应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

非线性弹性理论变分原理的统一理论

郭仲衡（北京大学数学系）

（1979年7月30日收到）

摘　　要

本文旨在介绍和讨论非线性弹性理论的几个主要变分原理——古典的势能原理，余能原理以及目前争论甚多的另两个余能原理（Levinson原理和Fraeijs de Veubeke原理），同时给出了和这些原理相对应的广义变分原理。本文单一地从虚功原理出发，系统推导并严格论证了这些原理，并且指出了各原理间的内在联系。出发点是一个，采取不同的变量和Legendre变换就导致不同的原理。这样，各变分原理在统一的框架里构成一个有机的整体。文中未涉及的其它原理也同样可以纳入这框架。给出的关系图使读者更能看清各原理间的纵横关系。

一、引　　言注1）

在非线性弹性理论里，是否存在象线性理论那样应力场是唯一独立变量的余能原理，是一个近年来引起广泛兴趣的问题。讨论的焦点在于Piola应力张量和变形梯度的关系是否可逆，亦即相应的Legendre变换[1，2]是否成立。至今被提出的非线性弹性变分理论的余能原理可概括为三大类。首先是基于Kirchhoff应力张量的Reissner原理[3—7]，它常被认为不是纯粹的余能原理，因为这里除了应力张量，位移向量也是独立变量。其后是仅基于Piola应力张量τ，一度被宣称为真正余能原理的Levinson原理[8—17]。可是，这原理并不总是成立的，因为，即使是各向同性的简单情形，也只有当$\tau^* \cdot \tau$注2）在物体的每一点有不相同的主值（难于预先知道这条件是否满足）时，Piola应力张量和变形梯度的函数关系才是可逆的。尽管[16]给出了选择合适分支的条件，该函数的逆在整体意义下的多值性（对各向同性体至少有四个不同分支）也给实际应用带来附加困难。总是成立的却是基于极分解的Fraeijs de Veubeke原理[12—17]。但这里除了Piola应力张量，转动张量也作为独立变量出现，又没有达到人们所期待的余能原理的纯粹性。看来，问题是否这样提法以及余能原理的其他一些问题还有待于进一步的深究。

本文的目的在于证明，非线性弹性的各变分原理（势能原理和各余能原理以及它们的推广）均可从单一的虚功原理导出，使它们在统一的框架里构成一个有机的整体。文中也给出

注1）本文是作者在德国鲁尔大学（Ruhr-Universität）期间完成的。作者对德国洪堡基金会（ALexander von Humboldt-Stiftung），鲁尔大学和Th. Lehmann教授的热情接待表示谢意。

注2）“*”表示张量的共轭。

了各原理间的内在联系及其关系图。

二、数　学　符　号

本工作采用两点张量场法 [18, 19]。设物体$\mathscr{B}$的参考（未变形）构型为$\mathscr{R}$，当前（已变形）构型为$\mathscr{r}$，分别配以两个任意的曲线坐标系$\{X^{A}\}$和$\{x^{i}\}$。它们的基向量和度量张量相应地为

$$\mathbf{G}_{A},\ \mathbf{G}^{A},\ G_{AB},\ G^{AB}$$

$$\mathbf{g}_{i},\ \mathbf{g}^{i},\ g_{ij},\ g^{ij}$$

物体从$\mathscr{R}$至$\mathscr{r}$的变形体现为

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad \text{或} \quad x^{i}=x^{i}(X^{A}) \tag{2.1}$$

它表示物体$\mathscr{B}$的质点$\mathbf{X}$变形后占有空间位置$\mathbf{x}$。

作用于$\mathbf{X}$点的所有向量构成三维欧氏空间，不妨也记为$\mathscr{R}$，它的任意元素均可表为$\mathbf{G}_{A}$或$\mathbf{G}^{A}$的线性组合，例如$\mathbf{V}=V^{A}\mathbf{G}_{A}=V_{A}\mathbf{G}^{A}$。类似地有$\mathscr{r}$，例如$\mathbf{v}=v^{i}\mathbf{g}_{i}=v_{i}\mathbf{g}^{i}$。又考虑四个张量积空间：$\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}$，$\mathscr{R}\otimes\mathscr{r}$，$\mathscr{r}\otimes\mathscr{R}$和$\mathscr{r}\otimes\mathscr{r}$，它们的任意元素分别可表成$\mathbf{G}_{A}\otimes\mathbf{G}_{B}$，$\mathbf{G}_{A}\otimes\mathbf{g}_{i}$，$\mathbf{g}_{i}\otimes\mathbf{G}_{A}$和$\mathbf{g}_{i}\otimes\mathbf{g}_{j}$(也可代入以逆变基向量。今后我们省去张量积符号而用 Gibbs 并矢记法）的线性组合，记为，例如

$$\mathbf{R}=R^{AB}\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}_{B},\ \mathbf{S}=S^{Ai}\mathbf{G}_{A}\mathbf{g}_{i}$$

$$\mathbf{T}=T^{iA}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}_{A},\ \mathbf{U}=U^{ij}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}_{j}$$

通过点积运算，张量积（9 维）空间的元素变成从 3 维空间到 3 维空间的线性变换（或叫张量），例如

$$\mathbf{W}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{V}=(R^{AB}\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}_{B})\cdot(V_{D}\mathbf{G}^{D})=R^{AB}V_{B}\mathbf{G}_{A}=W^{A}\mathbf{G}_{A}$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{V}=(T^{iA}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}_{A})\cdot(V_{B}\mathbf{G}^{B})=T^{iA}V_{A}\mathbf{g}_{i}=w^{i}\mathbf{g}_{i}$$

$\mathscr{R}\otimes\mathscr{r}$或$\mathscr{r}\otimes\mathscr{R}$的元素，例如$\mathbf{S}$和$\mathbf{T}$，称为两点张量。并矢的次序是本质的。“$*$”表示张量的共轭：$\mathbf{R}^{*}=R^{AB}\mathbf{G}_{B}\mathbf{G}_{A}$，$\mathbf{T}^{*}=T^{iA}\mathbf{G}_{A}\mathbf{g}_{i}$。$\mathscr{R}\otimes\mathscr{R}$和$\mathscr{r}\otimes\mathscr{r}$的单位元素（单位张量）是

$$\overset{\ll}{\mathbf{I}}=G_{AB}\mathbf{G}^{A}\mathbf{G}^{B}=\delta^{A}_{B}\mathbf{G}_{A}\mathbf{G}^{B}=\cdots$$

$$\overset{\gg}{\mathbf{I}}=g_{ij}\mathbf{g}^{i}\mathbf{g}^{j}=\delta^{i}_{j}\mathbf{g}_{i}\mathbf{g}^{j}=\cdots$$

而$\mathscr{R}\otimes\mathscr{r}$和$\mathscr{r}\otimes\mathscr{R}$的单位元素（称为转移张量）是

$$\overset{<>}{\mathbf{I}}=g_{A}^{\cdot\,i}\mathbf{G}^{A}\mathbf{g}_{i}=g_{Ai}\mathbf{G}^{A}\mathbf{g}^{i}=\cdots$$

$$\overset{><}{\mathbf{I}}=g_{i}^{\cdot\,A}\mathbf{g}^{i}\mathbf{G}_{A}=g^{iA}\mathbf{g}_{i}\mathbf{G}_{A}=\cdots$$

转移张量的几何意义是将$\mathscr{r}$或$\mathscr{R}$的向量不变地平移至$\mathscr{R}$或$\mathscr{r}$，其中$g_{A}^{\cdot\,i}=\mathbf{G}_{A}\cdot\mathbf{g}^{i}=\mathbf{g}^{i}\cdot\mathbf{G}_{A}=g^{i}_{\cdot\,A}$，故可统一记为$g^{i}_{A}$，$g^{A}_{i}$亦然。利用转移张量可将两点张量化成一点张量，或反之。如果在张量的基向量并矢间用点积代替张量积，就得该张量的迹，如

$$tr\mathbf{R}\overset{df}{=}R^{AB}\mathbf{G}_{A}\cdot\mathbf{G}_{B}=R^{A}_{\cdot\,A}$$

$$tr\mathbf{S}\overset{df}{=}S^{A}_{\cdot\,i}\mathbf{G}_{A}\cdot\mathbf{g}^{i}=g^{i}_{A}S^{A}_{\cdot\,i}$$

