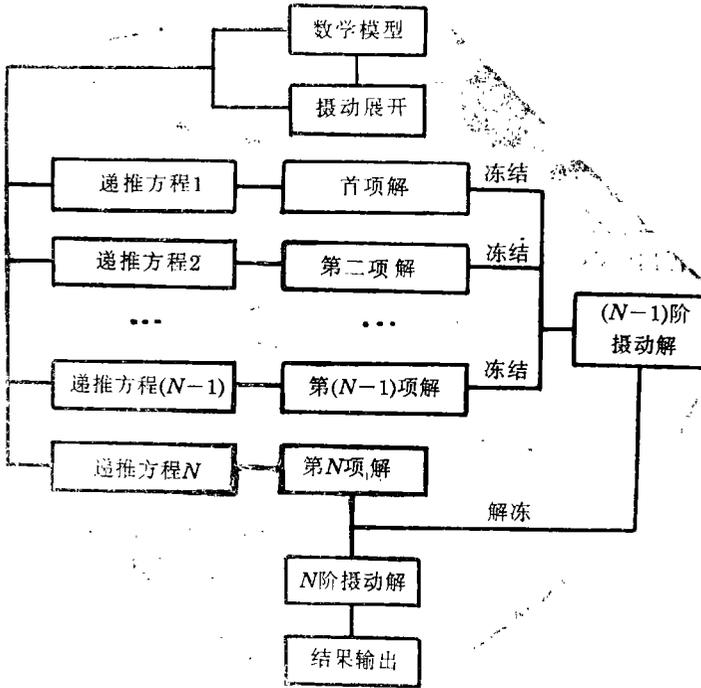


图 1

必须指出，这一算法不仅适用于求摄动解，当利用计算机代数软件对一般问题作符号运算时，可将整个问题进行分割，将子问题的结果逐一冻结，最后再合并、解冻，我们在解冷却塔的动力优化问题时就采用这一思路。

### 三、Duffing方程的计算机代数—摄动解

作为半逆序算法的应用实例，我们来考察非线性弹簧约束下无阻尼振动的 Duffing 方程<sup>[5]</sup>

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u + \varepsilon u^3 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad u(0) = a, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0 \quad (3.1)$$

若采用正则摄动法求解必定出现长期项，为避免这一点，利用 PLK 方法<sup>[8]</sup>，令

$$\tau = \omega t, \quad \omega = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \omega_n + O(\varepsilon^{N+1}), \quad u = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n(\tau) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (3.2)$$

将(3.2)式代入(3.1)式，比较式中 $\varepsilon$ 的同次幂，得到递推方程

$$L[u_n] = H_n[u_0, u_1, \dots, u_{n-1}; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n] \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

其中,

$$L = d^2/d\tau^2 + 1, H_0 = 0 \quad (3.4)$$

$\omega_n (n \geq 1)$  由消除长期项的条件确定.

经手工摄动分析, 有如下结果:

1. 各项解的形式为

$$u_n = \frac{a^{2n+1}}{\omega_0^{2n}} \sum_{k=0}^n b_k \cos[(2k+1)\tau] \quad (3.5)$$

2.  $(N+1)$  阶渐近解的形式为

$$u = \sum_{m=0}^N B_m(\varepsilon, \omega, a) \cos[(2m+1)\tau] + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (3.6)$$

3.  $\omega(N)$  的形式为

$$\omega = \omega_0 \left[ 1 + \sum_{m=1}^N D_m \left( \frac{\varepsilon a^2}{\omega_0^2} \right)^m \right] + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (3.7)$$

