

# 柴油机排气管内不定常流的分析和计算\*

柳兆荣 陈金娥

(上海复旦大学, 1980年3月8日收到)

## 摘 要

本文利用特征线法, 对柴油机排气管内的不定常非等熵流动进行了分析、计算。由于在计算中, 特别是在边界条件的计算中做了较好的归结和处理, 因而使得计算程序具有一定的通用性, 收敛也相当快。文章以 6135 涡轮增压柴油机排气管为例进行数值计算, 结果相当满意。

## 符 号 说 明

- $k$ ——绝热指数,                       $p_0$ ——参考压力,                      @——参考音速,  
 $p$ ——压力,                               $\rho$ ——流体密度,                       $u$ ——流体速度,  
 $T$ ——温度,                               $s$ ——熵,                               $F$ ——管道横截面积,  
 $c$ ——管截面周长,                       $d$ ——管截面水力直径 ( $=\frac{4F}{c}$ )  
 $\tau_0$ ——管壁单位面积上的摩擦力,  
 $q$ ——单位时间内单位质量流体所吸收的热量,  
 $\lambda, \beta$ ——Riemann 变量,  
 $a_n$ ——状态等熵变化到参考压力  $p_0$  后气体的音速,  
 $m_c$ ——释放时缸内质量,               $M$ ——无量纲质量 ( $=\frac{m}{m_{cr}}$ ),  
 $r$ ——无量纲压力 ( $=\frac{p}{p_0}$ ),  
 $l$ ——活塞长度,                       $\alpha$ ——曲柄转角,                       $n$ ——发动机转速,  
 $V_c$ ——气缸容积,                       $\phi$ ——当量喷嘴有效面积与管截面积之比,  
 $\psi$ ——气阀有效面积与管截面积之比。

足标说明:

- $c$ ——气缸,                               $N$ ——涡轮,                               $r$ ——喉道 (气阀或当量喷嘴),  
 $ex$ ——排气管,                               $i$ ——进气管,                               $0$ ——滞止状态,  
 $cr$ ——释放状态,                               $in$ ——流入,                               $out$ ——流出,

\* 欧明邕推荐。

## 一、前言

在涡轮增压柴油机中, 气缸内排出的废气, 流经排气管进入涡轮, 并推动涡轮做功, 进一步带动压气机工作, 从而压缩新鲜空气经进气管进入气缸. 这种柴油机的性能很大程度上取决于废气能量的利用和在气体更换时期内, 新鲜空气的充填量. 由于柴油机活塞的周期运动与进、排气阀的周期启、闭, 因而进、排气管内气体的流动是不定常的脉动流. 这种不定常流产生的压力波在进、排气管内传播, 其传播特征将严重影响气体更换过程的进行, 从而直接影响到发动机的性能. 因而, 有关进、排气管, 特别是有关排气管内压力波的分析将是整个柴油机配套分析中十分重要的一环.

由于排气管内气体的流动是不定常的脉动流; 气缸排出废气温度相当高, 经排气管内流动时熵的变化十分大, 排气管内的流动必须认为是非等熵的; 再加上在排气管中会遇到诸如气缸、涡轮、分叉管接头、异径管接头等各种边界, 边界条件相当复杂. 因而, 就使得排气管内不定常流的分析十分困难. 虽然十几年前, Benson<sup>[1-3]</sup> 已成功地利用特征线法对排气管的不定常非等熵流进行了计算, 但整个计算过程有待进一步的摸索, 特别是对某些细节, 更有待结合具体情况作进一步的改进.

本文利用 Benson 方法, 对涡轮增压柴油机排气管内的不定常非等熵流动进行了分析与计算. 在计算中尽量使结果具有通用性, 并且在某些力学模型归结的合理性与数值迭代的技巧性方面做了些努力. 因而, 使整个计算收敛得比较快. 我们曾用所编的计算程序, 对 6135 柴油机的排气管, 在 719 机上, 仅用半小时左右时间(包括曲柄转角每  $5^\circ$  打印一次的时间在内), 就可对某一工况完成三个周期的计算. 计算结果表明, 第三周期与第二周期的波形已吻合得很好.