张量的迹是标量，两张量的双点积也是标量：

$$\mathbf{R}:\mathbf{S}\overset{df}{=}tr(\mathbf{R}^{*}\cdot\mathbf{S})$$

张量场$\mathbf{R}$和$\mathbf{U}$的绝对微分是

$$d\mathbf{R}=(\mathbf{R}\nabla)\cdot d\mathbf{X}$$
$$d\mathbf{U}=(\mathbf{U}\overset{\circ}{\nabla})\cdot d\mathbf{x}$$

其中绝对微商（梯度）

$$\mathbf{R}\nabla=R^{BC}{}_{;A}\mathbf{G}_B\mathbf{G}_C\mathbf{G}^A$$
$$\mathbf{U}\overset{\circ}{\nabla}=U^{jk}{}_{;i}\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}^i$$

$(\ )_{;A}$和$(\ )_{;i}$分别表示在$\mathscr{R}$和$\imath$的协变微商。对于两点张量场，绝对微商应理解为全绝对微商。

$$\mathbf{R}\cdot\nabla=R^{BC}{}_{;A}\mathbf{G}_B\mathbf{G}_C\cdot\mathbf{G}^A=R^{BA}{}_{;A}\mathbf{G}_B$$
$$\mathbf{R}\times\nabla=R^{BC}{}_{;A}\mathbf{G}_B\mathbf{G}_C\times\mathbf{G}^A$$

分别称为**R**的散度和旋度。单位张量和转移张量对于绝对微商有如常量。在今后的全部讨论里，我们认为所有出现各量已通过转移张量预先化成在$\mathscr{R}$的一点张量，这时用I表示$\overset{\ll}{\mathrm{I}}$。这种做法称为 Lagrange 描述法。

三、应　变　和　应　力

在变形(2.1)中，物体质点**X**的位移向量为

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\mathbf{x}(\mathbf{X})-\mathbf{X} \tag{3.1}$$

变形梯度

$$\mathbf{F}=\mathbf{x}\nabla=\mathrm{I}+\mathbf{u}\nabla \tag{3.2}$$

的极分解为

$$\mathbf{F}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U} \tag{3.3}$$

其中**U**是（右）伸长张量，代表纯变形，**R**是转动张量($\mathbf{R}^*\cdot\mathbf{R}=\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^*=\mathrm{I}$)。**U**是唯一确定的正定对称张量（它的主值全＞0），满足

$$\mathbf{U}^2=\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F}\overset{def}{=}\mathbf{C} \tag{3.4}$$

C称为Green应变张量。今后还用到Almansi应变张量：

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\mathbf{C}-\mathrm{I})=\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)] \tag{3.5}$$

其中$\nabla\mathbf{u}=(\mathbf{u}\nabla)^*$

具有描述应力状态直接物理意义的是 Cauchy 应力张量 **t**，它作用于构型$\imath$上的单位向量**n**给出以**n**为法向的单位面积元的接触力$\mathbf{t}_n$：

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}_n \tag{3.6}$$

t满足Cauchy（力）平衡方程（为叙述简单计，设无体力）：

$$\mathbf{t}\cdot\overset{\circ}{\nabla}=0 \tag{3.7}$$

及力矩平衡条件：

$$\mathbf{t}=\mathbf{t}^* \tag{3.8}$$

即**t**是对称张量。平衡方程(3.7)是Euler型的。为了得到Lagrange型平衡方程，人们引进了Piola应力张量$\boldsymbol{\tau}$和Kirchhoff应力张量**T**：

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}=\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})=\sigma_n\mathbf{t}_n=\mathbf{T}_\mathrm{N} \tag{3.9}$$

其物理意义是：$\boldsymbol{\tau}$作用于参考构型$\mathscr{R}$上面积元的单位法向量 **N** 给出相对应的以 **n** 为法向但面积为σ_n的面积元上的接触力$\mathbf{T}_\mathrm{N}$（σ_n是面积元变形后和变形前的面积比），而**T**作用于**N**后还

要经过变形梯度的作用才给出上述接触力。这三个应力张量的相互关系是：

$$\tau = J\mathbf{t}\cdot \overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{T} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{T} = \overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\tau = J\overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{t}\cdot\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*} \tag{3.11}$$

$$\mathbf{t} = j\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{F}^{*} = j\tau\cdot\mathbf{F}^{*} \tag{3.12}$$

其中(-1)表示逆，j是体积元变形前后的容积比，而$J=1/j$。Piola张量 τ 满足Boussinesq（力）平衡方程：

$$\tau\cdot\nabla = 0 \tag{3.13}$$

Kirchhoff张量$\mathbf{T}$满足Kirchhoff（力）平衡方程：

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla = 0 \tag{3.14}$$

从(3.12)可看到，当$\mathbf{T}$是对称张量时，力矩平衡条件自然满足，而对τ的力矩平衡条件是

$$\tau\cdot\mathbf{F}^{*} = \mathbf{F}\cdot\tau^{*} \tag{3.15}$$

今后认为，$\mathbf{t}$ 和 $\mathbf{T}$ 都是对称张量。此外，下节将论及，从功的角度还引进了对余能原理起重要作用的 Jaumann 应力张量 $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{T}) \tag{3.16}$$

将

$$\mathbf{T} = \overset{-1}{\mathbf{F}}\cdot\tau = \overset{-1}{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{R}^{*}\cdot\tau = \tau^{*}\cdot\mathbf{R}\cdot\overset{-1}{\mathbf{U}}$$

代入上式，又得Jaumann张量的另一表达式

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\tau^{*}\cdot\mathbf{R}+\mathbf{R}^{*}\cdot\tau) \tag{3.17}$$

四、共轭变量和Legendre变换

物体弹性的数学叙述为应力应变的一一对应。超弹性材料具有贮能函数Σ（每单位参考构型体积），它可以是任意应变度量，如 $\mathbf{E}$，$\mathbf{U}$ 等，的函数，也可以通过应变度量作为变形梯度 F 的复合函数。为使公式简短，今后常用$\dot{(\ \ )}$代替$\delta(\ \ )$。在任意虚位移$\dot{\mathbf{u}}\equiv\delta\mathbf{u}$ 中，贮能函数的增量，即物体单位未变形体积吸收的虚功是

$$\dot{\sum} = J\mathbf{t}:(\dot{\mathbf{u}}\overset{\circ}{\nabla}) \tag{4.1}$$

依次将$(3.12)_{2,1}$式代入，又有

$$\dot{\sum}(\tau\cdot\mathbf{F}^{*}):(\dot{\mathbf{u}}\overset{\circ}{\nabla}) = \tau:[(\dot{\mathbf{u}}\overset{\circ}{\nabla})\cdot\mathbf{F}] = \tau:[(\dot{\mathbf{u}}\overset{\circ}{\nabla})\cdot(\mathbf{x}\nabla)] = \tau:(\dot{\mathbf{u}}\nabla)$$

$$= \tau:[(\mathbf{x}+\dot{\mathbf{u}})\nabla - \mathbf{x}\nabla] = \tau:\dot{\mathbf{F}} \tag{4.2}$$

$$\dot{\sum} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{T}:(\mathbf{F}^{*}\cdot\dot{\mathbf{F}}) = \mathbf{T}:\frac{1}{2}\delta(\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{F}) = \mathbf{T}:\dot{\mathbf{E}} \tag{4.3}$$

上式还可以写成$\frac{1}{2}\mathbf{T}:\dot{\mathbf{C}}$，但这并不带来新内容。将分析力学广义坐标和广义力的概念推广至变形体力学，我们可以把任意应变度量看作广义坐标，而从$\dot{\Sigma}$的表达式得出对应的广义应力[20，21]。取下面要用到的伸长张量$\mathbf{U}$，将(3.5)和(3.4)式代入上式，得

$$\dot{\sum} = \mathbf{T}:\frac{1}{2}(\mathbf{U}\cdot\dot{\mathbf{U}}+\dot{\mathbf{U}}\cdot\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{T}):\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{S}:\dot{\mathbf{U}} \tag{4.4}$$

