

# 弹性圆底扁球壳在边缘均布力矩 作用下的非线性稳定问题

叶开沅 刘人怀  
张传智 徐一帆  
(甘肃兰州大学)

(1978年11月收到)

## 摘 要

本文对边缘简单支承在边缘均布力矩作用下的弹性圆底扁薄球壳的非线性问题进行了研究。用我们提出的修正迭代法求出决定上下临界载荷的二次和三次近似方程。结果画成曲线以供工程应用,并将此结果和胡海昌<sup>[1]</sup>的结果进行了比较,我们还研究了临界点,即上下临界载荷相重点附近的情况,并指出二次近似的适用范围。文末还附带得出本问题的特殊情况:相同边缘支承和载荷下的圆平板大挠度问题的刚度设计公式及 $\nu=0.3$ 的相应曲线,并与黄泽言<sup>[2]</sup>用摄动法得到的结果进行了比较。

## 一、引 言

1939年 von Kármán 和钱学森<sup>[3]</sup>首先在薄壳屈曲问题中提出薄壳的屈曲现象是一个非线性现象。由于薄壳非线性屈曲问题的基本方程是非线性方程,在数学上存在的困难很大,如何求解这些方程便成为这问题的关键问题。好多年来,人们企图从各种直接的近似解将方程简化为线性方程组的办法着手,但这些方法的精确度还不够理想,看来求出这些非线性方程的精确解的工作是不可避免的。近30年来,大家均从事于较简单的问题——圆底扁球壳的轴对称失稳的研究,所有的精确解法大概有二种,一种是 S. Way<sup>[4]</sup>首先提出而后来为 R. M. Simons<sup>[5]</sup>, E. L. Reiss<sup>[6]</sup>和 H. Weinitzschke<sup>[7]</sup>应用在圆底扁球壳非线性稳定问题中的幂级数法,一种是钱伟长<sup>[8]</sup>首先提出而后来为 A. Kaplan 和冯元桢<sup>[9]</sup>以及 Н. И. Кривошеев 和 X. M. Муштари<sup>[10]</sup>应用在上述问题的摄动法。幂级数法虽可在电子计算机上进行计算,但工作量仍然是相当大的。而且仅能用在均布载荷。摄动法在扁壳非线性稳定问题中摄动次数不能太多,否则工作量便会大得无法进行下去,在几何参量  $k$  值较大时,解的精确度常常不能满足要求。因此从理论的角度来看,薄壳的非线性稳定的研究迫切需要一个适用范围较广,计算程序简单而精确度较高的解法。

另一方面,随着近代工程技术的发展,薄壳稳定性在航空工程、航海工程、自动控制、精密仪器工程、航天工程等均有广泛的应用,这些方面也均要求理论能提供可供设计应用的可靠的公式和图表。

在上述两个前提下, 我们结合了钱伟长以中心挠度为摄动参量和迭代法的优点提出了修正迭代法, 这个方法适用范围较广, 迭代程序明确、简单、精确度高。为了说明这点我们对圆底扁球壳的非线性对称失稳进行了一系列的研究, 现已完成的除本文外尚有[11,12,13]。

本文研究了边缘简单支承在边缘均布力矩作用下的弹性圆底扁薄球壳的非线性稳定问题, 这个问题胡海昌<sup>[1]</sup>曾研究过, 他是以两个精确解为基础, 然后分析这些解的性质, 假定外加力矩与边缘倾角的关系式, 用精确解结果来决定关系式的系数。我们求出了决定上下临界载荷的二次和三次近似方程, 结果画成曲线以供工程应用, 并将所得结果和[1]的结果进行了比较。我们还研究了临界点即上下临界载荷相重点附近的情况, 并指出二次近似的适用范围, 文末还附带得出本文的特殊情况, 在相同边缘支承和载荷下的圆平板大挠度问题的刚度和应力设计公式及 $\nu=0.3$ 时的相应曲线, 并与黄择言<sup>[2]</sup>用摄动法得到的结果进行了比较。

## 二、基本方程和边界条件

考虑一厚度为 $h$ , 跨度为 $2a$ , 拱起为 $f$ 的圆底扁薄球壳在边缘均布力矩作用下的非线性稳定问题, 见图1。

由文献[1, 14], 引入下列的无量纲量后,

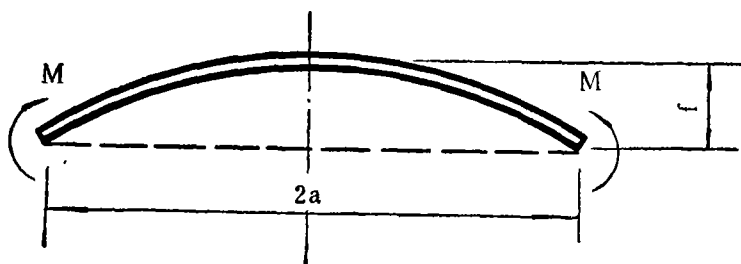


图1

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{r}{a}, \quad Y = \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{W}{h} + \frac{1}{2} k \rho^2 \\ \theta &= -\frac{dY}{d\rho} = -\sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{1}{h} \frac{dW}{d\rho} - k\rho \\ S_r &= \frac{12(1-\nu^2)a^2}{Eh^3} N_r, \quad S = \rho S_r \\ \lambda^2 = k &= \sqrt{12(1-\nu^2)} \frac{2f}{h}, \quad m = \frac{[12(1-\nu^2)]^{3/2}}{Eh^4} M \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

我们即得如下的基本方程和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} L(\rho\theta) &= \frac{S\theta}{\rho} \\ L(\rho S) &= \frac{1}{2} \left( k^2\rho - \frac{\theta^2}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } Y = \frac{1}{2} k, \quad \frac{d\theta}{d\rho} + \nu\theta = m - \mu k, \quad S = 0 \quad (2.3a, b, c)$$

$$\text{其中 } \text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \theta=0, \quad S \text{ 有限} \quad (2.4a, b)$$

$$L = \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \quad (2.5)$$

$E$ 为杨氏弹性模量,  $\nu$ 为泊松比,  $\mu=1+\nu$ ,  $w$ 为挠度,  $N_r$ 为单位长度径向薄膜内力,  $r$ 为壳径。

### 三、用修正迭代法求解

现在我们用修正迭代法求解在边界条件(2.3)、(2.4)下的方程(2.2)。

我们令方程(2.2a)中的 $S=0$ , 则一次近似的边值问题为:

$$L(\rho\theta_1)=0 \quad (3.1)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } Y_1 = \frac{1}{2}k, \quad \frac{d\theta_1}{d\rho} + \nu\theta_1 = m - k\mu \quad (3.2a, b)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \theta_1 = 0 \quad (3.3)$$

解此问题, 即得

$$\theta_1 = \left( \frac{m}{\mu} - k \right) \rho \quad (3.4)$$

$$Y_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{m}{\mu} - k \right) \rho^2 + \frac{m}{2\mu} \quad (3.5)$$

令 $Y_m$ 为壳体中心折合挠度, 则当 $\rho=0$ 时,  $Y_1=Y_m$ , 以此关系式代入(3.5), 即得

$$m = 2\mu Y_m$$

以此关系式代入(3.4)和(3.5), 即得

$$\theta_1 = (2Y_m - k)\rho \quad (3.6)$$

$$Y_1 = Y_m(1 - \rho^2) + \frac{1}{2}k\rho^2 \quad (3.7)$$

第二次近似的边值问题为:

$$\left. \begin{aligned} L(\rho S_2) &= \frac{1}{2} \left( k^2 \rho - \frac{\theta_1^2}{\rho} \right) \\ L(\rho\theta_2) &= \frac{S_2\theta_1}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3.8a, b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } Y_2 = \frac{1}{2}k, \quad \frac{d\theta_2}{d\rho} + \nu\theta_2 = m - \mu k, \quad S_2 = 0 \quad (3.9a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \theta_2 = 0, \quad S_2 \text{ 有限} \quad (3.10a, b)$$