本文的工作得到上海内燃机研究所吴丰璋同志的大力协助, 陈维杜、卜锋等同志曾参加过部分工作, 在此一并表示感谢.

## 二、基本方程及其特征形式

柴油机排气管系内的流动是十分复杂的, 为了便于计算, 根据排气管系流动的特点, 我们假定排气管的截面积是缓慢变化的, 管壁是刚性的, 排气管内的流体认为是完全气体, 并且不计重力影响, 管内的流动是不定常非等熵的一元脉动流. 因此, 我们得到描述一元不定常管流的基本方程为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{d \ln F}{dx} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\rho} \frac{4}{d} \text{sign } u \quad (2.2)$$

$$T \frac{ds}{dt} = q + \frac{\tau_0}{\rho} \frac{4}{d} u \text{ sign } u \quad (2.3)$$

$$p = R\rho T \quad (2.4)$$

结合状态方程 (2.4), 我们可知, 基本方程 (2.1) - (2.3) 是含有三个未知量为  $u$ 、 $p$

与  $s$ ，两个自变量为  $x$ 、 $t$  的一阶拟线性双曲型偏微分方程组，其相应的特征形式为<sup>[1]</sup>：

沿着特征线  $\frac{dx}{dt} = u + a$ ，有

$$du + \frac{1}{\rho a} dp = \left[ -au \frac{d \ln F}{dx} + \frac{k-1}{a} q - \frac{4}{d} \frac{\tau_0}{\rho} \operatorname{sign} u \left( 1 - \frac{k-1}{a} u \right) \right] dt \quad (2.5)$$

沿着特征线  $\frac{dx}{dt} = u - a$ ，有

$$du - \frac{1}{\rho a} dp = \left[ au \frac{d \ln F}{dx} - \frac{k-1}{a} q - \frac{4}{d} \frac{\tau_0}{\rho} \operatorname{sign} u \left( 1 + \frac{k-1}{a} u \right) \right] dt \quad (2.6)$$

沿着特征线  $\frac{dx}{dt} = u$ ，有

$$Tds = \left[ q + \frac{4}{d} \frac{\tau_0}{\rho} u \operatorname{sign} u \right] dt \quad (2.7)$$

为了计算的方便，我们将未知量  $u$ 、 $p$  与  $s$  用  $\lambda$ 、 $\beta$  与  $a_0$  来代替。其中  $\lambda$ 、 $\beta$  为 Riemann 变量，分别为

$$\lambda = a + \frac{k-1}{2} u \quad \beta = a - \frac{k-1}{2} u \quad (2.8)$$

又  $a_0$  是衡量流体质点熵值的参量，它表示状态等熵变化到参考压力  $p_0$  后该气体的声速，故它为

$$a_0 = a \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{2k}} \quad (2.9)$$

为了方便起见，我们进一步将上述特征方程无量纲化。为此，我们选取特征长度为  $L$ ，特征速度为  $@$ 。若用大写字母表示相应参量的无量纲值，那末有：

$$\text{无量纲距离 } X = \frac{x}{L};$$

$$\text{无量纲时间 } Z = \frac{@t}{L};$$

$$\text{无量纲 Riemann 变量 } A = \frac{\lambda}{@}, \quad B = \frac{\beta}{@};$$

$$\text{无量纲速度 } U = \frac{u}{@}, \quad A = \frac{a}{@}, \quad A_0 = \frac{a_0}{@};$$

$$\text{无量纲水力学直径 } D = \frac{d}{L}.$$

因而得无量纲的特征方程为：

沿着  $\frac{dX}{dZ} = cA - bB$  时，有

$$dA = (\delta A)_e + (\delta A)_a + (\delta A)_t + (\delta A)_h \quad (2.10)$$

沿着  $\frac{dX}{dZ} = bA - cB$  时, 有

$$dB = (\delta B)_e + (\delta B)_a + (\delta B)_f + (\delta B)_h \quad (2.11)$$

沿着  $\frac{dX}{dZ} = \frac{A-B}{k-1}$  时, 有

$$dA_0 = (\delta A_0)_f + (\delta A_0)_h \quad (2.12)$$

其中常数  $c$  与  $b$  分别为

$$c = \frac{k+1}{2(k-1)}, \quad b = \frac{3-k}{2(k-1)}$$

足标  $e$ 、 $a$ 、 $f$  与  $h$  分别表示由于熵、截面积、摩擦与热传导所引起的变化, 其具体表达式为:

$$(\delta A)_e = (\delta B)_e = -\frac{k-1}{2} AU \frac{d \ln F}{dX} dZ$$

$$(\delta A)_a = (\delta B)_a = \frac{A}{A_0} dA_0$$

$$(\delta A)_h = (\delta B)_h = \frac{(k-1)^2}{2} \frac{q}{A} \frac{L}{@^3} dZ$$

$$(\delta A)_f = -\frac{k-1}{2} \frac{4}{D} \frac{\tau_0}{\rho} \left[ 1 - (k-1) \frac{U}{A} \right] \frac{1}{@^2} \text{sign } U dZ$$

$$(\delta B)_f = \frac{k-1}{2} \frac{4}{D} \frac{\tau_0}{\rho} \left[ 1 + (k-1) \frac{U}{A} \right] \frac{1}{@^2} \text{sign } U dZ$$

$$(\delta A_0)_f = \frac{k-1}{2} \frac{A_0}{A} \frac{U}{A} \frac{4}{D} \frac{\tau_0}{\rho} \text{sign } U \frac{1}{@^2} dZ$$

$$(\delta A_0)_h = \frac{k-1}{2} \frac{L}{@^3} \frac{A_0}{A^2} q dZ$$

以上诸式中,  $\tau_0$  与  $q$  的具体形式为

$$\tau_0 = \frac{1}{2} f \rho u^2 = \frac{1}{2} f \rho U^2 @^2 \quad (2.13)$$

$$q = \frac{2}{k-1} \frac{f @^3}{DL} U \text{sign } U (A_w^2 - A^2) \quad (2.14)$$

其中足标  $w$  表示管壁上的值。

方程 (2.10)–(2.12) 是我们进行数值求解的基本方程, 并且分别将这三个方程所对应的三族特征线称为  $A$  特征线、 $B$  特征线与  $A_0$  特征线。

### 三、基本方程的数值求解

为了进行数值求解, 首先在  $X-Z$  平面上用正交网格来离散化方程 (2.10)–(2.12)。由

于这种特征线法是条件稳定的, 当在  $X$  方向的步长根据精度要求一旦选定之后,  $Z$  方向的步长就不能随意选取了, 而应根据 *Courant-Friedrichs* 稳定性准则来选取. 即当  $\Delta X$  一旦选定之后, 时间步长  $\Delta Z$  应满足

$$\Delta Z \leq \frac{1}{A + |U|} \Delta X \quad (3.1)$$

在正交网格中, 若上一时刻  $Z_1$  的各网格点上的流动参量  $A, B$  与  $A_0$  值全部已知, 我们的任务是通过基本方程 (2.10)–(2.12) 求解本时刻  $Z_2 = Z_1 + \Delta Z$  时各网格点上的流动参量.

若以图 1 所示的两个相邻网格为例, 则利用线性插值不难求得  $R, S$  与  $T$  点上的流动参量值分别为:

$$\begin{pmatrix} A_R \\ B_R \\ A_{a_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \\ A_{a_l} \end{pmatrix} - \left( \frac{\delta X_R}{\Delta X} \right) \begin{pmatrix} A_l - A_{l-1} \\ B_l - B_{l-1} \\ A_{a_l} - A_{a_{l-1}} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{pmatrix} A_s \\ B_s \\ A_{a_s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \\ A_{a_l} \end{pmatrix} - \left( \frac{\delta X_s}{\Delta X} \right) \begin{pmatrix} A_l - A_{l+1} \\ B_l - B_{l+1} \\ A_{a_l} - A_{a_{l+1}} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