S就是上节所提及的Jaumann应力张量。

在上面虚功的四个表达式中，唯有 $\dot{\mathbf{E}}$和 $\dot{\mathbf{U}}$是应变度量的增量。因此就本文所提及的应力张量，只有T和S才满足广义应力定义的要求。分别将E和U作为Σ的变量，从 (4.3, 4)两式我们有

$$\mathbf{T}(\mathbf{E})=\frac{d\Sigma}{d\mathbf{E}} \tag{4.5}$$

和

$$\mathbf{S}(\mathbf{U})=\frac{d\Sigma}{d\mathbf{U}} \tag{4.6}$$

应力应变关系的一一对应导致T(E)和 S(U)是整体可逆的。这种成对的变量我们称为**共轭应力应变变量**[21]，并记作(T, E)和(S, U)。对每一对共轭变量，可以通过Legendre变换定义相应的余能：

$$\Sigma^{C}(\mathbf{T})=\mathbf{T}:\mathbf{E}(\mathbf{T})-\Sigma[\mathbf{E}(\mathbf{T})] \tag{4.7}$$

$$\tilde{\Sigma}^{C}(\mathbf{S})=\mathbf{S}:\mathbf{U}(\mathbf{S})-\Sigma[\mathbf{U}(\mathbf{S})] \tag{4.8}$$

并且有

$$\mathbf{E}(\mathbf{T})=\frac{d\Sigma^{C}}{d\mathbf{T}} \tag{4.9}$$

和

$$\mathbf{U}(\mathbf{S})=\frac{d\tilde{\Sigma}^{C}}{d\mathbf{S}} \tag{4.10}$$

由于

$$\mathbf{S}:\mathbf{U}=(\mathbf{T}\cdot\mathbf{U}):\mathbf{U}=\mathbf{T}:\mathbf{U}^{2}=2\,\mathbf{T}:\mathbf{E}+tr\mathbf{T}$$

我们有

$$\tilde{\Sigma}^{C}=\Sigma^{C}+\mathbf{T}:\mathbf{E}+tr\mathbf{T} \tag{4.11}$$

我们约定分别称 Σ^{C} 和$\tilde{\Sigma}^{C}$为**第一、二余能**。下面将看到，变换(4.7)引导到Reissner原理。

将Σ看作F的复合函数，(4.2)式给出

$$\tau(\mathbf{F})=\frac{d\Sigma}{d\mathbf{F}} \tag{4.12}$$

变形梯度F既包含应变，也包含转动，所对应的Piola张量τ并不满足广义应力定义的要求，但由于(4.2)式的形式，在一定程度上也可称(τ, F)为共轭变量[21]。$\dot{\mathbf{F}}$的转动部分对$\dot{\Sigma}$没有贡献。从

$$\begin{aligned}\tau:\dot{\mathbf{F}}&=\tau:(\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{U}}+\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U})=(\tau^{*}\cdot\mathbf{R}):\dot{\mathbf{U}}+\tau:(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{*}\cdot\mathbf{F})\\&=\frac{1}{2}(\tau^{*}\cdot\mathbf{R}+\mathbf{R}^{*}\cdot\tau):\dot{\mathbf{U}}+(\tau\cdot\mathbf{F}^{*}):(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{*})\\&=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{U}}+J\mathbf{t}:(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{*})\end{aligned} \tag{4.13}$$

可以看到这一点。式中两项分别与纯应变增量和转动增量有关。由于$\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^{*}$为反对称，t为对称，后一项等于零。和(4.4)式比较，这点也是显然的。F唯一确定应变和应力状态．但一个应力状态可以在不同的转动状态下对应同一个应变状态，在可逆的情况下，τ(F)的逆的多值性是可以理解的。当τ(F)可逆时，根据

$$\mathbf{S}:\mathbf{U}=(\tau^{*}\cdot\mathbf{R}):\mathbf{U}=\tau:(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U})=\tau:\mathbf{F} \tag{4.14}$$

变换(4.8)可写为

$$\tilde{\sum}^{C}(\tau)=\tau:\mathbf{F}(\tau)-\sum[\mathbf{F}(\tau)] \tag{4.15}$$

并且有

$$\mathbf{F}(\tau)=\frac{d\tilde{\Sigma}^{C}}{d\tau} \tag{4.16}$$

应注意的是，类似于$\sum(\mathbf{F})$，$\tilde{\sum}^{C}(\tau)$只能通过与转动无关的应力度量如$\tau^{*}\cdot\tau$作为τ的复合函数，有的作者称这为标架无差异性[16]。变换(4.15)引导到Levinson原理。

当$\tau(\mathbf{F})$不可逆时，根据(3.17)式和$\mathbf{S}(\mathbf{U})$的可逆性，变换(4.8)的右端依赖于同时看作为独立变量的τ和$\mathbf{R}$。这时第二余能可写成

$$\tilde{\sum}^{C}[\mathbf{S}(\tau,\ \mathbf{R})]=\tau:[\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{S})]-\sum[\mathbf{U}(\mathbf{S})] \tag{4.17}$$

它将引导到Fraeijs de Veubeke原理。

五、虚 功 原 理

虚功原理是本文推导各变分原理的出发点。

设物体$\mathscr{B}$在构型$\mathscr{K}$占有区域V，边界为A。在边界的A_u部分给定位移：$\mathbf{u}|_{A_u}=\mathring{\mathbf{u}}$；在边界的余下部分$A_t$给定每单位面积的面力：$\mathbf{T}_{\mathbf{N}}|_{A_t}=\mathring{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}}$，其中$\mathbf{N}$是构型$\mathscr{K}$边界单位外法向量。显然，面力总是作用在构型$\kappa$的边界面上。我们只考虑，不管构型$\kappa$如何，外力总取上述给定值的情形，称为死载荷。

若问题的解存在，并且是位移场$\mathbf{u}$和Piola应力场τ，就分别称之为该问题的真实位移和真实应力。“真实”二字是相对下面两个概念而言的：

（1）可能位移场$\overset{*}{\mathbf{u}}$：在V足够光滑；在A_u满足几何边条件

$$\overset{*}{\mathbf{u}}|_{A_u}=\mathring{\mathbf{u}} \tag{5.1}$$

（2）可能应力场$\underset{*}{\tau}$：在V满足力平衡方程

$$\underset{*}{\tau}\cdot\nabla=0 \tag{5.2}$$

在A_t满足力边条件

$$\underset{*}{\tau}\cdot\mathbf{N}|_{A_t}=\mathring{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}} \tag{5.3}$$

对任取的，互不相关的可能位移场$\overset{*}{\mathbf{u}}$和可能应力场$\underset{*}{\tau}$，下列积分关系式成立：

$$\begin{aligned}\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\underset{*}{\tau}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\overset{*}{\mathbf{u}}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}}\,dA&=\oint_{A}\overset{*}{\mathbf{u}}\cdot\underset{*}{\tau}\cdot\mathbf{N}dA\\&=\int_{V}(\overset{*}{\mathbf{u}}\cdot\underset{*}{\tau})\cdot\nabla dV=\int_{V}\underset{*}{\tau}:(\overset{*}{\mathbf{u}}\nabla)\ dV\end{aligned} \tag{5.4}$$

这里用到了条件(5.1—3)。关系式(5.4)首先由Vorobyev给出，Novozhilov在专著[22]作了转述。

若记$\overset{*}{\mathbf{u}}=\mathbf{u}+\dot{\mathbf{u}}$，并代入(5.4)式，得

$$\int_{A_u} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \cdot \underset{*}{\tau} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}) \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = \int_V \underset{*}{\tau} : (\mathbf{u}\nabla + \dot{\mathbf{u}}\nabla) dV \tag{5.5}$$

(5.4)式对真实位移u亦成立：

$$\int_{A_u} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \cdot \underset{*}{\tau} \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = \int_V \underset{*}{\tau} : (\mathbf{u}\nabla) dV \tag{5.6}$$