将(3.6)代入(3.8a)的右端, 应用边界条件(3.9c), (3.10b), 我们得到如下的解:

$$S_2 = \frac{1}{4}Y_m(k - Y_m)(\rho^3 - \rho) \quad (3.11)$$

将(3.6)和(3.11)代入方程(3.8b)的右端, 然后用边界条件(3.9a, b), (3.10a), 我们即得

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \left[ \frac{m}{\mu} - k + \frac{2+\nu}{48\mu} Y_m(k - Y_m)(2Y_m - k) \right] \rho \\ &\quad + \frac{1}{32} Y_m(k - Y_m)(2Y_m - k) \left( \frac{\rho^5}{3} - \rho^3 \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$Y_2 = - \left[ \frac{m}{\mu} - k + \frac{2+\nu}{48\mu} Y_m (k - Y_m) (2Y_m - k) \frac{\rho^2}{2} \right] + \frac{1}{32} Y_m (k - Y_m) (2Y_m - k) \left( \frac{\rho^6}{18} - \frac{\rho^4}{4} \right) + C_1 \quad (3.13)$$

其中

$$C_1 = \frac{m}{2\mu} - \frac{7}{1152} Y_m (k - Y_m) (2Y_m - k) + \frac{2+\nu}{96\mu} Y_m (k - Y_m) (2Y_m - k) \quad (3.14)$$

将  $Y_2$  代入下面的关系式

$$Y_2|_{\rho=0} = Y_m \quad (3.15)$$

经整理后, 即得中心挠度  $Y_m$  与外加折合力矩  $m$  的关系式:

$$m = \left( 2\mu + \frac{17+5\nu}{576} k^2 \right) Y_m - \frac{17+5\nu}{192} k Y_m^2 + \frac{17+5\nu}{288} Y_m^3 \quad (3.16)$$

对于第三次近似, 我们有下列的边值问题:

$$\left. \begin{aligned} L(\rho S_3) &= \frac{1}{2} \left( k^2 \rho - \frac{\theta_3^2}{\rho} \right) \\ L(\rho \theta_3) &= \frac{S_3 \theta_3}{\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3.17a, b)$$

$$\text{当 } \rho=1 \text{ 时, } Y_3 = \frac{1}{2} k, \frac{d\theta_3}{d\rho} + \nu\theta_3 = m - \mu k, S_3 = 0 \quad (3.18a, b, c)$$

$$\text{当 } \rho=0 \text{ 时, } \theta_3 = 0, S_3 \text{ 有限} \quad (3.19a, b)$$

将 (3.16) 代入 (3.12), 然后代入方程 (3.17 a) 的右端, 应用边界条件 (3.18 c),

(3.19 b), 我们即得

$$S_3 = \frac{1}{8} \left[ (k^2 - \beta_1^2) \frac{\rho^8 - \rho}{2} + \beta_1 \beta_2 \frac{\rho^6 - \rho}{3} + \left( \frac{\beta_1 \beta_2}{3} - \frac{\beta_2^2}{2} \right) \frac{\rho^7 - \rho}{6} + \frac{\beta_2^2}{30} (\rho^6 - \rho) - \frac{\beta_2^2}{270} (\rho^{11} - \rho) \right] \quad (3.20)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \beta_1 - k + \frac{2+\nu}{48\mu} (-2Y_m^3 + 3kY_m^2 - k^2Y_m) \\ \beta_2 &= \frac{1}{32} (-2Y_m^3 + 3kY_m^2 - k^2Y_m) \\ \beta_3 &= \left( 2 + \frac{17+5\nu}{576\mu} k^2 \right) Y_m - \frac{17+5\nu}{192\mu} k Y_m^2 + \frac{17+5\nu}{288\mu} Y_m^3 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

将前述  $\theta_3$  和 (3.20) 代入 (3.17b) 的右端, 应用边界条件 (3.18 a, b), (3.19 a), 我们得到

$$\theta_3 = A\rho + \frac{1}{64} \left[ \frac{k^2 \beta_1 - \beta_1^2}{2} \left( \frac{\rho^5}{3} - \rho^3 \right) - \frac{\beta_1^2 \beta_2}{9} \left( -\frac{\rho^5}{5} + \frac{3}{2} \rho^7 - \frac{3}{2} \rho^9 - \frac{5}{2} \rho^3 \right) + \frac{\beta_1 \beta_2^2}{135} \left( -\frac{\rho^{13}}{7} + \frac{9}{5} \rho^{11} - \frac{45}{8} \rho^9 - \frac{25}{12} \rho^7 + \frac{25}{2} \rho^5 + \frac{29}{4} \rho^3 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta_2^2}{135} \left( -\frac{\rho^{17}}{216} + \frac{\rho^{18}}{14} - \frac{11}{28} \rho^{13} + \frac{3}{4} \rho^{11} + \frac{29}{72} \rho^7 - \frac{29}{12} \rho^6 \right) \\
& + k^2 \beta_2 \left( \frac{\rho^9}{60} - \frac{\rho^7}{9} + \frac{\rho^6}{6} \right) \quad (3.22)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A = & \beta_3 - k - \frac{1}{64\mu} \left[ \frac{\beta_1^3 - k^2 \beta_1}{3} (2 + \nu) - \frac{\beta_1^2 \beta_2}{10} (7 + 3\nu) \right. \\
& + \frac{\beta_1 \beta_2^2}{113400} (31067 + 11507\nu) - \frac{\beta_2^3}{102060} (3877 + 1020\nu) \\
& \left. + \frac{k^2 \beta_2}{180} (37 + 13\nu) \right] \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_3 = & C_2 - \frac{A}{2} \rho^2 - \frac{1}{64} \left[ (k^2 \beta_1 - \beta_1^3) \left( \frac{\rho^6}{36} - \frac{\rho^4}{8} \right) + \frac{\beta_1^2 \beta_2}{18} \left( -\frac{\rho^{10}}{25} + \frac{3}{8} \rho^8 - \frac{1}{2} \rho^6 + \frac{29}{4} \rho^4 \right) \right. \\
& + \frac{\beta_1 \beta_2^2}{540} \left( -\frac{2}{49} \rho^{14} + \frac{3}{5} \rho^{12} - \frac{9}{4} \rho^{10} - \frac{25}{24} \rho^8 + \frac{25}{3} \rho^6 + \frac{29}{4} \rho^4 \right) \\
& + \frac{\beta_2^3}{540} \left( -\frac{\rho^{18}}{972} + \frac{\rho^{16}}{56} - \frac{11}{98} \rho^{14} + \frac{1}{4} \rho^{12} + \frac{29}{144} \rho^8 - \frac{29}{18} \rho^6 \right) \\
& \left. + \frac{1}{2} k^2 \beta_2 \left( \frac{1}{300} \rho^{10} - \frac{1}{36} \rho^8 + \frac{1}{18} \rho^6 \right) \right] \quad (3.24)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
C_2 = & \frac{k^2}{2} + \frac{A}{2} + \frac{1}{64} \left[ (\beta_1^3 - k^2 \beta_1) \frac{7}{72} - \frac{283}{3600} \beta_1^2 \beta_2 \right. \\
& \left. + \frac{75563}{3175200} \beta_1^2 \beta_2^2 - \frac{239119}{102876480} \beta_2^3 + \frac{7}{450} k^2 \beta_2 \right] \quad (3.25)
\end{aligned}$$