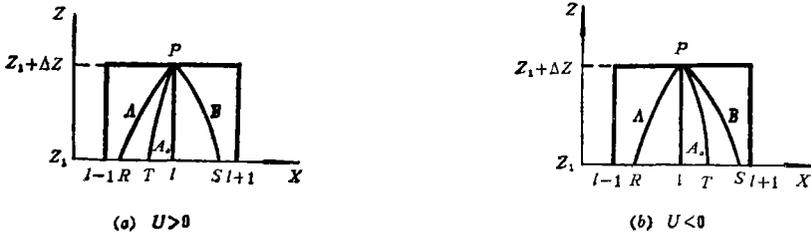


图 1 特征线解法示意图

若  $U > 0$  时, 有

$$\begin{pmatrix} A_T \\ B_T \\ A_{a_T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \\ A_{a_l} \end{pmatrix} - \left( \frac{\delta X_T}{\Delta X} \right) \begin{pmatrix} A_l - A_{l-1} \\ B_l - B_{l-1} \\ A_{a_l} - A_{a_{l-1}} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

若  $U < 0$  时, 有

$$\begin{pmatrix} A_T \\ B_T \\ A_{a_T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l \\ B_l \\ A_{a_l} \end{pmatrix} - \left( \frac{\delta X_T}{\Delta X} \right) \begin{pmatrix} A_l - A_{l+1} \\ B_l - B_{l+1} \\ A_{a_l} - A_{a_{l+1}} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

式中

$$\frac{\delta X_R}{\Delta X} = \frac{cA_l - bB_l}{\left( \frac{\Delta X}{\Delta Z} \right) + c(A_l - A_{l-1}) - b(B_l - B_{l-1})} \quad (3.6)$$

$$\frac{\delta X_s}{\Delta X} = \frac{cB_l - bA_l}{\left( \frac{\Delta X}{\Delta Z} \right) + c(B_l - B_{l+1}) - b(A_l - A_{l+1})} \quad (3.7)$$

$$\frac{\delta X_T}{\Delta X} = \frac{(A_l - B_l)/(k-1)}{\left(\frac{\Delta X}{\Delta Z}\right) + (A_l - A_{l-1})/(k-1) - (B_l - B_{l-1})/(k-1)}, \quad (\text{当 } U > 0), \quad (3.8)$$

或

$$\frac{\delta X_T}{\Delta X} = \frac{(B_l - A_l)/(k-1)}{\left(\frac{\Delta X}{\Delta Z}\right) + (B_l - B_{l+1})/(k-1) - (A_l - A_{l+1})/(k-1)}, \quad (\text{当 } U < 0), \quad (3.9)$$

最后, 我们得到  $Z_l + \Delta Z$  时刻, 任一管内网格点  $P$  的参量值为:

$$A_{a_p} = A_{a_T} + (\delta A_{a_l})_T + (\delta A_{a_h})_T \quad (3.10)$$

$$A_P = A_R + \left(\frac{A}{A_a}\right)_R (A_{a_p} - A_{a_R}) + (\delta A_a)_R + (\delta A_h)_R + (\delta A_l)_R \quad (3.11)$$

$$B_P = B_S + \left(\frac{A}{A_a}\right)_R (A_{a_p} - A_{a_S}) + (\delta B_a)_S + (\delta B_h)_S + (\delta B_l)_S \quad (3.12)$$

其中足标  $P$ 、 $R$ 、 $S$ 、 $T$ 、 $l-1$ 、 $l$  与  $l+1$  分别表示所在相应点上的参量值。

#### 四、边界条件的概述

由于过边界网格点  $P$  的三族特征线中, 至少有一族特征线落在管段之外, 这时就不能完全由上一时刻的网格点上的参量值来确定  $P$  点的全部参量值, 而必须应用相应的边界条件来作为补充条件。

若以管段的左边界为例 (见图 2), 那末当  $U \leq 0$  时, 则可由 (3.10) 与 (3.12) 式定出  $P$  点的  $A_{a_p}$  与  $B_p$ , 至于  $A_P$  则由相应的边界条件来定出。

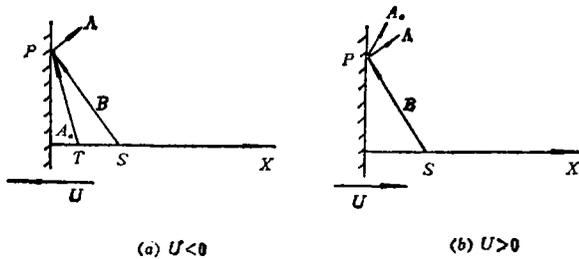


图 2 左边界特征线分布情况

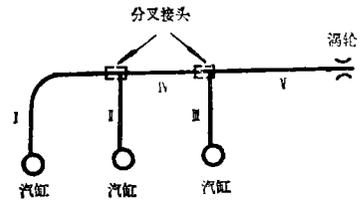


图 3 排气管系的边界概况

若对于  $U > 0$  情况, 此时 (3.10)~(3.12) 式不能完全定出  $A_P$ 、 $B_P$  与  $A_{a_p}$  中的任何一个, 为此就要求由相应的边界条件经过反复的迭代运算来求得  $A_{a_p}$ 、 $A_P$  与  $B_P$  值。