从(5.5)式减去(5.6)式，并取真实应力，得**虚位移原理**：

$$\int_{A_t} \dot{\mathbf{u}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = \int_V \tau : (\dot{\mathbf{u}}\nabla) dV \tag{5.7}$$

又若记$\underset{*}{\tau} = \tau + \dot{\tau}$，并代入(5.4)式，得

$$\int_{A_u} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \cdot (\tau + \dot{\tau}) \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \overset{*}{\mathbf{u}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = \int_V (\tau + \dot{\tau}) : (\overset{*}{\mathbf{u}}\nabla) dV \tag{5.8}$$

(5.4) 式对真实应力τ亦成立：

$$\int_{A_u} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \cdot \tau \cdot \mathbf{N} dA + \int_{A_t} \overset{*}{\mathbf{u}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = \int_V \tau : (\overset{*}{\mathbf{u}}\nabla) dV \tag{5.9}$$

上两式相减，并取真实位移，又得**虚应力原理**：

$$\int_{A_u} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \cdot \dot{\tau} \cdot \mathbf{N} dA = \int_V \dot{\tau} : (\mathbf{u}\nabla) dV \tag{5.10}$$

虚位移原理是推导总势能驻值原理的基础，而虚应力原理则是推导各种余能原理的基础。我们约定泛称同源于(5.4)式的虚位移和虚应力原理为**虚功原理**。

六、古 典 变 分 原 理

将(4.2)式代入虚位移原理(5.7)，得

$$\int_V \dot{\sum} dV - \int_{A_t} \dot{\mathbf{u}} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA = 0 \tag{6.1}$$

鉴于$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}$是死载荷，我们有

$$\delta\left(\int_V \sum dV - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA\right) = 0 \tag{6.2}$$

我们称定义在可能位移场函数类的泛函

$$\prod(\mathbf{u}) = \int_V \sum(\mathbf{F}) dV - \int_{A_t} \mathbf{u} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} dA \tag{6.3}$$

为**系统总势能**。(6.2)式的意义是，真实位移场u使系统总势能$\prod$取驻值。下面证明，使泛函$\prod(\mathbf{u})$取驻值的可能位移场u根据本构关系(4.12)所对应的应力场τ是满足力矩平衡条件的可能应力场。利用

$$\dot{\sum} = \frac{d\Sigma}{d\mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} = \tau : (\dot{\mathbf{u}}\nabla) = (\dot{\mathbf{u}}\tau) \cdot \nabla - \dot{\mathbf{u}} \cdot (\tau \cdot \nabla) \tag{6.4}$$

得 $\Pi(\mathbf{u})$的变分

$$\dot{\Pi}=\int_V[(\dot{\mathbf{u}}\cdot\tau)\cdot\nabla-\dot{\mathbf{u}}\cdot(\tau\cdot\nabla)]dV-\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA$$

$$=\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot(\tau\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}})\,dA-\int_V\dot{\mathbf{u}}\cdot(\tau\cdot\nabla)dV \tag{6.5}$$

这里用到$\dot{\mathbf{u}}|_{A_u}=0$。由$\dot{\Pi}=0$及$\dot{\mathbf{u}}$在$V$及$A_t$的任意性，得

$$\tau\cdot\nabla=0 \qquad 在V \tag{6.6}$$

$$\tau\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}} \qquad 在A_t \tag{6.7}$$

由于$\Sigma(\mathbf{F})$是$\mathbf{F}$的复合函数（通过应变度量）。今取该应变度量为$\mathbf{C}=\mathbf{F}^*\cdot\mathbf{F}$ 则有

$$\tau=\frac{d\Sigma}{d\mathbf{F}}=2\mathbf{F}\cdot\frac{d\Sigma}{d\mathbf{C}} \tag{6.8}$$

注意到$\dfrac{d\Sigma}{d\mathbf{F}}$的对称性，也有

$$\tau^*=2\frac{d\Sigma}{d\mathbf{C}}\cdot\mathbf{F}^*$$

从而又得

$$\tau\cdot\overset{*}{\mathbf{F}}=\mathbf{F}\cdot\tau^* \qquad 在V \tag{6.9}$$

于是，该应力场τ是真实应力场，因为它既对应于可能位移场u，又满足条件(6.6,7,9)。与泛函(6.3)相联系的变分原理称为**系统总势能驻值原理**。

最后，对于真实位移场和真实应力场，利用散度定理，(6.3)式可改写为

$$\Pi=\int_V\sum dV-\oint_A\mathbf{u}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}\,dA+\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}\,dA=\int_V\left[\sum-\tau:(\mathbf{u}\nabla)\right]dA+\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}dA$$

考虑到

$$\tau:(\mathbf{u}\nabla)=(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)=(\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}+[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}$$

$$=\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}$$

$$=\mathbf{E}:\mathbf{T}+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}$$

系统总势能在真实状态的值可用真实位移和真实应力表达为

$$\Pi'(\mathbf{u},\ \mathbf{T})=\int_V\left\{\sum(\mathbf{E})-\mathbf{T}:\mathbf{E}-\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\right\}dV+\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{6.10}$$

Π'的意义见下文。

现在我们从虚应力原理(5.10)推导**系统总余能驻值原理**，即 **Reissner 原理**。利用(4.7)式所定义的第一余能$\Sigma^C(\mathbf{T})$，(4.9)式及(3.5)式，得

$$\dot{\tau}:(\mathbf{u}\nabla)=\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)=(\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)+(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}}):(\mathbf{u}\nabla)$$

$$=[(\nabla\mathbf{u})\cdot\dot{\mathbf{F}}]:\mathbf{T}+[(\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}]:\dot{\mathbf{T}}=[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\dot{\mathbf{u}}\nabla)]:\mathbf{T}+[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\dot{\mathbf{T}}$$

$$=\frac{1}{2}\delta[(\nabla \mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}+\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+2(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\dot{\mathbf{T}}$$

$$=\mathbf{E}:\dot{\mathbf{T}}+\frac{1}{2}\delta\{[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\}=\delta\left\{\Sigma^{C}+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\right\} \tag{6.11}$$

将之代入(5.10)式，得

$$\delta\left\{\int_V\left[\Sigma^{C}+\frac{1}{2}((\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)):\mathbf{T}\right]dV-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA\right\}=0 \tag{6.12}$$

这里同时出现位移场u和应力场T。我们称定义在可能位移场（由于在 A_u 的面积分里已出现位移的给定边界值，可能位移的条件可削弱为不必满足将来以自然边条件出现的(5.1)式)和可能应力场函数类的泛函

$$\prod^{C}(\mathbf{T},\ \mathbf{u})=\int_V\left\{\Sigma^{C}(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\right\}dV-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{6.13}$$

为**系统总余能**。(6.12)式的含义是：真实应力场T和真实位移场u使系统总余能取驻值。下面证明，使泛函 $\prod^{C}(\mathbf{T},\mathbf{u})$取驻值的可能应力场T和可能位移场u是互相对应的，并且u满足边条件(5.1)，因而是问题的解。变量T在V内受力平衡方程的约束，证明时需先解除约束。我们将应力边条件也引进泛函，使T成为完全的自由变量。引进Lagrange乘子 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\xi}$（分别是定义在V和A_t的向量场），得无约束条件的泛函：

$$\overset{*}{\prod}{}^{C}=\int_V\left\{\Sigma^{C}(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}+\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\right\}dV$$

$$-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\boldsymbol{\xi}\cdot(\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{6.14}$$

其中T，u，$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{\xi}$是独立的自由变量。首先暂且令T，$\boldsymbol{\eta}$ 和$\boldsymbol{\xi}$保持不变地求$\overset{*}{\prod}{}^{C}$ 的变分：

$$\delta\overset{*}{\prod}{}^{C}=\int_V\{[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\dot{\mathbf{u}}\nabla)]:\mathbf{T}+\boldsymbol{\eta}\cdot[(\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\}dV$$

$$-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\boldsymbol{\xi}\cdot\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA$$

$$=\int_V[(\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta})\nabla]:\dot{\boldsymbol{\tau}}\,dV+\int_{A_u}(\boldsymbol{\eta}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\xi})\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N}dA \tag{6.15}$$