将 $Y_3$ 代入下面的关系式

$$Y_3|_{\rho=0} = Y_m \quad (3.26)$$

经化简后有

$$\begin{aligned}
\frac{m}{\mu} = & Y_m + \frac{1}{64} \left[ (\beta_1^3 - k^2 \beta_1) \frac{17 + 5\nu}{72\mu} - \beta_1^2 \beta_2 \frac{977 + 257\nu}{3660\mu} \right. \\
& \left. + \beta_1 \beta_2^2 \frac{71875 + 17107\nu}{635040\mu} - \beta_2^3 \frac{1714889 + 366689\nu}{102876480\mu} + k^2 \beta_2 \frac{157 + 37\nu}{1800\mu} \right] \quad (3.27)
\end{aligned}$$

将(3.21)代入上式, 经整理后得

$$m = \sum_{i=1}^9 \alpha_i Y_m^{10-i} \quad (3.28)$$

其中

$$\alpha_1 = -\frac{\lambda_1}{4} \mu$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{9\lambda_1 k}{8} \mu \\
\alpha_3 &= -\frac{33\lambda_1 k^2 - 4\lambda_2}{16} \mu \\
\alpha_4 &= \frac{63\lambda_1 k^3 - 28\lambda_2 k}{32} \mu \\
\alpha_5 &= -\frac{33\lambda_1 k^4 - 38\lambda_2 k^2 - 2\lambda_3}{32} \mu \\
\alpha_6 &= \frac{1}{32}(9\lambda_1 k^5 - 25\lambda_2 k^3 + 5\lambda_3 k) \mu \\
\alpha_7 &= -\frac{1}{32}(\lambda_1 k^6 - 8\lambda_2 k^4 + \lambda_4 k^2 - 2\lambda_6) \mu \\
\alpha_8 &= \frac{1}{32}(-\lambda_2 k^5 + \lambda_6 k^3 - 3\lambda_5 k) \mu \\
\alpha_9 &= -\frac{1}{32}(\lambda_7 k^4 - \lambda_5 k^2 - 64) \mu
\end{aligned} \tag{3.29}$$

这里

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{16855282483200\mu^4}(102622\nu^4 + 405028\nu^3 + 599352\nu^2 + 394108\nu + 97162) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{97542144\mu^3}(27824\nu^3 + 143532\nu^2 + 203592\nu + 87884) \\
\lambda_3 &= \frac{1}{86400\mu^2}(104\nu^2 + 148\nu + 44) \\
\lambda_4 &= \frac{1}{518400\mu^2}(2599\nu^2 + 3638\nu + 1039) \\
\lambda_5 &= \frac{17 + 5\nu}{18\mu} \\
\lambda_6 &= \frac{1}{345600\mu^2}(519\nu^2 + 678\nu + 159) \\
\lambda_7 &= \frac{1}{1036800\mu^2}(103\nu^2 + 86\nu - 17)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

当  $\nu = 1/3$  时, (3.29) 为

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -4.6764 \cdot 10^{-8} \\
\alpha_2 &= 2.1044 \cdot 10^{-7} \\
\alpha_3 &= -(0.38580k^2 - 59.764) \cdot 10^{-6} \\
\alpha_4 &= (0.36826k^3 - 209.17k) \cdot 10^{-6} \\
\alpha_5 &= -(0.0019290k^4 - 2.8388k^2 + 13.657) \cdot 10^{-4} \\
\alpha_6 &= (0.00052609k^5 - 1.8676k^3 + 34.144k) \cdot 10^{-4} \\
\alpha_7 &= -5.845 \cdot 10^{-9}k^6 + 5.9764 \cdot 10^{-9}k^4 - 2.7566 \cdot 10^{-3}k^2 + 1.5556 \\
\alpha_8 &= -7.4705 \cdot 10^{-6}k^5 + 7.2049 \cdot 10^{-4}k^3 - 2.3333k
\end{aligned}$$

$$\alpha_9 = -1.2538 \cdot 10^{-6} k^4 + 7.7778 \cdot 10^{-1} k^2 + 64 \quad (3.31)$$

方程(3.16)和(3.28)分别为二次近似和三次近似决定外加载荷 $m$ 和中心折合挠度 $Y_m$ 的曲线。

图2给出了 $\nu=1/3$ 时三次近似的外加折合力矩 $m$ 对中心折合挠度 $Y_m$ 的关系曲线,它的特性尤其是这些曲线与稳定性的关系的讨论可参阅[1]。

工程上感兴趣的是稳定性曲线,亦即规定上下临界载荷 $m_s$ ,  $m_b$ 和几何参量 $k$ 的关系曲线。在文献[1]中称 $m_s$ 为跳进力矩,  $m_b$ 为跳回力矩。稳定性曲线的方程可由下列极值条件决定

$$\frac{dm}{dY_m} = 0 \quad (3.32)$$

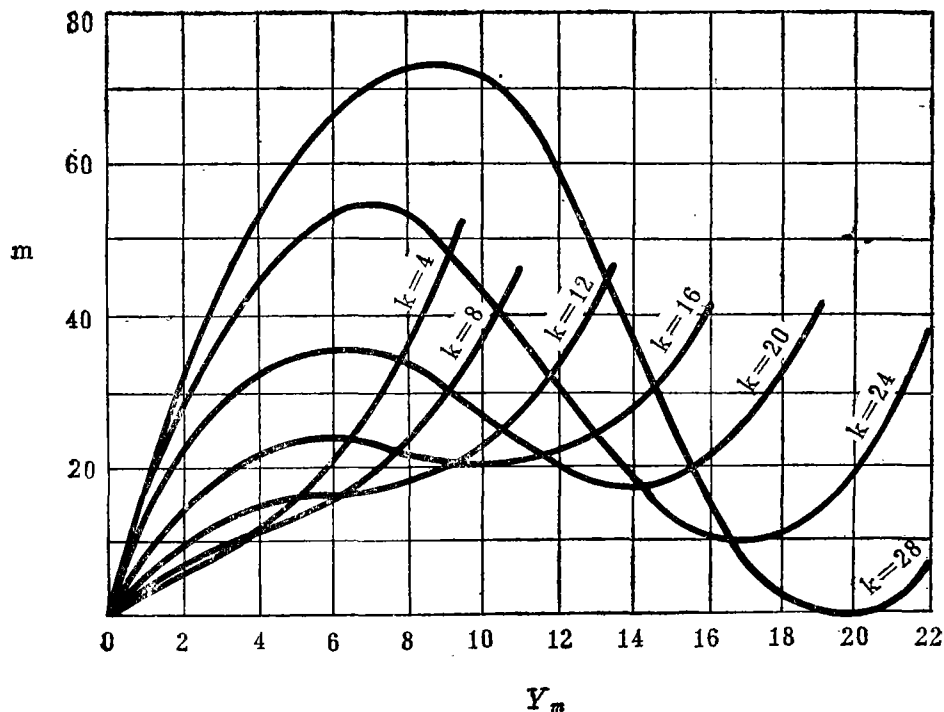


图2 外加折合力矩 $m$ 对中心折合挠度 $Y_m$ 曲线

给定 $k$ 后由此方程即可决定对应 $m_s$ ,  $m_b$ 的 $Y_m^*$ 值,将此 $Y_m^*$ 代入(3.16)或(3.28),即可得出 $m_s$ ,  $m_b$ 。