我们用计算机代数软件系统 REDUCE 进行编程计算. 基于上节关于半逆序算法的思路, 程序的主要部分为

```

tt=t, t=tau, w=omega, EP=epsilon,
t=w*tt
w=Sum[EP^n*w(N), {0, N}]
u=Sum[EP^n*u(N), {0, N}]
FF=D[u, {tt, 2}] + w(0)^2*u + EP*u^3
F0=FF/.EP->0
F1=Coefficient [FF, EP]
F2=Coefficient [FF, EP^2]
... ..
Fi=Coefficient [FF, EP^i]
... ..
FN=Coefficient [FF, EP^N]
Short [% , 2]
Solve [FN=0, u(N)]
... ..
Solve [Fi=0, u(i)]
... ..
Solve [F0=0, u(0)]
... ..
u=u(0) + EP*u(1) + EP^2*u(2) + ... + EP^N*u(N)

```

考虑到本问题的计算涉及大量三角函数积化和差、多项式平方和立方, 我们确定了各种化简规则, 编入计算机程序, 全部符号运算由计算机完成. 我们计算到15阶近似, 全部程序约为600行, 在 IBM-4361上完成计算, 所用的 CPU 时间为30min.

问题(3.1)有精确解, 在 $\omega_0=1$ 时其形式为

$$u = a \operatorname{cn}(\sqrt{1+\varepsilon a^2}t, k), \quad k^2 = \frac{\varepsilon a^2}{2(1+\varepsilon a^2)}, \quad \omega_{\text{exact}} = \frac{\pi\sqrt{1+\varepsilon a^2}}{2K(k)} \quad (3.8)$$

其中,  $\operatorname{cn}(x, k)$ 是模为 $k$ 的椭圆余弦函数,  $K(k)$ 是第一类全椭圆积分。

表1为近似的频率值与(3.7)式给定的精确的频率值 $\omega_{\text{exact}}$ 比较,  $\omega(15)$ ,  $\omega(10)$ 和 $\omega(5)$ 分别表示15阶、10阶与5阶近似频率值。

表1 频率的精确值与近似值的比较

$\varepsilon$	$\omega_{\text{exact}}$	$\omega(15)$	$\omega(10)$	$\omega(5)$
0.1	1.03672	1.03672	1.03672	1.03672
0.2	1.07200	1.07200	1.07200	1.07200
0.3	1.10602	1.10602	1.10602	1.10603
0.4	1.13891	1.13891	1.13891	1.13895
0.5	1.17078	1.17078	1.17078	1.17094
0.6	1.20173	1.20173	1.20172	1.20217
0.7	1.23185	1.23183	1.23177	1.23290
0.8	1.26118	1.26110	1.26087	1.26341
0.9	1.28981	1.28934	1.28872	1.29412
1.0	1.31778	1.31560	1.31447	1.32553
1.1	1.34513	1.33646	1.33613	1.35829
1.2	1.37190	1.34134	1.34947	1.39319
1.3	1.39814	1.30086	1.34625	1.43122

由表1可见, 对15阶近似来说, 直至 $\varepsilon=1.0$ 仍给出相当好的结果, 相对误差小于0.2%。 $u(15)$ 与(3.8)式中 $u(N)$ 的比较也有类似的结论。符号运算得到的表达式相当繁复, 限于篇幅, 这里从略, 详见文献[5]。

开始时, 我们未采用中间冻结的半逆序算法, 动辄出现存贮空间不足而导致的溢出, 采用该算法后, 避免了这一现象。

#### 四、加肋双曲冷却塔动力优化问题的矩阵代数运算

作为第二个例子, 我们来进行一个动力优化问题的矩阵运算(详见文献[5]): 人们常在电厂用的双曲冷却塔上加肋, 以提高它的动力特性, 肋的个数、形状、位置、大小的取法有一个优化问题。采用一般的数值方法(如有限元法)进行优化时, 需作大量迭代运算, 当肋的位置变动时, 每次均须重新算出单元刚度矩阵和质量矩阵, 再拼装成总体刚度阵和质量阵, 工作量极大。因此, 我们采用摄动—计算机代数法, 大大节省了计算量。然而, 对矩阵作符号运算时, 也遇到了溢出困难, 所以, 我们也采用了中间冻结的半逆序算法。