这里$\dot{\boldsymbol{\tau}}=\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T}$是仅由于$\dot{\mathbf{u}}$而引起的Piola张量场$\boldsymbol{\tau}$的变化，它完全是自由的。由此，$\delta\overset{*}{\prod}{}^{C}=0$就给出 Lagrange 乘子$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{\xi}$的意义：

$$(\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta})\nabla=0 \qquad 在V \tag{6.16}$$

$$\boldsymbol{\eta}=\overset{\circ}{\mathbf{u}} \qquad 在A_u \tag{6.17}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta} \qquad 在A_t \tag{6.18}$$

从(6.16)式可知，向量场$\boldsymbol{\eta}$和位移场u至多可差一个常向量场。根据(6.17)式及连续性进一步可知，在整个区域V内$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{u}$。而由(6.18)式，在$A_t$上又有$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}$. 将$\boldsymbol{\eta}$和$\boldsymbol{\xi}$的意义代回(6.14)式就得

$$\overset{*}{\Pi}{}^{C}(\mathbf{T},\mathbf{u})=\int_V\left\{\Sigma^C(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}+\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\right\}dV$$

$$-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})dA \tag{6.19}$$

这是一个具有两个自由变量T和u的无约束泛函。现在用它来进行上面所提及的证明。先将$\overset{*}{\Pi}{}^{C}(\mathbf{T},\mathbf{u})$改写为

$$\overset{*}{\Pi}{}^{C}(\mathbf{T},\mathbf{u})=\int_V\left\{\Sigma^C(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}-(\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\right\}dV$$

$$+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{T}}\ dA \tag{6.20}$$

它的变分是

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^{C}=\int_V\left\{\frac{d\Sigma^C}{d\mathbf{T}}:\dot{\mathbf{T}}+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\dot{\mathbf{T}}+[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\dot{\mathbf{u}}\nabla)]:\mathbf{T}-(\dot{\mathbf{u}}\nabla):(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\right.$$

$$\left.-(\mathbf{u}\nabla):(\dot{\mathbf{F}}\cdot\mathbf{T})-(\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{T}})\right\}dV+\int_{A_u}\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA$$

$$+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}}dA$$

$$=\int_V\left\{\left[\frac{d\Sigma^C}{d\mathbf{T}}-\frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))\right]:\dot{\mathbf{T}}+[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\cdot\dot{\mathbf{u}}\right\}dV$$

$$+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})dA \tag{6.21}$$

于是得

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla=0 \qquad 在V \tag{6.22}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}} \qquad 在A_t \tag{6.23}$$

$$\mathbf{u}=\overset{\circ}{\mathbf{u}} \qquad 在A_u \tag{6.24}$$

$$\frac{d\Sigma^C}{d\mathbf{T}}=\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)] \qquad 在V \tag{6.25}$$

(6.25)式说明，使$\overset{*}{\Pi}{}^{C}(\mathbf{T},\mathbf{u})$（亦即使$\Pi^C(\mathbf{T},\mathbf{u})$）取驻值的T通过本构关系(4.9)与使$\overset{*}{\Pi}{}^{C}$取驻值的u相对应。这就是所需证明的。

利用(4.7)式，比较(6.10)和(6.13)两式，我们有$\Pi^C\overset{r}{=}-\Pi'$。即对于真实位移和真实应力，系统总势能和系统总余能间存在互补关系

$$\Pi+\Pi^C\overset{r}{=}0 \tag{6.26}$$

这里"$\overset{r}{=}$"表示仅在真实状态才成立的等式。应注意的是，$\Pi(\mathbf{u})$和$\Pi^C(\mathbf{T},\mathbf{u})$是两个不同的泛函，(6.26)式只说明它们在驻点的值相同而已。

这样，我们从虚功原理出发，统一地推导并充分论证了非线性弹性的两个古典变分原理，还指出了它们间的相互关系。

七、广 义 变 分 原 理

两个古典变分原理都是有条件的变分原理，在应用上有时未必方便。后来发展了广义变分的思想。这思想起初是通过猜测，后来是通过 Lagrange 乘子实现的。在这方面我国学者做过相当的工作[23, 24]。Lagrange 乘子将附加条件合并到原始泛函而得到无约束泛函。其实，在证明Reissner原理时，我们已经这样做了。可以说，广义变分的思想就是：把证明带约束的变分问题时，在弄清用以解除约束的 Lagrange 乘子的物理意义后所得的无约束泛函，作为原始问题的泛函而加以应用。

现从总势能泛函推导广义变分泛函。总势能驻值原理的独立变量是 $\mathbf{u}$，但Π所包含的贮能函数Σ实际上是通过应变度量，如(3.5)式的 $\mathbf{E}$，依赖于$\mathbf{u}$的。我们引入待定的Lagrange乘子$\boldsymbol{\sigma}$（定义在V的对称张量场）和$\boldsymbol{\xi}$（定义在 A_u 的向量场），将条件(3.5)和约束位移的边条件(5.1)合并到总势能(6.3)，得

$$\overset{*}{\Pi}=\int_V \sum(\mathbf{E})dV+\int_V\left\{\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]-\mathbf{E}\right\}:\boldsymbol{\sigma}dV$$

$$-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{T}}_N\,dA+\int_{A_u}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\xi}dA \tag{7.1}$$

这里的独立变量是$\mathbf{E}$，$\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{\xi}$。暂且令$\boldsymbol{\sigma}$和$\boldsymbol{\xi}$保持不变地求 $\overset{*}{\Pi}$ 的变分。利用(4.3)式，得

$$\delta\overset{*}{\Pi}=\int_V\{(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\dot{\mathbf{E}}+(\dot{\mathbf{u}}\nabla):\boldsymbol{\sigma}+(\dot{\mathbf{u}}\nabla):[(\mathbf{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{\sigma}]\}dV$$

$$-\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{T}}_N\,dA-\int_{A_u}\dot{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\xi}dA \tag{7.2}$$

利用散度定理，又得

$$\int_V\{(\dot{\mathbf{u}}\nabla):\boldsymbol{\sigma}+(\dot{\mathbf{u}}\nabla):[(\mathbf{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{\sigma}]\}dV=\int_V(\dot{\mathbf{u}}\nabla):(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})dV$$

$$=\oint_A\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}dA-\int_V\dot{\mathbf{u}}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla]dV$$

将之代入(7.2)式，有

$$\delta\overset{*}{\Pi}=\int_V\{(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\dot{\mathbf{E}}-[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla]\cdot\dot{\mathbf{u}}\}dV$$

$$+\int_{A_t}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_N)\cdot\dot{\mathbf{u}}dA+\int_{A_u}(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\boldsymbol{\xi})\cdot\dot{\mathbf{u}}dA \tag{7.3}$$

由$\delta\overset{*}{\Pi}=0$，从体积分的第一项及最后一个面积分，得Lagrange乘子的物理意义：

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T} \qquad \text{在}V \tag{7.4}$$

$$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} \qquad \text{在}A_u \tag{7.5}$$

代回(7.1)式，就得

$$\overset{*}{\Pi}(\mathbf{u},\mathbf{T})=\int_V\left\{\sum(\mathbf{E})-\left[\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))\right]:\mathbf{T}\right\}dV$$

$$-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}}\,dA-\int_{A_u}(\mathbf{u}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA. \tag{7.6}$$

尽管E也在泛函里出现，但它是通过本构关系(4.5)依赖于 T 的。可以称具有两个自由变量u和T 的无约束泛函$\overset{*}{\Pi}$(u, T) 为**系统广义总势能**。E不是独立变量这一点也可以从(7.6)式的变分看出，由于(4.3)式而$\dot{\mathbf{E}}$不出现。$\overset{*}{\Pi}$(u, T)的变分是

$$\delta\overset{*}{\Pi}=\int_V\left\{\left[\frac{1}{2}(\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\dot{\mathbf{T}}-[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\cdot\dot{\mathbf{u}}\right\}dV$$

$$+\int_{A_t}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})\cdot\dot{\mathbf{u}}\,dA+\int_{A_u}(\overset{\circ}{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{7.7}$$