在二次近似时,方程(3.32)可写成

$$Y_m^{*2} - kY_m^* + \left( \frac{k^2}{6} + \frac{192\mu}{17+5\nu} \right) = 0 \quad (3.33)$$

解之,得

$$Y_m^* = \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2}{3} - \frac{768\mu}{17+5\nu}} \quad (3.34)$$

将此值代入(3.16),即得出 $m_s$ 和 $m_b$

对于三次近似,方程(3.32)可写成:

$$\sum_{i=1}^9 (10-i)\alpha_i Y_m^{*(9-i)} = 0 \quad (3.35)$$

给定  $k$  后将此方程求得的  $Y_m^*$  代入 (3.28), 即可求得  $m_s$  和  $m_b$  值。

在  $\nu=1/3$  时, 方程 (3.35) 可写成

$$\begin{aligned}
 & 4.2087 \cdot 10^{-7} Y_m^{*8} - 1.6835 \cdot 10^{-6} k Y_m^{*7} + (2.7006 k^2 - 418.35) \cdot 10^{-6} Y_m^{*6} - (2.2096 k^3 \\
 & - 1255.05 k) \cdot 10^{-6} Y_m^{*5} + (0.96450 k^4 - 1419.4 k^2 + 6828.7) \cdot 10^{-6} Y_m^{*4} - (0.21044 k^5 \\
 & - 747.05 k^3 + 136.57 k) \cdot 10^{-6} Y_m^{*3} + (0.017536 k^6 - 179.29 k^4 + 8269.7 k^2 \\
 & - 466667 \cdot 10^2) \cdot 10^{-6} Y_m^{*2} + (0.14941 k^5 - 144.10 k^3 + 466667 \cdot 10 k) 10^{-5} Y_m^* \\
 & + (1.2538 \cdot 10^{-6} k^4 - 7.7778 \cdot 10^{-1} k^2 - 64) = 0
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

给以不同的  $k$  值用 (3.34) 求得的  $Y_m^*$  作为初始值, 然后用牛顿法, 即可求得方程 (3.36) 的解, 再代入 (3.28), 即可求出三次近似的  $m_s$  和  $m_b$ , 表 1 列出了  $\nu=1/3$  时对于不同的  $k$  值的二次近似和三次近似的  $m_s$  和  $m_b$  值。为了区别这两种不同的近似, 我们右下标  $s$  和  $b$  后各加 “2” 和 “3”。表中并列  $m_{s2}$ ,  $m_{b2}$  和三次近似值  $m_{s3}$ ,  $m_{b3}$  的绝对误差和相对误差。图 3 表示稳定性曲线, 图中列出了二次近似, 三次近似和海海昌<sup>[1]</sup>的结果以资比较, 图中上下临界载荷相重的点我们称为临界点, 令此点的坐标为  $(k_0, m_0)$ , 其相应的中心挠度为  $Y_m^*$ ,  $k > k_0$ , 壳体才能发生跳跃现象, 在二次近似时,  $k_0$  可由下式求取

表1 当  $\nu=1/3$  时对于不同  $k$  值的  $m_s$  和  $m_b$  值

	$k$	13	14	15	16	17	18
$m_s$	$m_{s2}$	17.362	19.216	21.465	24.06	26.995	30.278
	$m_{s3}$	17.429	19.377	21.696	24.346	27.314	30.593
	绝对误差	0.067	0.161	0.231	0.286	0.319	0.315
	相对误差(%)	0.38	0.83	1.06	1.17	1.17	1.85
$m_b$	$m_{b2}$	17.304	18.117	18.535	18.607	18.338	17.723
	$m_{b3}$	17.238	17.956	18.304	18.320	18.019	17.407
	绝对误差	0.066	0.161	0.231	0.287	0.139	0.316
	相对误差(%)	0.38	0.9	1.26	1.57	1.77	1.82
	$k$	20	22	24	26	28	
$m_s$	$m_{s2}$	37.931	47.136	58.024	70.734	85.408	
	$m_{s3}$	38.049	46.608	56.089	66.249	76.831	
	绝对误差	0.118	0.528	1.935	4.485	8.577	
	相对误差(%)	0.31	1.13	3.45	6.77	11.16	
$m_b$	$m_{b2}$	15.402	11.530	5.9762	-1.404	-10.7412	
	$m_{b3}$	15.283	12.057	7.9085	3.073	-2.1692	
	绝对误差	0.119	0.527	1.9323	4.4734	8.5720	
	相对误差	0.78	4.37	24.43	145.57	395.17	



$$k_0^2 = \sqrt{\frac{2304\mu}{17+5\nu}} \quad (3.37)$$

在 $\nu=1/3$ 时, 我们求得的临界点的坐标 $Y_{m_0}^*$ 为:

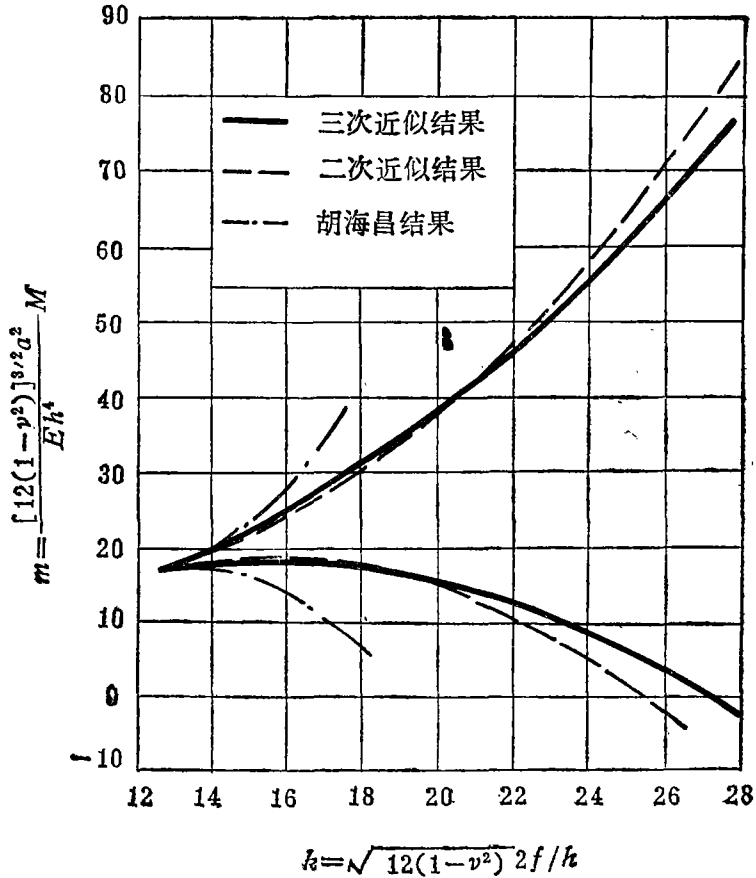


图3 稳定性曲线

$$k_0 = 12.828, \quad m_0 = 17.105, \quad Y_{m_0}^* = 6.4142 \quad (3.38)$$

在三次近似时,  $k_0$  和  $Y_{m_0}^*$  可由下列二个方程联立求出

$$\frac{dm(k_0, Y_{m_0}^*)}{dY_m} = 0, \quad \frac{d^2m(k_0, Y_{m_0}^*)}{dY_m^2} = 0 \quad (3.39)$$