为了运用柴油机排气管系的边界条件来确定边界网格点的参量值, 首先让我们来分析一下排气管系的边界概况。对于如图 3 所示的四冲程涡轮增压柴油机排气管系, 将包含有气缸边界、涡轮边界与分叉接头边界三种。对于这三种主要边界, 若我们暂且不考虑边界的具体

情况，而只考虑粗略的几何形状，那末可以归结为图 4 所示的管端收缩、管端扩大与管端分叉等三种情况。

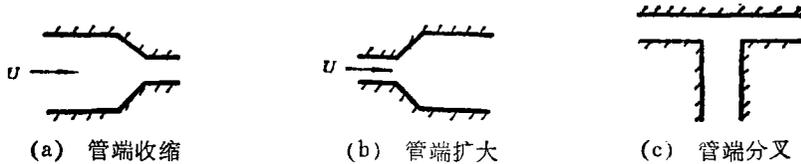


图 4 排气管系边界的几何形状归结

针对排气管系的边界特征，为了数值求解的方便，我们对于边界问题的处理假定管端边界区域相对于整个管段来说短得多，但由于边界处截面积的急剧变化，流动参量随距离的变化比随时间的变化大得多，故在边界区域处可略去流动参量随时间的变化，认为边界点的流动是拟定常的；由于边界区域的尺寸较小，可略去边界点区域内流体质量的堆积；由于边界区域距离很短，再加上流体流动过程进行得较快，以致来不及进行热交换，故对边界流动作绝热的假定；又由于边界局部截面积的急剧变化，气流将产生旋涡、碰撞等现象，从而伴随着较大的能量损失，因而一般说，边界区域流动应认为是不等熵的。但是对于图 4 (a) 的管端收缩情况，由于局部能量损失较小，故可近似当作等熵过程处理。但对于图 4 (b)(c) 的管端扩大与管端分叉情况，由于局部能量损失较大，故只能做不等熵过程处理。对于不等熵边界，我们根据不同的具体情况，又可归结为“等压模型”或“突扩模型”两种。前者适用于气缸正、反向流，涡轮正向流，此时认为喉道压力等于喉道下游压力（当喉道亚音速流时）。后者适用于涡轮倒流情况，此时认为喉道压力与壁面压力相等

### 五、气 缸 边 界 条 件

当排气阀开启时，气缸内状态将对排气道内流动状态直接有影响，因此在计算气缸边界网格点的流动参量之前，首先要进行缸内状态的计算。

#### (1) 缸内状态的计算

下面分别对缸内质量  $M_c$ 、缸内压力  $r_c$  与缸内音速  $A_c$  进行计算。

缸内气体质量  $M_c$  表为

$$M_c = (M_c)_{\text{上一时刻}} + \left( \frac{dM_c}{d\alpha} \right)_{\text{上一时刻}} d\alpha \quad (5.1)$$

其中缸内气体质量随曲柄转角  $\alpha$  的变化率为

$$\frac{dM_c}{d\alpha} = \frac{dM_s}{d\alpha} - \frac{dM_{ex}}{d\alpha} \quad (5.2)$$

并且通过排气阀流出的气体质量随曲柄转角  $\alpha$  的变化率为

$$\frac{dM_{ex}}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{F}{F_c} \right) \left( \frac{a_{c,r}^2}{l_{c,n@}} \right) \left( \frac{U}{A^2} \right) \left( \frac{r}{r_{cr}} \right) \quad (5.3)$$

