应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

与夹层梁稳定性相联系的一个本征值问题

胡海昌 （北京中国空间技术研究院卫星总体部）

（1979年10月收到）

摘　　要

本文指出了与夹层梁稳定性相联系的本征值问题的几个特点，并说明了本征函数的一些应用。

一、引　　言

本征值问题是力学中经常碰到的问题。本征值理论已是一个比较成熟的理论，但是与夹层梁的稳定性相联系的本征值问题却有一些不平常的特点，这主要是在这个本征值问题中，本征值虽也有无穷多个，但却有一个上限，这在别的本征值问题中是少见的，本文充分说明了这个特点，证明了任意函数对本征函数的展开式，并说明了展开的一些应用。

二、关于临界载荷的本征值问题

考虑一个等剖面的夹层梁，在轴向压力作用下的本征值问题。在专著[1]中有夹层板（包括梁）的平衡、稳定和振动的微分方程。本文如无特别说明，一概采用专著[1]的记号，梁的挠度 w 和转角 ψ 应满足下列方程

$$
\begin{aligned}
&D\psi''+C(w'-\psi)=0\\
&C(w''-\psi')-Pw''=0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

关于梁的支承情况，考虑固支与简支两种，相应的边界条件是

$$
\left.\begin{aligned}
&\text{在固支端上：}\ w=0\qquad \psi=0\\
&\text{在简支端上：}\ w=0
\end{aligned}\right\}\tag{2.2a}
$$

$$
\psi'=0 \tag{2.2b}
$$

(2.2a)是关于位移的边界条件，(2.2b)是关于力的边界条件，从力学性质上看，两者是不相同的。

方程（2.1）、（2.2）定义了一个微分方程的本征值问题。最小的本征值 P_1 便是临界载荷 P_{cr}。

为了探讨上述本征值问题的许多特性，先把它转化为泛函的驻立值问题是有利的。不难证明，所需的泛函的驻立值问题便是

$$
P=\min_{\psi}\ \mathop{st}_{w}\ \frac{\int_0^l\left[D\psi'^2+C(w'-\psi)^2\right]dx}{\int_0^l w'^2dx}\tag{2.3}
$$

这里的自变函数 w 和 ψ，应满足位移边界条件(2.2a)。

将本征值及相应的本征函数按本征值从小到大的顺序进行编号。第 i 个本征值记为 P_i，相应的本征函数记为 w_i，ψ_i。在本征函数中有一个常倍数可以随意选定，为了确定起见，本文采用下列归一化条件

$$\int_0^l w_i'^2 dx = \frac{1}{l} \tag{2.4}$$

这样便有

$$P_i = l\int_0^l [D\psi_i'^2 + C(w_i' - \psi_i)^2] dx \tag{2.5}$$

P_1既是最小的本征值，则有

$$P_{cr} = P_1 = \min \frac{\int_0^l [D\psi'^2 + C(w' - \psi)^2] dx}{\int_0^l w'^2 dx} \tag{2.6}$$

方程（2.1），（2.2）或变分式（2.3）定义的本征值，虽然也有无穷多个，但本征值趋于一个极限，而不像力学中的其它本征值那样，本征值无限增大。从变分式（2.3）出发，不难证明这个特点。在公式（2.3）中命 $w=w_i$，注意到归一化条件（2.4），便有

$$P_i = \min_{\psi} l \int_0^l [D\psi'^2 + C(w' - \psi)^2] dx \tag{2.8}$$

再在这个公式中取

$$\psi = 0 \tag{2.9}$$

便有

$$P_i \leqslant lC\int_0^l w_i'^2 dx = C \tag{2.10}$$

可见，剪切刚度 C 是本征值的上限。事实上 C 是本征值的上确界。这是因为当 i 很大时，w_i 和 ψ_i 都是波长很短的波浪形函数。命波长的量级为 λ，则由方程（2.1）的第一个可知，w_i 和 ψ_i 的量级之间存在下列关系：

$$\frac{\psi_i}{\lambda^2} \approx \frac{w_i}{\lambda}, \text{ 即 } \psi_i \approx \lambda w_i \tag{2.11}$$