在 $\nu=1/3$ 时, 将 $k=k_0$ ,  $Y_m^*=Y_{m_0}^*$ 代入(3.36)即得(3.39)的第一个方程, (3.39)的第二个方程在此情况为

$$\begin{aligned} & 3.367 \cdot 10^{-8} Y_{m_0}^{*7} - 1.1784 \cdot 10^{-5} k_0 Y_{m_0}^{*6} + (1.16204 k_0^2 - 251.01) \cdot 10^{-5} Y_{m_0}^{*5} \\ & - (1.1048 k_0^3 - 627.52 k_0) \cdot 10^{-5} Y_{m_0}^{*4} + (0.038580 k_0^4 - 56.776 k_0^2 + 273.15) \cdot 10^{-4} Y_{m_0}^{*3} \\ & - (0.0063131 k_0^5 - 22.412 k_0^3 + 409.72 k_0) \cdot 10^{-4} Y_{m_0}^{*2} \\ & + (3.5073 \cdot 10^{-5} k_0^6 - 0.35858 k_0^4 + 16.539 k_0^2 - 9333.3) \cdot 10^{-3} Y_{m_0}^* \end{aligned}$$

$$+(0.14991k_0^5 - 14.41k_0^3 + 46667k_0) \cdot 10^{-4} = 0 \quad (3.40)$$

在 $\nu=1/3$ 时, 方程(3.39)解得的结果为

$$k_0 = 12.626, \quad m_0 = 16.834, \quad Y_{m_0}^* = 6.3129 \quad (3.41)$$

#### 四、在均布边缘力矩作用下弹性圆薄板大挠度问题

如果我们令 $k=0$ , 我们便可以得到边缘简单支承在均布边缘力矩作用下的圆板大挠度问题的解, 这个问题黄择言<sup>[2]</sup>曾研究过。

黄择言所用的无量纲量和我们所有的无量纲量有下列关系(右端是黄择言的无量纲量, 若和我们的符号相同, 便在上面加“-”号, 以资识别)

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{\bar{\rho}}, \quad Y = 2W, \quad m = 4M \\ S &= 4\rho\bar{S}, \quad T = \frac{12a^2(1-\nu^2)}{Eh^3} \rho N_t = 4\rho\bar{T} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中 $N_t$ 为单位长度切向薄膜内力。

当 $k=0$ , 由(3.16)即可得到外加折合力矩与中心挠度的二次近似式

$$m = 2\mu Y_m + \frac{17+5\nu}{288} Y_m^3 \quad (4.2)$$

文献[2]得到的这个关系式为

$$\bar{M} = \mu W_m + \frac{17+5\nu}{144} W_m^3 \quad (4.3)$$

若依(4.1)的关系, 变成我们所有的符号, (4.2)和(4.3)完全相同。

若将(3.28)中的 $k=0$ , 并将(3.29)中的 $\alpha_i(k=0)$ 代入该式, 即得外加折合力矩与中心挠度的三次近似式,

$$m = \frac{\mu}{16} \left( 32 Y_m + \frac{17+5\nu}{18\mu} Y_m^3 - \lambda_3 Y_m^5 + 4\lambda_2 Y_m^7 - 4\lambda_1 Y_m^9 \right) \quad (4.4)$$

显然前面二项是二次近似的结果, 后面的三项是修正项。

在 $\nu=0.3$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} m &= -0.18979 \cdot 10^{-8} Y_m^9 + 0.24664 \cdot 10^{-6} Y_m^7 - 0.54398 \cdot 10^{-4} Y_m^5 \\ &\quad + 0.064236 Y_m^3 + 2.6000 Y_m \end{aligned} \quad (4.5)$$

图4表示 $\nu=0.3$ 时, 中心折合挠度 $Y_m$ 对外加折合力矩 $m$ 的曲线。

现在我们来求应力设计公式。将(3.20)及(3.21)中的 $k=0$ , 并将(3.21)代入(3.20), 我们即得

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{1}{8} \left[ -2Y_m^2(\rho^3 - \rho) + \frac{1}{144} Y_m^4(\rho^7 - 6\rho^6 + 7\rho^5 - 2\rho) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Y_m}{829440} (12\rho^{11} - 108\rho^9 + 340\rho^7 - 420\rho^6 + 245\rho^5 - 69\rho) \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

又由下式可得

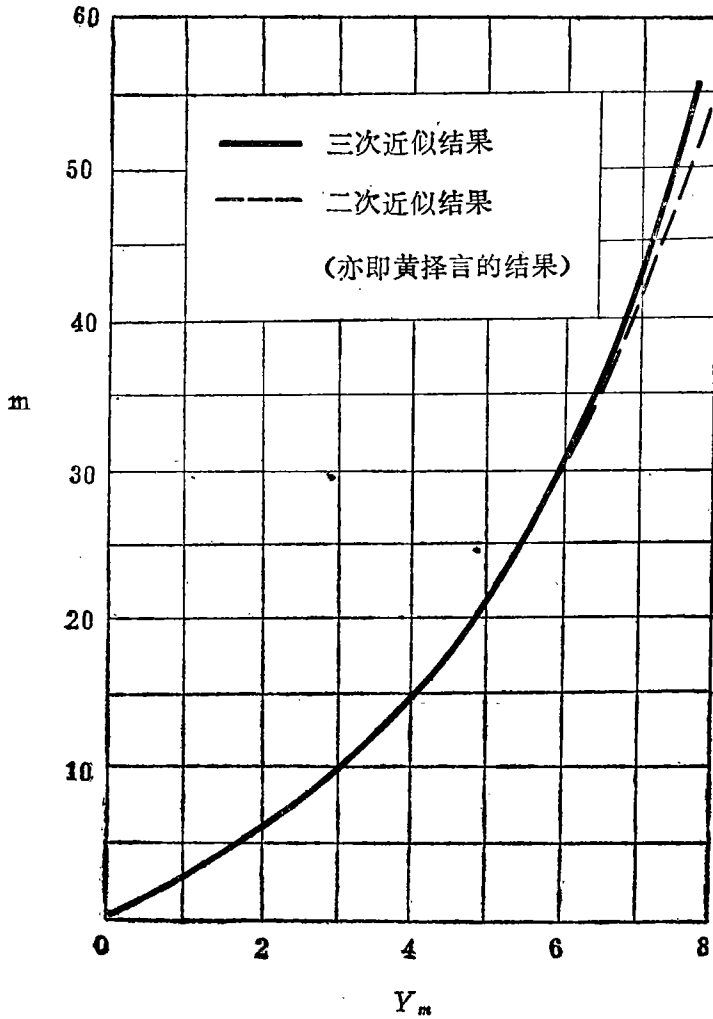


图4 中心折合挠度  $Y_m$  对外加折合力矩  $m$  的曲线 ( $\nu=0.3$ )

$$T_3 = \frac{1}{8} \left[ -2Y_m^2(3\rho^3 - \rho) + \frac{1}{144} Y_m^4 (7\rho^7 - 30\rho^5 + 21\rho^3 - 2\rho) - \frac{Y_m^6}{829440} (132\rho^{11} - 972\rho^9 + 2380\rho^7 - 2100\rho^5 + 735\rho^3 - 69\rho) \right] \quad (4.7)$$

