应用数学和力学，第1卷第1期（1980年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆交通学院出版

用数学武装工程科学*

冯卡门(Theodore von Kármán)

人们常说，研究数学的主要目的之一是为物理学家和工程师们提供解决实际问题的工具。从数学的发展史看来，事实很清楚，许多重大的数学发现是在了解自然规律的迫切要求下应运而生的，许多数学方法是由主要对实际应用感兴趣的人创立的。然而，每个真正的数学家都会感到，把数学研究局限于考察那些有直接应用的问题，对这位“科学的皇后”来说未免有点不公道，事实上，这位“皇后”的虔诚的歌颂者对于把他们的女主人贬黜为她的比较注重实际的、一时较为显赫的姐妹的“侍女”，经常感到忿忿不平。

这就不难理解为什么数学家和工程师持有争论不休的分歧意见了。两种职业的代表人物不止一次地表示了这种分歧意见。

数学家对工程师说：我在坚实的基础上建造了一座大厦——建立在明确的公设上的定理体系。我深入分析了逻辑思维过程，确定是否存在可以认为是正确的（至少是可能正确的）论述。我所关心的是，由我自己的思维确切定义的事物之间的函数关系，以及使我得以探索这种函数关系各个方面的方法。如果你们发现我所建立的概念、逻辑过程或方法能用于你们的日常工作，那我自然感到欣慰。我得到的所有结果任凭你们处置，但是得让我按自己的方式来追求自己的目标。

工程师说：你们的老前辈，那些伟大的数学家，他们的意见同你们可不一样。难道欧拉不是既致力于纯粹数学方面的发现，又从事工程装置的理论研究吗？涡轮机、柱的屈曲和打桩的基本理论方面，都有着欧拉的贡献。数学分析的发展是同物理学的发展特别是力学的发展分不开的。很难设想，要是没有为计算运动物体轨迹寻找数学工具的迫切要求，人们的头脑中会孕育有关微分方程的概念。倘若我们假定运动由某些基本的力学关系或几何关系确定，而这些关系在运动的每一瞬间都成立，就会自然而然地产生微分方程的概念。还有，变分法也主要是为解决物理问题而创立的，有时解决这些问题本身就是目的，有时是为了实际应用。十八世纪和十九世纪的前几十年也许是数学科学突飞猛进的黄金时代，那时，纯粹数学与应用数学之间并没有明确的界限。大师们把逻辑思维和直观创造力结合起来，创立了一系列方法和定理；大功告成之后，进行抽象思维的数学家着手致力于弥补逻辑推理方面的某些不足之处，把前一时期大师们的丰硕成果加以编纂，使之系统化。

数学家：我觉得你低估了你所说的系统编纂工作的重要性。为了保证正确地应用微积分学和微分方程理论，绝对有必要精确地定义我们所说的极限过程，给出象无穷小、无穷大这样的术语的真实涵义，你说对不对呢？你大概不能把伽利略称为抽象数学家或纯粹数学家吧！也许你还记得，正是伽利略指出了把相等和不等的观念应用于无穷量时必然会出现的矛盾。他注意到，你可以说整数比其平方数的个数多，因为每个平方数都是整数，但整数不全

* 本刊特约译文

是平方数；你也可以说，平方数和整数的个数相同，这同样也是合理的，因为每一个整数对应着一个平方数。可公度性、可数性、连续统的逻辑分析、集合论以及近代的拓扑学，这些观念的建立是人类思维发展的关键步骤；其中有许多是没有自觉地考虑物理应用而独立地构想出来的。但是，即使从应用的角度看来，也有必要加固我们自己的大厦的基础，也就是说，改善数学的逻辑结构。对级数收敛性条件（即允许进行逐项微分和积分的条件）不作精确的分析，谁也不可能有把握正确无误地运用级数。在具有想象和直观天赋的人们完成主要工作之后，再开始寻求新发现的牢固基础，这是一种不正确的倾向。达朗贝尔就已经要求把微积分学建立在极限论的基础上了；按你的看法，柯西，勒让德和高斯无疑在富有创造性的数学天才之列，他们为数学从直观到严格的过渡作出了卓有成效的贡献。十九世纪后半叶，数学继续朝着当时的数学家（或许是乐观地）认定的完全合乎逻辑和绝对严格的伟大目标向前发展。然而，除了阐明基本原理之外，那个时期也为应用数学的发展开辟了新的道路。比如说，你提到了微分方程，你们工程师从这一数学分支得益非浅。复变函数理论、微分方程按奇性的分类以及对这些奇性的研究，都是在你所说的系统编纂时期内发展起来的，难道你不认为这些正是建立微分方程这一数学分支的非常重要的步骤吗？这些理论把通过试凑求解微分方程的原始方式变成了全面了解整个领域的系统的方法。