由此可知，使泛函$\overset{*}{\Pi}$ (u, T) 取驻值的u, T以及E（通过$\mathbf{T}=\dfrac{d\Sigma}{d\mathbf{E}}$对应于 T）满足条件：

$$\mathbf{u}=\overset{\circ}{\mathbf{u}} \qquad \text{在}A_u \tag{7.8}$$

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}} \qquad \text{在}A_t \tag{7.9}$$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla=0 \qquad \text{在}V \tag{7.10}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)] \qquad \text{在}V \tag{7.11}$$

(7.11)式表明，T通过本构关系(4.5)和u相对应；(7.8—10)式则表明，这两相对应的 u 和T同时是可能位移场和可能应力场，因而是问题的解。泛函为$\overset{*}{\Pi}$(u,T) 的无约束条件的变分原理称为**广义总势能驻值原理**。

利用下述结果

$$\frac{1}{2}[\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}=(\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})-\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}$$

$$=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla-\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]-\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T} \tag{7.12}$$

散度定理和(4.7)式，并改变符号，广义总势能(7.6)又可化成另一种等价形式：

$$\overset{*}{\Pi}{}^C(\mathbf{u},\ \mathbf{T})=\int_V\left\{\sum{}^C(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}+\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla]\right\}dV$$

$$-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})\,dA-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{7.13}$$

这正是证明Reissner原理时出现的无约束泛函(6.19)。假如类似地称泛函(6.19)为**系统广义总余能**，并相应地有**广义总余能驻值原理**，则广义总势能和广义总余能间也存在互补关系

$$\overset{*}{\Pi}+\overset{*}{\Pi}{}^C=0 \tag{7.14}$$

(7.12)式对任意无关的 u 和 T 成立，从而互补关系 (7.14) 也对任 意 u 和 T 成立（不同于(6.26)式），故广义总势能原理和广义总余能原理实质上是同一泛函（差一符号）的驻值原理，因此可统称为**广义变分原理**。

八、Levinson 原理

在τ(F) 可逆的条件下，采用变换(4.15)定义的第二余能，得

$$\dot{\Sigma}^C=\mathbf{F}:\dot{\tau}=\dot{\tau}:(\mathbf{u}\nabla)+\mathrm{tr}\,\dot{\tau} \tag{8.1}$$

代入虚应力原理(5.10)，我们有

$$\delta\{\int_V [\tilde{\Sigma}^C(\boldsymbol{\tau})-\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}]\,dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA\}=0 \tag{8.2}$$

对于定义在可能应力场函数类的泛函：

$$\Pi_1^C\ (\boldsymbol{\tau})=\int_V [\tilde{\Sigma}^C(\boldsymbol{\tau})-\operatorname{tr}\boldsymbol{\tau}]\,dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{8.3}$$

(8.2) 式的意义是，真实应力场 $\boldsymbol{\tau}$ 使 Π_1^C ($\boldsymbol{\tau}$) 取驻值。下面证明，使 Π_1^C 取驻值的可能应力场 $\boldsymbol{\tau}$ 满足力矩平衡条件，且有满足边条件的位移场 $\mathbf{u}$ 与之相对应。由于 $\tilde{\Sigma}^C(\boldsymbol{\tau})$ 是 $\boldsymbol{\tau}$ 的标架无差异的复合函数（通过 $\mathbf{K}=\boldsymbol{\tau}^*\cdot\boldsymbol{\tau}$），故

$$\mathbf{F}=\frac{d\tilde{\Sigma}^C}{d\boldsymbol{\tau}}=2\,\boldsymbol{\tau}\cdot\frac{d\tilde{\Sigma}^C}{d\mathbf{K}} \tag{8.4}$$

考虑到 $\dfrac{d\tilde{\Sigma}^C}{d\mathbf{K}}$ 的对称性，即得力矩平衡条件

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{F}^*=\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\tau}^* \qquad \text{在}V \tag{8.5}$$

只有当 (8.4) 式的 $\mathbf{F}$ 满足条件

$$\mathbf{F}\times\boldsymbol{\nabla}=0 \qquad \text{在}V \tag{8.6}$$

才有可能从

$$\mathbf{u}\ (\mathbf{X})=\int_{X_0}^{X}(\mathbf{F}-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{X}+\mathring{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_0) \tag{8.7}$$

求得位移场。为了证明，我们这次不用 Lagrange 乘子解除约束而引进自然满足力平衡方程(3.13)的应力张量函数 $\boldsymbol{\Phi}$：

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\Phi}\times\boldsymbol{\nabla} \tag{8.8}$$

以代替受约束的变量 $\boldsymbol{\tau}$。这样，Π_1^C 的变分是

$$\dot{\Pi}_1^C=\int_V(\mathbf{F}-\mathbf{I}):(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\times\boldsymbol{\nabla})\ dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N}dA \tag{8.9}$$

利用恒等式

$$(\mathbf{F}-\mathbf{I}):(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\times\boldsymbol{\nabla})=(\mathbf{F}\times\boldsymbol{\nabla}):\dot{\boldsymbol{\Phi}}+\operatorname{tr}\{[(\mathbf{F}^*-\mathbf{I})\cdot\dot{\boldsymbol{\Phi}}]\times\boldsymbol{\nabla}\} \tag{8.10}$$

及散度定理

$$\int_V \operatorname{tr}\,[(\mathbf{F}^*\cdot\dot{\boldsymbol{\Phi}})\times\boldsymbol{\nabla}]dV=\oint_A\mathbf{F}:(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\times\mathbf{N})dA \tag{8.11}$$

(8.9) 式成为

$$\dot{\Pi}_1^C=\int_V(\mathbf{F}\times\boldsymbol{\nabla}):\dot{\boldsymbol{\Phi}}\ dV+\oint_A(\mathbf{F}-\mathbf{I}):(\dot{\boldsymbol{\Phi}}\times\mathbf{N})\ dA-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{N}dA \tag{8.12}$$

从体积分项得可积条件 (8.6)。因此，可积分 (8.7) 式而得向量场 $\mathbf{u}(\mathbf{X})$。当这向量场满足几何边条件时，就成为对应的位移场。将 $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ 代入上式的第一个面积分，它的被积函数

化为

$$(\mathbf{F}-\mathbf{I}):(\dot{\mathbf{\Phi}}\times\mathbf{N})=(\mathbf{u}\nabla):(\dot{\mathbf{\Phi}}\times\mathbf{N})=\mathbf{u}\cdot(\dot{\mathbf{\Phi}}\times\nabla)\cdot\mathbf{N}-[(\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{\Phi}})\times\nabla]\cdot\mathbf{N} \tag{8.13}$$

根据Stokes定理，任何向量场的旋度在闭曲面上的通量等于零，于是(8.12)式的两个面积分变为

$$\oint_A \mathbf{u}\cdot(\dot{\mathbf{\Phi}}\times\nabla)\cdot\mathbf{N}\,dA-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\dot{\tau}\cdot\mathbf{N}\,dA=\int_{A_u}(\mathbf{u}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\dot{\tau}\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{8.14}$$

于是得

$$\mathbf{u}|_{A_u}=\mathring{\mathbf{u}} \tag{8.15}$$

这里用到$\dot{\tau}|_{A_t}=0$。于是，**Levinson 原理**得到全部证明（恒等式（8.10,13）及散度定理(8.11)都不难用分量形式证明）。

同样可以用Lagrange乘子将可能应力场的约束条件合并到泛函(8.3)，略去中间过程，最终得无约束泛函：

$$\overset{*}{\Pi}{}_1^C(\tau,\mathbf{u})=\int_V[\tilde{\Sigma}^C(\tau)-\mathrm{tr}\,\tau+\mathbf{u}\cdot(\tau\cdot\nabla)]dV$$
$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}\,dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\tau\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N)dA \tag{8.16}$$