通过进气阀的气体质量随曲柄转角  $\alpha$  的变化率为

$$\frac{dM_s}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{k-1}} \left( \frac{r_{so}}{r_{cr}} \right) \left( \frac{r_o}{r_{so}} \right)^{\frac{1}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{r_o}{r_{so}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{F_s}{F_c} \frac{a_{cr}^2}{l_{cr} n a_o} \quad (5.4)$$

对于进气阀入流, 或

$$\frac{dM_s}{d\alpha} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{k-1}} \frac{r_c}{r_{cr}} \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{\frac{1}{k}} \left[ 1 - \left( \frac{r_s}{r_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{F_s}{F_c} \frac{a_{cr}^2}{l_{cr} n a_o} \quad (5.5)$$

对于进气阀出流,

缸内压力  $r_c$  为

$$r_c = (r_c)_{\text{上一时刻}} + \left( \frac{dr_c}{d\alpha} \right)_{\text{上一时刻}} d\alpha \quad (5.6)$$

其中缸内压力随曲柄转角  $\alpha$  的变化率为

$$\frac{dr_c}{d\alpha} = k r_{cr} \left( \frac{V_c}{V_c} \right) \left( \frac{A_{in}^2}{A_c^2} \right) \left( \frac{dM_{in}}{d\alpha} - \frac{A_{out}^2}{A_{in}^2} \cdot \frac{dM_{out}}{d\alpha} \right) - \frac{k r_c}{V_c} \frac{dV_c}{d\alpha} \quad (5.7)$$

其中足标 *in* 表示气缸入流, *out* 表示气缸出流. 气缸体积  $V_c$  及其随  $\alpha$  的变化率  $\frac{dV_c}{d\alpha}$  则由具体的曲柄连杆机构来决定.

最后, 缸内气体的音速  $A_c$  可表为

$$A_c^2 = \frac{r_c}{r_o} \cdot \frac{V_c}{V_{cr}} \cdot \frac{A_{cr}^2}{M_c} \quad (5.8)$$

## (2) 气缸边界网格点的计算

排气阀处于不同流向, 对气缸边界网格点的计算有很大的影响, 因而在进行气缸边界网格点的计算之前, 首先要判断流向. 判断流向利用一个参量  $T_*$ , 其定义为

$$T_* = \frac{B}{A_o r \frac{k-1}{2k}} \quad (5.9)$$

并且认为当  $T_* < 1$  时, 排气阀正向流; 当  $T_* = 1$  时, 排气阀无流; 当  $T_* > 1$  时, 排气阀反向流.

首先, 我们考虑排气阀正向流情况.

由于此时边界网格点上的  $A$ 、 $B$  与  $A_o$  值都不能完全确定, 为此我们得先假定一个初估值  $(A\alpha)_{ini}$ , 进行迭代运算, 直到满足精度为止.

认为缸内状态为滞止状态, 于是对于气缸边界区域内满足如下 *Bernoulli* 方程

$$A^2 + \frac{k-1}{2} U^2 = A_o^2$$

或写为

$$\left( \frac{A}{A_c} \right)^2 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{U}{A_c} \right)^2 = 1 \quad (5.10)$$

由于此时流体质点速度  $U$  满足不等式

$$0 < U < A$$

即有

$$1 > \frac{B}{A_c} > \frac{3-k}{2} \sqrt{\frac{2}{k+1}},$$

于是得排气阀正向流时  $A_0$  所取值的范围为

$$\left\{ A_{0_1} + \left( \frac{3-k}{2} \sqrt{\frac{2}{k+1}} A_c - B_s \right) / \left( \frac{A+B}{2A_0} \right)_s \right\} < A_0 < \left\{ (A_c - B_s) / \left( \frac{A+B}{2A_0} \right)_s + A_0 \right\} \quad (5.11)$$

我们可应用对分法来求  $A_0$ , 为此, 若记

$$A_{0_1} = A_0 + \left( \frac{3-k}{2} \sqrt{\frac{2}{k+1}} A_c - B_s \right) / \left( \frac{A+B}{2A_0} \right)_s,$$

$$A_{0_2} = A_0 + (A_c - B_s) / \left( \frac{A+B}{2A_0} \right)_s,$$

于是可取

$$\left. \begin{aligned} (A_0)_{\text{test}} &= \frac{1}{2} (A_{0_1} + A_{0_2}) \\ (\Delta A_0)_{\text{test}} &= \frac{1}{2} (A_{0_2} - A_{0_1}) \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