令 (3.21)、(3.23)、(3.24)、(3.25) 中的  $k=0$ , 然后将 (3.21)、(3.23)、(3.25) 中的  $A, C_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  代入 (3.24), 我们即得

$$Y_3 = \sum_{i=1,3,\dots}^9 \xi_i Y_m^i \quad (4.8)$$

其中

$$\xi_1 = 1 - \rho^2$$

$$\xi_3 = \frac{1}{576} (7\rho^2 - 9\rho^4 + 2\rho^6)$$

$$\begin{aligned}\xi_5 &= \frac{1}{2764800} \left( \frac{44+104\nu}{\mu} - \frac{140+160\nu}{\mu} \rho^2 + 825\rho^4 - 650\rho^6 + 225\rho^8 + 24\rho^{10} \right) \\ \xi_7 &= \frac{1}{78033715200} \left( -\frac{87884+27824\nu}{\mu} + \frac{152334+92274\nu}{\mu} \rho^2 \right. \\ &\quad \left. - 153615\rho^4 + 178850\rho^6 - 135975\rho^8 + 56154\rho^{10} - 10584\rho^{12} + 720\rho^{14} \right) \\ \xi_9 &= \frac{1}{134842259865600} \left( \frac{97162+102622\nu}{\mu} - \frac{487914+493374\nu}{\mu} \rho^2 \right. \\ &\quad \left. + 1065015\rho^4 - 1448930\rho^6 + 1426635\rho^8 - 1006362\rho^{10} + 460404\rho^{12} \right. \\ &\quad \left. - 122040\rho^{14} + 17010\rho^{16} - 980\rho^{18} \right) \quad (4.9)\end{aligned}$$

设 $\sigma_r, \sigma_t, \sigma_r', \sigma_t'$ 为径向和切向拉伸应力,  $\sigma_r'', \sigma_t''$ 为径向和切向弯曲应力,  $\sigma_r, \sigma_t$ 为离开中面距离为 $z$ 的径向和切向应力,  $N_r, N_t$ 为径向和切向单位长度薄膜力, 我们有下列关系式

$$\begin{aligned}N_r &= \frac{Eh^3}{12a^2(1-\nu^2)} \frac{S}{\rho} = h\sigma_r' \\ N_t &= \frac{Eh^3}{12a^2(1-\nu^2)} \frac{T}{\rho} = h\sigma_t' \\ M_r &= -D \frac{h}{a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{d^2 Y}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dY}{d\rho} \right) \\ M_t &= -D \frac{h}{a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dY}{d\rho} + \nu \frac{d^2 Y}{d\rho^2} \right) \\ \sigma_r'' &= \mp \frac{Eh}{2a^2(1-\nu^2) \sqrt{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{d^2 Y}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dY}{d\rho} \right) = \pm \frac{6M_r}{h^2} \left( z = \pm \frac{h}{2} \right) \\ \sigma_t'' &= \mp \frac{Eh}{2a^2(1-\nu^2) \sqrt{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dY}{d\rho} + \nu \frac{d^2 Y}{d\rho^2} \right) \\ &= \pm \frac{6M_t}{h^2} \left( z = \pm \frac{h}{2} \right) \quad (4.10)\end{aligned}$$

其中 $M_r, M_t$ 为径向、切向弯矩, 引入新无量纲量:

$$\begin{aligned}\Sigma_r'(\rho) &= \frac{12a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma_r' = \text{折合径向拉伸应力} \\ \Sigma_t'(\rho) &= \frac{12a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma_t' = \text{折合切向拉伸应力} \\ \Sigma_r''(\rho) &= \frac{12a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma_r'' = \text{折合径向弯曲应力} \\ \Sigma_t''(\rho) &= \frac{12a^2(1-\nu^2)}{Eh^2} \sigma_t'' = \text{折合切向弯曲应力} \\ \Sigma_r(\rho) &= \Sigma_r'(\rho) + \Sigma_r''(\rho) = \text{折合径向应力} \\ \Sigma_t(\rho) &= \Sigma_t'(\rho) + \Sigma_t''(\rho) = \text{折合切向应力} \quad (4.11)\end{aligned}$$

则(4.10)可写成

$$\begin{aligned}\Sigma_r'(\rho) &= \frac{S}{\rho} \\ \Sigma_t'(\rho) &= \frac{T}{\rho} \\ \Sigma_r''(\rho) &= \mp \sqrt{\frac{6}{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{d^2 Y}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dY}{d\rho} \right) \begin{array}{l} \text{板的凸面取-号} \\ \text{板的凹面取+号} \end{array} \\ \Sigma_t''(\rho) &= \mp \sqrt{\frac{6}{12(1-\nu^2)}} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dY}{d\rho} + \nu \frac{d^2 Y}{d\rho^2} \right) \begin{array}{l} \text{板的凸面取-号} \\ \text{板的凹面取+号} \end{array} \quad (4-12)\end{aligned}$$

于是, 我们得到如下的结果

在边缘, 即  $\rho=1$  处,

$$\Sigma_r'(1) = S(1) = 0$$

$$\Sigma_t'(1) = T(1) = -\frac{1}{2} Y_m^2 - \frac{1}{288} Y_m^4 - \frac{53}{3317760} Y_m^6$$

$$\Sigma_r''(1) = \mp \sqrt{\frac{3}{3(1-\nu^2)}} \left( -2\mu Y_m - \frac{17+5\nu}{288} Y_m^3 + \frac{7+8\nu}{34560} Y_m^5 \right)$$

$$\Sigma_t''(1) = \mp \sqrt{\frac{3}{3(1-\nu^2)}} \left( -2\mu Y_m - \frac{5+17\nu}{288} Y_m^3 + \frac{17+13\nu}{69120} Y_m^5 \right)$$

$$+ \frac{1001(1-\nu)}{650280960} Y_m^7 + \frac{91(1-\nu)}{1123685498880} Y_m^9$$

$$\Sigma_r(1) = \Sigma_r'(1) + \Sigma_r''(1)$$

$$\Sigma_t(1) = \Sigma_t'(1) + \Sigma_t''(1) \quad (4.13)$$

在中心, 即  $\rho=0$  处,

$$\Sigma_r'(0) = \Sigma_r'(0) = \frac{1}{4} Y_m^2 - \frac{1}{576} Y_m^4 + \frac{23}{2211840} Y_m^6$$

$$\Sigma_r''(0) = \Sigma_r''(0) = \mp \sqrt{\frac{3\mu}{3(1-\nu^2)}} \left( -2Y_m + \frac{7}{288} Y_m^3 \right)$$

$$- \frac{7+8\nu}{69120\mu} Y_m^5 + \frac{25389+15379\nu}{650280960\mu} Y_m^7 - \frac{81319+82229\nu}{1123685498880\mu} Y_m^9$$

$$\Sigma_r(0) = \Sigma_r'(0) + \Sigma_r''(0)$$

$$\Sigma_t(0) = \Sigma_t'(0) + \Sigma_t''(0) \quad (4.14)$$

在  $\nu=0.3$  时, 边缘应力分量是

$$\Sigma_r'(1) = 0$$

$$\Sigma_t'(1) = -0.5Y_m^2 - 0.003472Y_m^4 - 0.00001597Y_m^6$$

$$\Sigma_r''(1) = \pm (4.7208Y_m + 0.1166Y_m^3 - 0.0004938Y_m^5)$$

$$\Sigma_t''(1) = \pm (4.7208Y_m + 0.06368Y_m^3 - 0.0005490Y_m^5)$$

$$- 0.1956 \cdot 10^{-6} Y_m^7 - 0.1092 \cdot 10^{-9} Y_m^9 \quad (4.15)$$

中心的应力分量是:

$$\begin{aligned}
 \Sigma'_i(0) = \Sigma'_r(0) &= 0.2500Y_m^2 - 0.001736Y_m^4 + 0.0000104Y_m^6 \\
 \Sigma''_i(0) = \Sigma''_r(0) &= \pm(4.7208Y_m - 0.05737Y_m^3 + 0.2469 \cdot 10^{-3}Y_m^5 \\
 &\quad - 0.8377 \cdot 10^{-5}Y_m^7 + 0.1712 \cdot 10^{-7}Y_m^9)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