现以单元刚度阵的代数运算为例作一说明。这一问题的单元刚度阵为

$$K = \alpha A^T B^T D_k B A \quad (4.1)$$

其中,  $A$ 为 $16 \times 16$ 系数阵,  $B$ 为

$$B = (L_1 T G + L_2) T X_0 \quad (4.2)$$

是与节点位置有关的系数,  $L_1, L_2$ 为 $4 \times 3$ 算子矩阵,  $G$ 为 $3 \times 3$ 算子矩阵,  $D_k$ 为 $4 \times 4$ 矩阵,  $T$ 为 $3 \times 3$ 矩阵,  $X_0$ 为 $3 \times 16$ 矩阵, 当单元位置确定后, 它们都是已知的。

按第2节的思路, 我们把矩阵代数运算分解成几个子问题, 逐一解决, 并冻结中间结果,

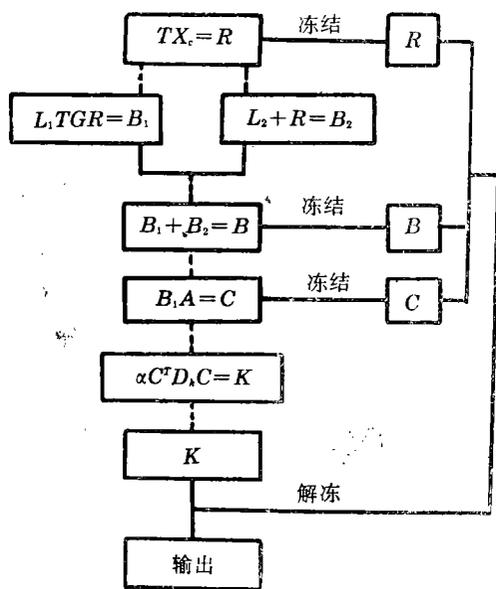


图 2

节省了存储空间与运算空间，有效地避免了溢出。计算框图如图 2 所示。用这一算法我们成功地解决了冷却塔加肋的动力优化问题。将我们的方法与仅用寻常的有限元法相比较，为得到同样精度的数值结果，前者所需的 CPU 时间仅为后者的三十分之一。

### 五、界面孤立波的高阶解

最后，我们来简述一个更为复杂的实例：一个二流体系统中界面孤立波的高阶解<sup>[9]</sup>。所处理的系统是：两个水平刚性固壁所界的两层不可压无粘流体，采用[10]中导出的基本方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\xi + 1)W + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi + 1)^{n+1} \partial^{2n} W}{(2n+1)! \partial x^{2n}} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\xi - r)w + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi - r)^{n+1} \partial^{2n} w}{(2n+1)! \partial x^{2n}} \right] &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \xi + \frac{1}{2} W^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi + 1)^{2n}}{(2n)!} \left[ \frac{\partial^{2n} W}{\partial t \partial^{2n-1}} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^m C_{2n}^m \frac{\partial^m W}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m} W}{\partial x^{2n-m}} \right] \right\} - \sigma \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \xi + \frac{1}{2} w^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi - r)^{2n}}{(2n)!} \left[ \frac{\partial^{2n} w}{\partial t \partial^{2n-1}} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^m C_{2n}^m \frac{\partial^m w}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m} w}{\partial x^{2n-m}} \right] \right\} \right) = 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

其中  $\xi, w, W$  为无量纲界面升高、沿上下固壁无量纲水平速度， $r$  和  $\sigma$  分别为上下层流体的深度比和密度比。假设无量纲波幅和波数分别为  $\epsilon$  和  $\epsilon^{1/2}$  量级。利用约化摄动法和 PLK 方法来解，作如下的变换和摄动展开：

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \epsilon^{1/2} k(x - C_R t) \\ C_R &= C [1 + R_1 \epsilon a + R_2 (\epsilon a)^2 + R_3 (\epsilon a)^3 + \dots] \\ U &= (\xi, W, w)^T = \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2 + \epsilon^3 U_3 + \dots \end{aligned} \right\} \tag{5.2}$$