它的变分是

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_1^C(\tau,\mathbf{u})=\int_V[(\mathbf{F}-\mathbf{I}-\mathbf{u}\nabla):\dot{\tau}+(\tau\cdot\nabla)\cdot\dot{\mathbf{u}}]dV$$
$$+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\dot{\tau}\cdot\mathbf{N}\,dA-\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot(\tau\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N)\,dA \tag{8.17}$$

$\delta\overset{*}{\Pi}{}_1^C=0$ 给出

$$\left.\begin{array}{ll}\tau\cdot\nabla=0 & 在V\\ \mathbf{u}\nabla=\mathbf{F}-\mathbf{I} & 在V\\ \tau\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N & 在A_t\\ \mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}} & 在A_u\end{array}\right\} \tag{8.18}$$

(8.18)各式加上力矩平衡条件(8.5)及可积条件(8.6)说明，τ和$\mathbf{u}$就是真实应力场和真实位移场。可以称与泛函(8.16)相联系的变分原理为**广义 Levinson 原理**。

对于真实状态，下列等式成立

$$\tilde{\Sigma}^C-\mathrm{tr}\,\tau=\Sigma^C+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T} \tag{8.19}$$

故亦存在两个互补关系：

$$\Pi+\Pi_1^C\overset{r}{=}0,\qquad \overset{*}{\Pi}+\overset{*}{\Pi}{}_1^C\overset{r}{=}0 \tag{8.20}$$

九、Fraeijs de Veubeke原理

当$\tau(\mathbf{F})$不可逆时，Levinson原理失效。采用(4.17)式的第二余能

$$\widetilde{\sum}^{C}[\mathbf{S}(\tau,\mathbf{R})]=\tau:[\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}(\mathbf{S})]-\sum[\mathbf{U}(\mathbf{S})] \tag{9.1}$$

虚应力原理就引导到基于极分解的Fraeijs de Veubeke原理·将仍然成立的(8.1)式代入虚应力原理(5.10)，我们就有

$$\delta\left\{\iint_V\left[\widetilde{\sum}^{C}(\mathbf{S})-\mathrm{tr}\,\tau\right]dV-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}\,dA\right\}=0 \tag{9.2}$$

对于以 Piola 应力张量τ和转动张量$\mathbf{R}$作为独立变量的泛函：

$$\Pi_2^C(\tau,\mathbf{R})=\int_V\left\{\widetilde{\sum}^{C}[\mathbf{S}(\tau,\mathbf{R})]-\mathrm{tr}\,\tau\right\}dV-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{9.3}$$

(9.2)式的意义是：真实应力场τ和真实转动场$\mathbf{R}$使泛函Π_2^C取驻值。逆命题也是对的：使Π_2^C取驻值的可能应力场τ和转动场$\mathbf{R}$满足力矩平衡条件，且有唯一的，满足几何边条件的位移场$\mathbf{u}$与之对应，因而是问题的解。注意，这里力矩平衡条件已不能像Levinson原理那样由$\widetilde{\sum}^{C}$函数本身的形式所保证。所谓对应的位移场，就是指从下述步骤求出的向量场$\mathbf{u}$:从τ和$\mathbf{R}$出发，根据(3.17)式及$\mathbf{S}(\mathbf{U})$的可逆性算出$\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$，然后根据(3.2,3)积分得

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})=\int_{X_0}^{X}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I})\cdot d\mathbf{X}+\overset{\circ}{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_0) \tag{9.4}$$

可积条件是

$$(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U})\times\nabla=0 \qquad \text{在}V \tag{9.5}$$

利用(4.10)和(3.17)式，考虑到伸长张量$\mathbf{U}$的对称性，并引入应力张量函数Φ如(8.8)式，则泛函Π_2^C变分的体积分被积函数是

$$\frac{d\widetilde{\Sigma}^C}{d\mathbf{S}}:\dot{\mathbf{S}}-tr\dot{\tau}=\mathbf{U}:(\dot{\tau}^*\cdot\mathbf{R}+\tau^*\cdot\dot{\mathbf{R}})-tr\dot{\tau}=\dot{\tau}:(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I})+\tau:(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{U})$$

$$=(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I}):(\dot{\Phi}\times\nabla)+\frac{1}{2}(\tau\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*-\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\tau^*):(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^*) \tag{9.6}$$

利用恒等式(8.10)及散度定理(8.11)，得Π_2^C的变分：

$$\dot{\Pi}_2^C=\int_V\{[(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U})\times\nabla]:\dot{\Phi}+\frac{1}{2}(\tau\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*-\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\tau^*):(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^*)\}dV$$

$$+\oint_A(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I}):(\dot{\Phi}\times\mathbf{N})dA-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\dot{\tau}\cdot\mathbf{N}dA \tag{9.7}$$

从体积分项得可积条件(9.5)及力矩平衡条件

$$\tau\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\tau^* \qquad \text{在}V \tag{9.8}$$

只要用$\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}$代替$\mathbf{F}$，就可用完全类似于证Levinson原理的步骤求得满足几何边条件的位移场$\mathbf{u}(\mathbf{X})$。从而Fraeijs de Veubeke原理得到全部证明。

类似地，相应的无约束泛函是

$$\overset{*}{\Pi}{}_2^C(\tau,\mathbf{R},\mathbf{u})=\int_V\{\widetilde{\Sigma}^C[\mathbf{s}(\tau,\mathbf{R})]-tr\tau+\mathbf{u}\cdot(\tau\cdot\nabla)\}dV$$

$$-\int_{A_u}\overset{\circ}{\mathbf{u}}\cdot\tau\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\tau\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})dA \qquad (9.9)$$

它的变分是

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_2^C=\int_V[(\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I}-\mathbf{u}\nabla):\dot{\tau}+\frac{1}{2}(\tau\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*-\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\tau^*):(\dot{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{R}^*)+(\tau\cdot\nabla)\cdot\dot{\mathbf{u}}]dV$$

$$+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\overset{\circ}{\mathbf{u}})\cdot\dot{\tau}\cdot\mathbf{N}\,dA-\int_{A_t}\dot{\mathbf{u}}\cdot(\tau\cdot\mathbf{N}-\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}})\,dA \qquad (9.10)$$

$\delta\overset{*}{\Pi}{}_2^C=0$ 给出

$$\left.\begin{array}{ll}\tau\cdot\nabla=0 & \text{在}V\\ \tau\cdot\mathbf{U}\cdot\mathbf{R}^*=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}\cdot\tau^* & \text{在}V\\ \mathbf{u}\nabla=\mathbf{R}\cdot\mathbf{U}-\mathbf{I} & \text{在}V\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}=\overset{\circ}{\mathbf{T}}_{\mathbf{N}} & \text{在}A_t\\ \mathbf{u}=\overset{\circ}{\mathbf{u}} & \text{在}A_u\end{array}\right\} \qquad (9.11)$$

它们加上本构关系

$$\mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{S})=\mathbf{U}\left[\frac{1}{2}(\tau^*\cdot\mathbf{R}+\mathbf{R}^*\cdot\tau)\right] \qquad (9.12)$$

及转动张量的正交性

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{R}^*=\mathbf{I} \qquad (9.13)$$