根据(4.15)、(4.16)，我们得出下列应力设计公式：

$$\begin{aligned}
 \Sigma_r(1) &= 4.7208Y_m + 0.1166Y_m^3 - 0.4938 \cdot 10^{-3}Y_m^5 \\
 \Sigma_i(1) &= 4.7208Y_m + 0.5000Y_m^2 + 0.6368 \cdot 10^{-1}Y_m^3 \\
 &\quad + 0.3472 \cdot 10^{-2}Y_m^4 - 0.5490 \cdot 10^{-3}Y_m^5 + 0.1597 \cdot 10^{-4}Y_m^6 \\
 &\quad - 0.1956 \cdot 10^{-5}Y_m^7 - 0.1029 \cdot 10^{-9}Y_m^9 \\
 \Sigma_r(0) = \Sigma_i(0) &= 4.7208Y_m + 0.2500Y_m^2 - 0.5737 \cdot 10^{-1}Y_m^3 - 0.1736 \cdot 10^{-2}Y_m^4 \\
 &\quad + 0.2469 \cdot 10^{-3}Y_m^5 + 0.104 \cdot 10^{-4}Y_m^6 - 0.8377 \cdot 10^{-5}Y_m^7 + 0.1712 \cdot 10^{-7}Y_m^9
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

图5表示当 $\nu=0.3$ 时，中心挠度对折合应力的公式。

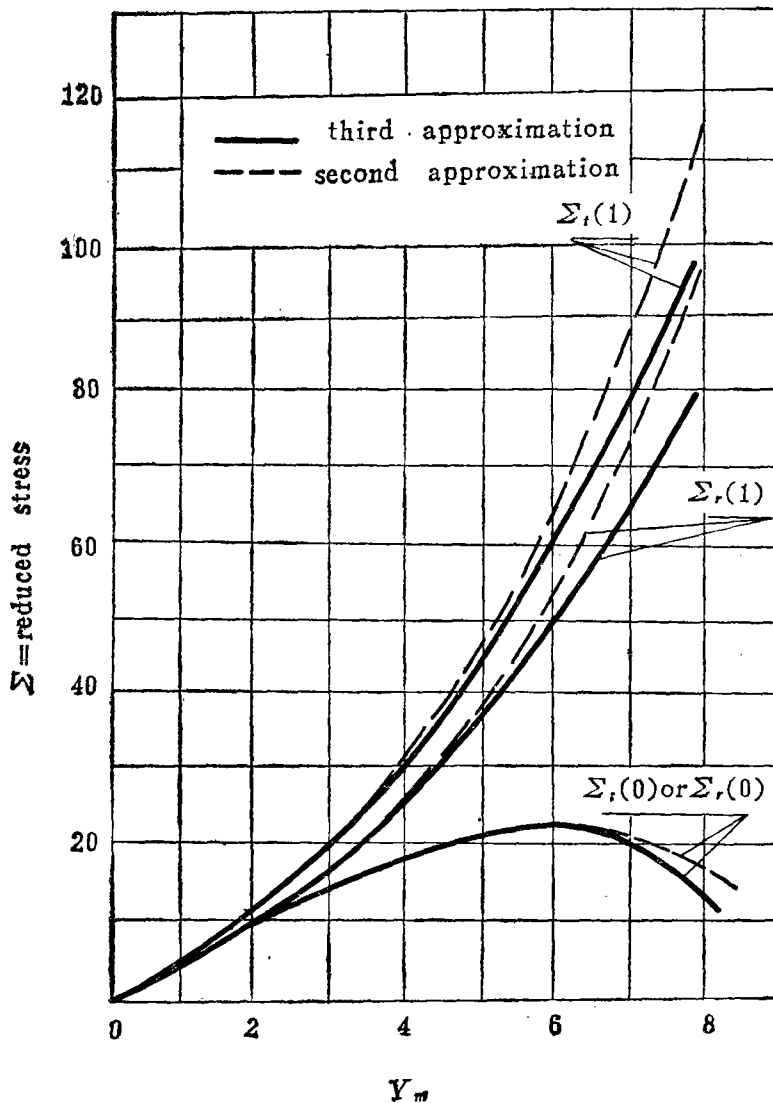


图5 中心挠度对折合应力曲线 ( $\nu=0.3$ )

## 五、讨 论

由图 2 可看出, 我们和胡海昌[1]的结果存在着较大的差别, 由于本问题没有实验资料可资检验, 但对于我们的结果, 可指出下面两点:

- (1) 在  $k=0$  的特殊情况, 我们得到二次近似结果和黄择言<sup>[2]</sup>用摄动法得到的相符;
- (2) 胡海昌在文献[1]中求得精确特解公式(26)、(27)和我们得到的解相符。

由上面两点分析可知, 我们的结果要比文献[1]的结果合理。

如图 6 所示, 由表 1 可给出相对误差与  $k$  的关系曲线, 由图可看出, 当  $k_0 \leq k \leq 22$  时, 相对误差不超过 5%。当  $22 < k \leq 27$  时, 上临界载荷  $m_s$  的相对误差不超过 10%, 而下临界载荷