可见，当波长很短时，ψ_i 的确很小，而以（2.9）为极限。

下面再来证明本征函数的正交关系：当 $i \neq j$ 时，

$$\int_0^l w_i' w_j' dx = 0 \tag{2.12a}$$

$$\int_0^l [D\psi_i'\psi_j' + C(w_i' - \psi_i)(w_j' - \psi_j)] dx = 0 \tag{2.12b}$$

证明正交关系，可以从微分方程出发，也可以从变分式出发，但从变分式出发比较简单明了，并且易于推广到其它更复杂的问题。

设想取

$$w = \xi_i w_i + \xi_j w_j, \qquad \psi = \xi_i \psi_i + \xi_j \psi_j \tag{2.13}$$

而用瑞利—里兹—铁木辛柯法求待定系数 ξ_i，ξ_j。将（2.13）代入变分式（2.3），注意到等式（2.4），（2.5），便有

$$P = st \frac{P_i \xi_i^2 + 2K_{ij}\xi_i\xi_j + P_j \xi_j^2}{\xi_i^2 + 2G_{ij}\xi_i\xi_j + \xi_j^2} \tag{2.14}$$

其中

$$K_{ij}=l\int_0^l[D\psi_i'\psi_j'+C(w_i'-\psi_i)(w_j'-\psi_j)]dx$$

$$G_{ij}=l\int_0^l w_i'w_j'dx \tag{2.15}$$

将（2.14）化为代数本征值问题，得到

$$(P_i-P)\xi_i+(K_{ij}-PG_{ij})\xi_j=0$$

$$(K_{ij}-PG_{ij})\xi_i+(P_j-P)\xi_j=0 \tag{2.16}$$

按定义，这组齐次代数方程的两组解是

$$P=P_i,\ \xi_i=1,\ \xi_j=0$$

$$P=P_j,\ \xi_i=0,\ \xi_j=1 \tag{2.18}$$

将此代入（2.16），得到

$$K_{ij}-P_iG_{ij}=0,\ K_{ij}-P_jG_{ij}=0$$

因为$P_i\neq P_j$，从上式得：

$$K_{ij}=0,\qquad G_{ij}=0 \tag{2.19}$$

这就是正交关系（2.12）.

利用正交关系，可以把第一个以后的其他的本征值表达为泛函的条件极小值。例如，对于第 n 个本征值 P_n，有

$$P_n=\min\frac{\int_0^l[D\psi'^2+C(w'-\psi)^2]dx}{\int_0^l w'^2dx} \tag{2.20}$$

这里的自变函数 w 和 ψ，除需满足位移边界条件（2.2a）外，还需满足正交条件

$$\int_0^l w'w_i'dx=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ (n-1) \tag{2.21}$$

条件（2.21）排除了前（$n-1$）个本征值，因此剩下的就算 P_n 是最小的本征值了，因此原来的 st 可改为 min。

三、任意函数对本征函数的展开

在一般的本征函数理论中，任意一组函数可以对本征函数组展开。但是在本问题中，任意两个函数 w 和 ψ 不能同时对本征函数 w_i 和 ψ_i 展开，而只能是一个任意函数 w 对 w_i 展开，这又是本问题的一个特点。

设函数 $w(x)$满足与本征函数w_i相同的位移边界条件，对 x 连续可导，并且 w' 只在有限个点上不连续，这样的一个函数 $w(x)$，可以对本征函数w_i展开如下：

$$w=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i w_i \tag{3.1}$$

式中 ξ_i 为适当的常数系数。如果承认（3.1）能够成立，那末求 ξ_i 的问题并不难，利用正交关系（2.12a）便可以了。先求（3.1）的导数

$$w'=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i w_i' \tag{3.2}$$

用 w_n' 乘上式，然后对 x 积分，根据正交关系（2.12a）和归一化条件（2.4），便可求得

$$\xi_n = l\int_0^l w_n' w' dx \tag{3.3}$$

为了证明级数（3.1）的收敛性，命

$$R_n = w - \sum_{i=1}^{n} \xi_i w_i \tag{3.4}$$

然后证明

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{3.5}$$

如果上式确实成立，那末级数（3.1）也就收敛了。为此先根据下列方程和边界条件求一个函数 ψ，以便和 w 配成一对：

$$D\psi'' + C(w' - \psi) = 0 \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\text{在固支端上：} \psi = 0 \\ &\text{在简支端上：} \psi' = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