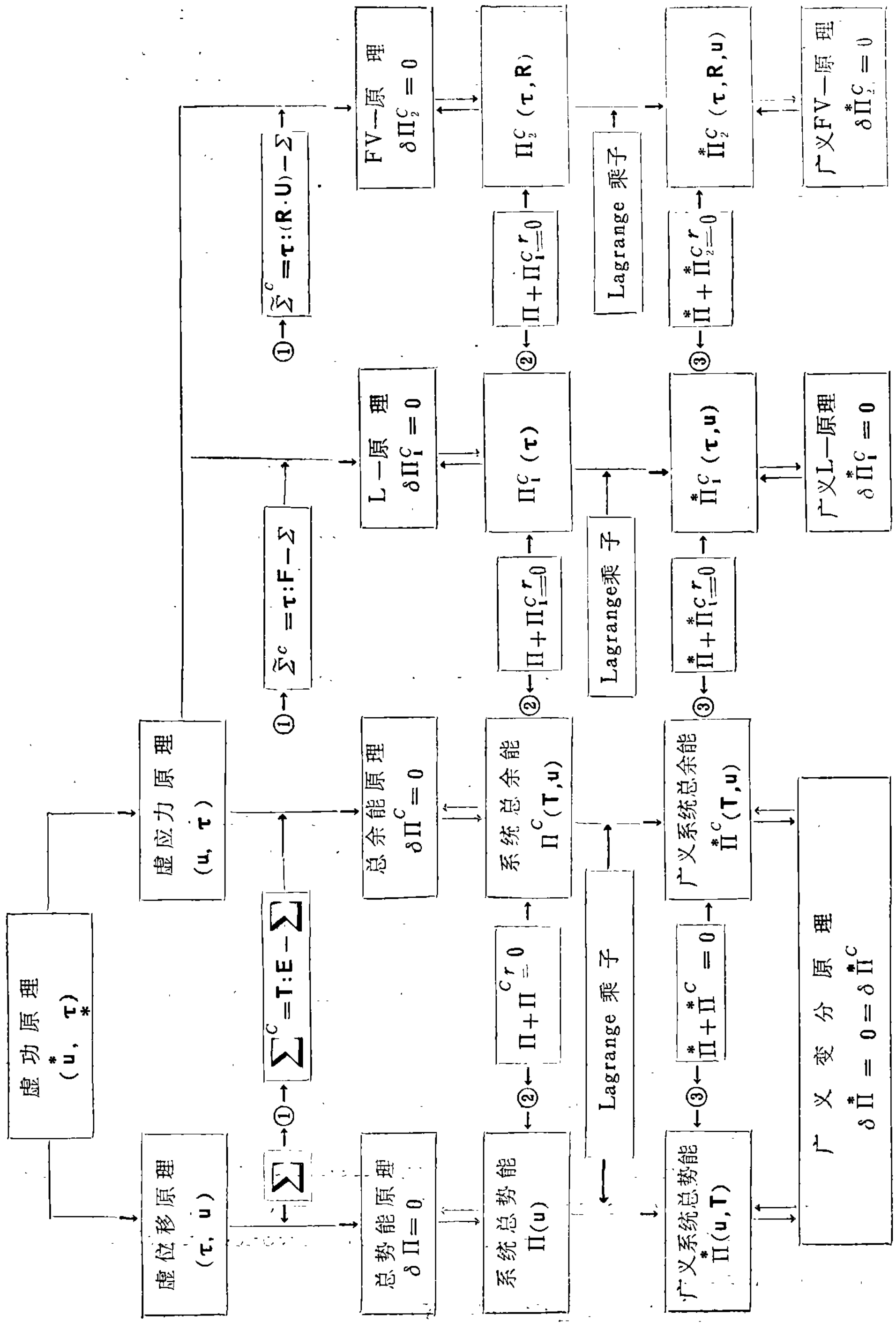
构成了问题的全部关系式。可以称与泛函$\overset{*}{\Pi}{}_2^C$相联系的变分原理为**广义 Fraeijs de Veubeke**原理。

类似地也可证明两个关系：

$$\Pi+\Pi_2^C\overset{r}{=}0,\quad \overset{*}{\Pi}+\overset{*}{\Pi}{}_2^C=0$$

十、关 系 图

这里给出统一从虚功原理推导出来的各变分原理的关系图。它使我们更能看清各原理间的纵横内在联系：纵向是势能原理、余能原理、Levinson 原理（L-原理）和 Fraeijs de Veubeke 原理(FV-原理）四条线，古典变分原理构成一闭回路，而 L-和 FV-原理则各单独成一开分支；各原理间又存在着横向的互补关系。


虚功原理
(u*, τ*)
虚位移原理
(τ, u)
虚应力原理
(u, τ)
总势能原理
δΠ=0
总余能原理
δΠ^C=0
L—原理
δΠ_1^C=0
FV—原理
δΠ_2^C=0
系统总势能
Π(u)
系统总余能
Π^C(T,u)
Π_1^C(τ)
Π_2^C(τ,R)
Lagrange 乘子
Lagrange乘子
Lagrange 乘子
广义系统总势能
Π*(u,T)
广义系统总余能
Π*^C(T,u)
Π*_1^C(τ,u)
Π*_2^C(τ,R,u)
广义变分原理
δΠ* = 0 = δΠ*^C
广义L—原理
δΠ*_1^C=0
广义FV—原理
δΠ*_2^C=0

参考文献

1. Courant, R., Hilbert, D., Methode der Mathematischen Physik I. 3. Auflage, Springer, 1968, 201—207.
2. Sewell, M. J., On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics, *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A265(1969), 319—351.
3. Reissner, E., On a variational theorem for finite elastic deformations, *J. Math. Phys.*, 32(1953), 129—135.
4. Truesdell, C., Noll, W., Non-linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik Bd. III/3, Springer, (1965).
5. Nemat-Nasser, S., General variational principles in nonlinear and linear elasticity with applications, Mechanics Today vol. 1, Pergamon, (1972).
6. Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, ed. II, Oxford, (1975).
7. Washizu, K., Complementary Variational Principles in Elasticity and Plasticity, Lecture at the Conference on "Duality and Complementary in Mechanics of Deformable Solids", Jabłonna Poland, (1977).
8. Levinson, M., The complementary energy theorem in finite elasticity, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 87(1965), 826—828.
9. Zubov, L. M., The stationary principle of complementary work in nonlinear theory of elasticity, *Prikl. Mat. Meh.*, 34(1970), 228—232.
10. Koiter, W. T., On the principle of stationary complementary energy in the nonlinear theory of elasticity, SIAM, J. Appl. Math., 25(1973), 424—434.
11. Koiter, W. T., On the complementary energy theorem in nonlinear elasticity theory, Trends in Appl. of pure Math. to Mech. ed. G. Fichera, Pitman, (1976).
12. Fraeijs de Veubeke, B., A new variational principle for finite elastic displacements, *Int. J. Engng. Sci.*, 10(1972), 745—763.
13. Christoffersen, J., On Zubov's principle of stationary complementary energy and a related principle, Rep. No. 44, Danish Center for Appl. Math. and Mech., April, (1973).
14. Ogden, R. W., A note on variational theorems in non-linear elastostatics, Math. Proc. Cams. Phil. Soc., 77(1975), 609—615.
15. Dill, E. H., The complementary energy principle in nonlinear elasticity, *Lett. Appl. and Engng. Sci.*, 5(1977), 95—106.
16. Ogden, R. W., Inequalities associated with the inversion of elastic stress-deformation relations and their implications, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 81(1977), 313—324.
17. Ogden, R. W., Extremum principles in non-linear elasticity and their application to composite-I, Int. J. Solids Struct., 14(1978), 265—282.
18. Truesdell, C., Toupin, R., The Classical Field Theories, Handbuch der Physik Bd. III/1, Springer, (1960).
19. 郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社（待出版）.
20. Macvean, D. B., Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs-und Verzerrungstensoren, *ZAMP*, 19(1968), 157—185.

21. Hill, R., On constitutive inequalities for simple materials-I; *J. Mech. Phys. Solids*, 16(1968), 229—242.
22. Novozhilov, V. V., Theory of Elasticity, Pergamon, (1961).
23. 胡海昌，弹塑性理论中的一些变分原理，中国科学，4 (1955)，33—54.
24. 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，清华大学科学报告，1978年11月。

Unified Theory of Variational Principles in Non-linear Theory of Elasticity

Guo Zhong-heng

(Department of Mathematics, Peking University)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce and to discuss several main variational principles in nonlinear theory of elasticity,——namely the classic potential energy principle, complementary energy principle, and other two complementary energy pri nciples(Levinson principle and Fraeijs de Veubeke principle), which are widely discussed in recent literatures. At the same time, the generalized variational principles are given also for all these principles. In this paper, Systematic derivation and rigorous proof are given to these variational principles on the unified bases of principle of virtual work, and the intrinsic relations between these principles are also indicated. It is shown that, these principles have unified bases, and their differences are solely due to the adoption of different variables and Legendre transformation. Thus, various variational principles constitute an organized totality in an unified frame. For those variational principles not discussed in this paper, the same frame can also be used. a diagram is given to illustrate the interrelationships between these principles.