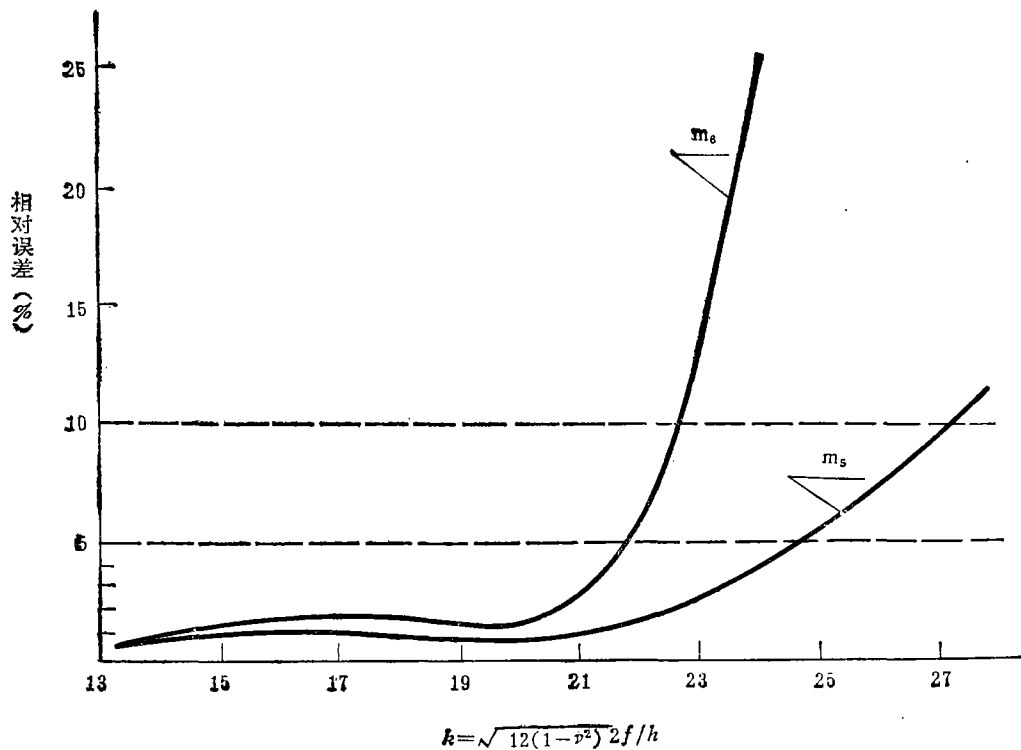


图 6 相对误差与  $k$  的关系曲线

就相差很大了。

图 3 中的临界点, 一般均错误地 (例如[15]) 认为是尖点, 而实质上这一点并不是尖点, 因为它不满足尖点条件, 我们把临界点附近的  $Y_m$  对  $k$  和  $m_s$ ,  $m_b$  对  $k$  的曲线画在图 7 和图 8 中。由图 7 可看出, 临界点附近的  $Y_m-k$  曲线是连续光滑曲线。同时由图 8 可看出, 临界点附近好象不光滑, 但实际上是光滑的。

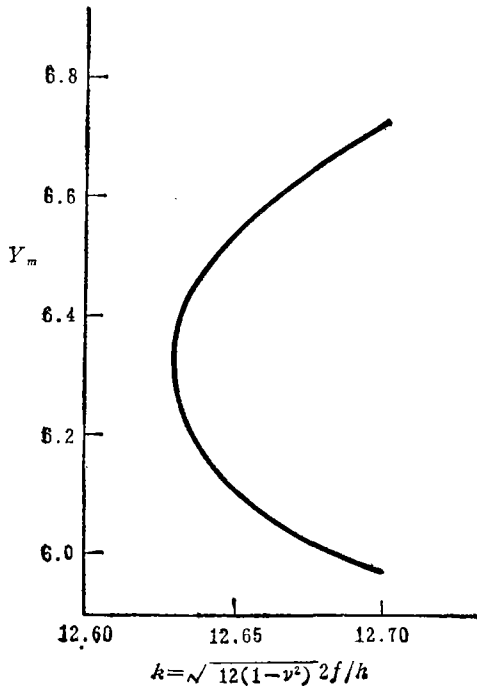


图 7

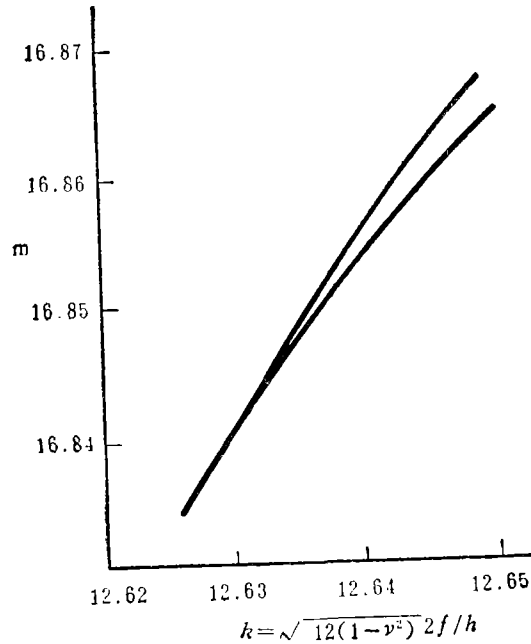


图 8

## 参 考 文 献

1. 胡海昌, 球面扁薄圆壳的跳跃问题, 物理学报, 10, 2 (1954), 105—136; 弹性圆薄板大挠度问题, 力学问题论集第一辑, 乙种, 第一号, 中国科学院出版, (1954), 76—98; *Scientia Sinica* (中国科学) III, 4 (1954), 437—461.
2. 黄择言, 弹性圆薄板在均布边缘力矩作用下的弯曲, 物理学报, 12, 6 (1956), 597—606.
3. Von Kármán, and Tsien Hsue-shen (钱学森), The buckling of spherical shells by external pressure, *J. Aero. Sci.*, 7, (1939), 43.
4. Way, S., Bending of circular plate with large deflection, *A. S. M. E. Transactions, Applied Mech.*, 56, (1934), 627—636.
5. Simons, R. M., A power series solution of the nonlinear equations for axisymmetrical bending of shallow spherical shells, *J. Math. Phys.*, 35, 2 (1956), 164.
6. Reiss, E. L., Greenberg, H. J. and Keller, H. B., Nonlinear deflections of shallow spherical shells, *J. Aero. Sci.*, 24, 7 (1957), 533—543.
7. Weinitzke, H., On the stability problem for shallow spherical shells, *J. Math. Phys.*, XXXV III, 4 (1960), 209—231.
8. Chien Wei-zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2 (1947), 102—113.
9. Kaplan, A., and Fung, Y. C., A nonlinear theory of bending and buckling of thin elastic shallow spherical shells, *NACA TN*, 3213, (1954).
10. Кривошеев, Н. И., Муштари, Х. М., Об изгибе пологого сферического сегмента под действием внешнего нормального Давления. Известия Казанского Филиала Академии Наук СССР, серия физико-Математических и технических наук, №12



- (1958), 69—83.
11. 叶开沅, 刘人怀, 李恩来, 平庆元, 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题, 兰州大学学报, 第二期(总第十八期), (1965), 10—23.
  12. 叶开沅, 刘人怀, 田启文, 党全琦, 圆底扁薄球壳在均布外压强作用下的非线性稳定问题, 未发表.
  13. 刘人怀, 在边缘载荷作用中心开孔圆底扁球壳的轴对称稳定性, 力学, 1977年第3期, 206.
  14. Chien Wei-zang (钱伟长), The intrinsic theory of thin shells and plates, *Quart. Appl. Math.*, 1, (1944), 297—327; 2, (1944), 43—59, 120—135.
  15. Феодосьев, В. И., 精密仪器弹性元件的理论及计算, 科学出版社, (1963), 280
  16. 叶开沅, 刘人怀, 张传智, 徐一帆, 圆底扁薄球壳的非线性稳定问题 I. 圆底扁薄球壳在边缘力矩作用下的非线性稳定问题, 科学通报, 1965年2月号, 145—147.

## Nonlinear Stability of Thin Elastic Circular Shallow Spherical Shell under the Action of Uniform Edge Moment

Yeh Kai-yuan Liu Zen-huai Chang Chuan-dzi Shue Ih-fan  
(Lanchow University)

### Abstract

In 1939, the importance of the nonlinear feature in the shell buckling problem was first pointed out in a most spectacular manner by von Kármán and Tsien, but the mathematical difficulty is so great that progress has been slow after the first attempts. According to our experience, we should face the difficult barrier of solving nonlinear differential equations and an effective, simple, accurate method is required. On the other hand, modern rapid developments in technics, such as aeronautical, naval, structure, precise instrument manufacturing and automatic control engineering require keenly these problems to have accurate, reliable theory results for direct design use. With such background, we suggest the modified iteration method and have worked out four cases for the purpose of certaining it. This is the one, in which nonlinear stability of thin elastic circular shallow spherical shell under the action of uniform edge moment are considered. As a special case, we also investigate large deflection of circular plate under the same load.

All these results are presented in such a form that the direct application in design is possible. Results are also compared with Hu Hai-chang's<sup>(1)</sup> and Huang Tse-yen's<sup>(2)</sup>.