这样定义的 ψ 是唯一的。求得 ψ 后再作一个函数 S_n 如下：

$$S_n = \psi - \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i \tag{3.8}$$

函数 S_n 满足下列方程和边界条件：

$$DS_n'' + C(R_n' - S_n) = 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} &\text{在固支端上：} \quad S_n = 0 \\ &\text{在简支端上：} \quad S_n' = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

函数 S_n 正好与 R_n 配成一对。用 S_n 乘方程(3.9)，然后对 x 积分，利用分部积分和边界条件(3.10)后，得到

$$\int_0^l C(R_n' - S_n) S_n dx = -\int_0^l DS_n S_n'' dx = \int_0^l DS_n'^2 dx$$

即有

$$\int_0^l CS_n R_n' dx = \int_0^l DS_n'^2 dx + \int_0^l CS_n^2 dx \tag{3.11}$$

另根据定义(3.4)可证明 R_n 与 $w_i (i=1,2,\cdots,n)$ 正交，

即
$$\int_0^l R_n' w_i' dx = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.12}$$

因此若在变分式(2.20)右端取 $w=R_n$，$\psi=S_n$，给出不比 P_{n+1} 小的一个值，即

$$P_{n+1} \leqslant \frac{\int_0^l [DS_n'^2 + C(R_n' - S_n)^2] dx}{\int_0^l R_n'^2 dx} \tag{3.13}$$

利用(3.11)后此式化为

$$P_{n+1}\leqslant C-\frac{\int_0^l (DS_n'^2+CS_n^2)dx}{\int_0^l R_n'^2 dx} \tag{3.14}$$

即

$$\int_0^l (DS_n'^2+CS_n^2)dx\leqslant(C-P_{n+1})\int_0^l R_n'^2 dx. \tag{3.15}$$

最后再从定义(3.4)有

$$\int_0^l R_n'^2 dx=\int_0^l w'^2 dx-\frac{1}{l}\sum_{i=1}^n \xi_i^2\leqslant\int_0^l w'^2 dx \tag{3.16}$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l (DS_n'^2+CS_n^2)dx=\lim_{n\to\infty}(C-P_{n+1})\int_0^l w'^2 dx=0 \tag{3.17}$$

由于上式左端的两项都不可能小于零，所以有

$$\lim_{n\to\infty} S_n=0 \tag{3.18}$$

于是再从微分方程(3.9)得到

$$\lim_{n\to\infty} R_n'=0 \tag{3.19}$$

由于 w，因而 R_n 在梁的两端等于零，因此从上式即有

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0$$

到此收敛性证毕。

四、用迭代法求临界载荷

用迭代法求最小的本征值是常用的方法。在本问题中，普通的迭代法如下：
先选取一个适当的 $w^{(1)}$，然后按下列方程和边界条件求一组改进的 $w^{(2)}$，$\psi^{(2)}$ 和临界载荷的近似值 $P^{(2)}$：

$$\left.\begin{aligned}&D\psi^{(2)\prime\prime}+C(w^{(2)\prime}-\psi^{(2)})=0\\&C(w^{(2)\prime\prime}-\psi^{(2)\prime})=P^{(2)}w^{(1)\prime\prime}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{在固支端上：}\ w^{(2)}=0,\ \psi^{(2)}=0\\&\text{在简支端上：}\ w^{(2)}=0,\ \psi^{(2)\prime}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

$$l\int_0^l w^{(2)\prime 2}dx=1 \tag{4.3}$$

如果将 $w^{(1)}$ 对本征函数 w_i 展开：

$$w^{(1)}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i w_i \tag{4.4}$$

那末经过一次迭代后得到

$$w^{(2)}=P^{(2)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{P_i}w_i \tag{4.5}$$