工程师：我同意你的观点，尤其是关于复变函数论的观点。确实，保角变换是解决无数物理问题的一种最有效、最优美的方法。我也同意你关于奇性分析具有根本重要性的看法。事实上，在非正则点附近，我们所用的图解法和数值解法肯定会失效或不便于使用，从而必须求助于解析方法。不过遗憾的是，你们数学家有点象对人体疾病比对人体正常功能规律更感兴趣的医生，或者象关注人类思维病理失常而不去研究正常思维过程规律的心理学家。大多数情况下，我们必须研究“性质良好的函数”，希望有行之有效的方法相当准确地确定它们在某些特定情形中的性质。

数学家答道：难道你们不会应用我们提出的求解微分方程和积分方程的一般方法吗？如果它们的解由如你所说的“性质良好的函数”给出，那么我看不出还有什么了不得的困难，也不明白你们还要我们干些什么。

工程师：你们的一般定理处理的多数是解的存在性和解法的收敛性，你可能记得亥维赛说过的俏皮话：“按照数学家的意见，这个级数是发散的；因此，我们或许可以拿它来派点用场。”你们劳师费功、绞尽脑汁来证明解的存在性，而我们从物理上看来，这一点却常是一目了然的。你们很少花费精力来寻找和讨论实际有用的解；即使这样做了，多数也只是局限于简单情形，比方说，讨论涉及几何形状简单的物体的问题。我来谈谈所谓特殊函数。我承认，数学家们研究过很多种特殊函数，把它们的数值列成了表，对它们的级数展开式和定积分表示式已经作了详尽研究。可惜，这种函数在工程中应用范围有限。物理学家在探索基本定律时可以选择几何形状简单的试件作实验研究；工程师却不得不直接处理形状复杂的结构，他不能仅仅因为一种结构几何形状简单，应力分布可用特殊函数算出，就退而采用这种结构。而且，大多数特殊函数仅适用于线性问题。过去，为了简单起见，物理学家和工程师往往把他们的问题加以线性化。数学家喜欢这种简化，因为它使优美的数学方法大有用武之地。遗憾的是，随着工程科学向前发展，人们需要得到较为精确的数据和进一步接近物理真实性，这就迫使我们想方设法去解决许多非线性问题。

数学家：嗯，很多现代数学家对于非线性问题极感兴趣。看来，你们迫切需要的是发展适当的近似方法。不过，你对我们证明存在性的批评是不正确的，现代数学中许多存在性的

证明远远超过了直观的范围。我也知道，你们工程师非常成功地使用了各种迭代方法。譬如说，要证明一个边值问题解的存在性，我们也经常采用迭代法，换句话说，我们和你们一样，确实也构造了一系列近似解，唯一的区别在于你们只是假定迭代过程可以产生唯一的解，而我们证明了这一点。还有，在我看来，你们用于解弹性力学和结构力学问题的所谓“能量法”，与变分学中的直接方法密切相关，我指的是，不解欧拉-拉格朗日微分方程，直接构造有给定边值的极小化函数的方法。我觉得，在纯粹数学分析与应用数学之间毕竟存在许多共同之处。

工程师：我并不否认这一点，事实上，我一向认为，分析是应用数学的支柱。不过，要是你真正着手把分析应用到实际情形中去，你就会看到，从掌握一种近似方法的一般概念到成功地应用这种方法，还有很多工作要做。比方说，存在着可资利用的时间和人力的问题。做某些类型工作时，我们可以用精巧的机械装置或电动装置，象微分分析仪或电动计算机之类。然而，在大多数场合下，我们必须不借助于这种手段进行计算，这时，光知道近似过程的收敛性就不够了，我们还得确定用哪一种方法能在最短的时间内得到具有给定近似程度的解，必须对逐次近似所改进的准确度作出恰当的估计，所有这些实际问题要求我们进行艰苦的数学研究。我认为，我们确实需要数学家的帮助，来改进我们的直观方法，或许不妨说，对我们的直观方法加以评论和系统化。事实上，要把数学成功地应用于工程问题，需要数学家与工程师的密切合作。在表面上截然不同的领域里找出作为它们基础的共同的数学关系，这决不是一件轻而易举的事。打算搞应用数学研究的数学家必须对所涉及的物理过程有相当透澈的了解。另一方面，为了适当地利用数学工具，工程师必须深入钻研数学分析的基本原理，并达到相当高的水平。把一堆机床杂乱无章地拼凑起来，成不了一个高效率的金工车间。我们知道，在你们的数学宝库里有着非常管用的机床，摆在我们面前的任务是要懂得如何调整、使用它们。

数学家：我觉得你的话有些道理。把你的譬喻引伸一步，为了成批解决工程问题，你们还需要某种机床设计师——真正的应用数学家。他们的原有经历可以是各种各样的：可以来自纯粹数学界、物理学界或工程科学界，但他们的共同目标是为工程科学提供数学工具。

中国科学院北京力学研究所　李家春　戴世强

译自美国应用数学季刊(Quarterly of Applied Mathematics)创刊号 2—6 页，(1943)