其中， $k$  和  $R_1$  为使发展方程规范化引进的常数， $a$  为波幅因子， $C$  为界面上线性化重力波波速， $R_n (n \geq 2)$  为消除解中的长期项而引进。

将(5.2)式代入(5.1)式，得到一系列递推方程；由递推方程的可解性条件，导得界面升

高各项解所满足的方程, 它们分别为KdV方程和非齐次线性化KdV方程. 各项求解非常复杂, 用手工运算难以进行, 因此我们采用 MATHEMATICA 软件系统进行符号运算, 并利用中间冻结的半逆序算法, 在 IBM—PC486 微机上成功地求得了界面孤立波的四阶渐近解, 所得到的波形窄于KdV孤立波, 与实验事实相符 (详见文献[5,9]).

## 六、结 语

从上述分析可见, 我们提出的半逆序算法在计算机代数的应用中可以起重要的作用. 由于超级计算机在我国尚不普及, 为了在小型机和微机上进行符号运算, 研究象半逆序算法那样的技巧是有必要的. 最近, 我们用该算法求得了一个非线性波方程的四阶渐近解<sup>[11]</sup>, 再次证实了它的有效性.

北京大学的陈耀松教授惠允作者使用他的 MATHEMATICA 软件系统, 作者向他深表谢意.

## 参 考 文 献

- [1] J. Calmet and J. A. Van Hulzen, Computer algebra application, in *Computer Algebra Symbolic and Algebraic Computation*, Ed. by B. Buchberger et al., 2nd Ed., World Pub. Co., Beijing (1988), 245—258.
- [2] A. I. Beltzer, Engineering analysis via symbolic computation—A break through, *Appl. Mech. Rev.*, **43** (1990), 119—127.
- [3] M. Van Dyke, Computer-extended series, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16** (1984), 287—309.
- [4] H. R. Rand and D. Armbruster, *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebra*, Springer-Verlag, New York (1987).
- [5] 臧宏鸣, 若干力学问题的摄动—计算机代数研究, 硕士学位论文, 上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所 (1993).
- [6] 臧宏鸣, 计算机符号运算在摄动方法中的应用, *上海工业大学学报*, **12** (1991), 283—288.
- [7] 臧宏鸣、戴世强, 一个非线性振动方程的计算机代数解, *上海工业大学学报*, **14** (1993), 189—197.
- [8] 戴世强, PLK方法, 《奇异摄动理论及其在力学中的应用》, 钱伟长主编, 科学出版社, 北京 (1981), 33—86.
- [9] Zang Hongming and Dai Shiqiang, Higher-order solutions for interfacial solitary waves in a two-fluid system, *Proc. Inter. Conf. on Hydrodyn.*, China Ocean Press, Beijing (1994), 691—695.
- [10] 戴世强, 两层流体界面上的孤立波, *应用数学和力学*, **3**(6) (1982), 721—731.
- [11] 王明琪、戴世强, 一个非线性波动方程的计算机代数—摄动解, *应用数学和力学*, **16**(5) (1995), 403—408.

# A Semi-Inverse Algorithm in Application of Computer Algebra

Dai Shiqiang    Zang Hongming

*(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)*

## Abstract

For the purpose of overcoming the difficulty of the so-called "intermediate expression swell" in applying computer algebra, a semi-inverse algorithm is proposed. The order of seeking solutions for various problems is partly inverted, i. e. the intermediate expressions appearing in computation are "frozen" in the symbolic form at first, and "unfrozen" till the formal expressions of final solutions are found out. In this way, the overflow due to the shortage of saving space is avoided. The applications of the algorithm in the problems on nonlinear oscillation, dynamical optimization and interfacial solitary waves are described, which shows the effectiveness of the semi-inverse algorithm.

**Key words** computer algebra, symbolic computation, intermediate expression swell, perturbation method, nonlinear analysis