由于 P_i 随 i 的增加而增加，所以 $w^{(2)}$ 比 $w^{(1)}$ 更接近于 w_1，此即表明上述迭代法是收敛的。

根据夹层梁稳定问题的特点，上述迭代法还可以加以改进以加快收敛速度。从 $w^{(1)}$，$w^{(2)}$ 再作一个函数 $w^{(3)}$ 如下：

$$w^{(3)}=w^{(2)}-\frac{P^{(2)}}{C}w^{(1)}=P^{(2)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\xi_i}{P_i}\left(1-\frac{P_i}{C}\right)w_i \tag{4.6}$$

求 $w^{(3)}$ 不需多大的工作量，但因为 $(1-P_i/C)$ 随着 i 的增加而趋近于零，所以 $w^{(3)}$ 又比 $w^{(2)}$ 更接近 w_1。在下次迭代时，可以拿 $w^{(3)}$ 作为新的出发点。

五、用本征函数的级数解平衡问题

考虑一个等剖面的夹层梁在轴向拉力 N 和横向分布载荷 $q(x)$ 联合作用下的平衡问题。梁的挠度 w 和转角 ψ 满足下列方程

$$D\psi''+C(w'-\psi)=0 \tag{5.1}$$

$$C(w''-\psi')+Nw''=-q \tag{5.2}$$

梁的支承情况仍考虑固支与简支两种，因而有边界条件

$$\begin{aligned}&\text{在固支端上：}\quad w=0,\ \psi=0\\&\text{在简支端上：}\quad w=0,\ \psi'=0\end{aligned} \tag{5.3}$$

这个问题的解可以展开成第二节定义的本征函数的级数：

$$\begin{pmatrix} w \\ \psi \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\begin{pmatrix} w_i \\ \psi_i \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

不论 ξ_i 等于何值，算式(5.4)已满足了方程(5.1)。这也就表明，本征函数的展开式(5.4)只能用于方程(5.1)右端等于零的情况，而不能用于不等于零的情况。这一点也与其他许多本征函数不一样。为了确定 ξ_i 的值，适宜用变分原理。与(5.1)～(5.3)等价的最小势能原理是

$$\delta\pi=0 \tag{5.5}$$

其中

$$\pi=\int_0^l\left[\frac{D}{2}\psi'^2+\frac{C}{2}(w'-\psi)^2+\frac{N}{2}w'^2-qw\right]dx \tag{5.6}$$

将算式(5.4)代入(5.6)，算出积分，得到

$$\pi=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(N+P_i)\xi_i^2-q_i\xi_i\right] \tag{5.7}$$

其中

$$q_i=\frac{1}{l}\int_0^l qw_i dx \tag{5.8}$$

将(5.7)代入(5.5)便得到 ξ_i 的方程，由此可解得

$$\xi_i=\frac{q_i}{N+P_i} \tag{5.9}$$

将此代入(5.4)，便得到 w 与 ψ 的算式

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i}{N+P_i}\begin{bmatrix} w_i \\ \psi_i \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

算式(5.10)还可用于定跨度的夹层梁的平衡问题。对于定跨度的梁，轴向拉力N是未知常数，它应由下列条件决定：

$$N=\frac{B}{2l}\int_0^l w'^2 dx \tag{5.11}$$

这里 B 是梁的拉压刚度，将算式(5.10)代入(5.11)，便得到关于N的一个超越方程

$$N=\frac{B}{2l^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i^2}{(N+P_i)^2} \tag{5.12}$$

在专著[1]中讨论过定跨度的简支和固支夹层梁的弯曲问题，本节的方法可以说是专著[1]中的方法的推广。

参 考 文 献

1. 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组著：夹层板壳的弯曲、稳定与振动。科学出版社出版，(1977).

On An Eigenvalue Problem Related to the Buckling of Sandwich Beams

Hu Hai-chang

(Institute of Space Craft System Engineering, Chinese Academy of Space Technology, Peking.)

Abstract

This paper gives various properties of eigen-value problems related to the buckling of sandwich beams. The applications of eigen-functions are also indicated.