于是可求得  $B$  与  $A$  的表达式为

$$B = B_s + \left( \frac{A+B}{2A_0} \right)_s (A_{0_{\text{test}}} - A_0) \quad (5.13)$$

$$A = \frac{3-k}{k+1} B + \frac{2}{k+1} \sqrt{2(k-1) \left[ \frac{k+1}{2} A_0^2 - B^2 \right]} \quad (5.14)$$

然后, 我们再重新计算  $A_0$  值为

$$(A_0)_{\text{计算}} = \left( \frac{A+B}{2} \right) \left[ \frac{1}{\left( \frac{r}{r_c} \right) \cdot r_c} \right]^{\frac{k-1}{2k}} \quad (5.15)$$

其中

$$\frac{r}{r_c} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \psi \frac{1 - \frac{k-1}{2} \left( \frac{U}{A_c} \right)^2}{\frac{U}{A_0}} \quad (5.16)$$

当排气阀处为音速流时; 以及

$$\frac{r}{r_c} = \left\{ \frac{1}{k-1} \left[ 1 - \frac{k-1}{2} \left( \frac{U}{A_c} \right)^2 \right]^2 \right\} \frac{1}{\left( \frac{U}{A_0} \right)^2}$$

$$\cdot \left[ \psi \sqrt{\psi^2 + \frac{2(k-1)(U/A_c)^2}{\left[1 - \frac{k-1}{2} \left(\frac{U}{A_c}\right)^2\right]^2} - \psi^2} \right]^{\frac{k}{k-1}} \quad (5.17)$$

当排气阀处为亚音速流时，式中气阀开度角  $\psi$  由气阀的具体结构决定。

若  $(A_a)$  计算同  $(A_a)_{test}$  的误差落在我们所要求的精度范围之内，则迭代运算完成。否则应选取新的  $A_a$  初值为

$$(\Delta A_a)'_{test} = \frac{1}{2} (\Delta A_a)_{test}$$

$$(A_a)'_{test} = (A_a)_{test} + (\Delta A_a)'_{test} \text{Sign} [(A_a)_{\text{计算}} - (A_a)_{test}]$$

然后重复上述运算步骤，直到满足精度要求为止。

其次，我们对排气阀反流情况进行讨论。此时  $A_a$  与  $B$  直接由特征关系 (3.10) 与 (3.12)

求得。下面利用边界条件求  $A$  值，为此判断  $\left| \frac{U_t}{A_t} \right|$  值（它等于

$$\sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{A}{A_t} \right)^2 - 1 \right] / \left[ 1 - \psi^2 \left( \frac{A}{A_t} \right)^{-\frac{4}{k-1}} \right]},$$

当  $\left| \frac{U_t}{A_t} \right| < 1$  时气阀为亚音速流，否则为音速流。

当气阀处为亚音速流时，可由方程

$$\left[ \left( \frac{A}{A_t} \right)^{\frac{4}{k-1}} - \psi^2 \right] \left( \frac{A}{A_t} - \frac{B}{A_t} \right)^2 - \frac{k-1}{2} \psi^2 \left[ \left( \frac{A}{A_t} \right)^2 - 1 \right] = 0 \quad (5.18)$$

求出  $\left( \frac{A}{A_t} \right)$  值，从而求出  $A$  值为

$$A = 2 \left( \frac{A}{A_t} \right) A_t - B = 2 \left( \frac{A}{A_t} \right) r_c^{\frac{k-1}{2k}} A_a - B \quad (5.19)$$

当气阀处为音速流时，可由方程

$$\psi^2 - \left[ \frac{k+1}{k-1} - \frac{2}{k-1} \left( \frac{A}{A_t} \right)^2 \right] \left( \frac{A}{A_t} \right)^{\frac{4}{k-1}} = 0 \quad (5.20)$$

求出  $\left( \frac{A}{A_t} \right)$  值，从而求出  $A$  值为

$$A = \frac{\left( \frac{A}{A_t} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} + \left( \frac{k-1}{2} \right) \psi}{\left( \frac{A}{A_t} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} - \left( \frac{k-1}{2} \right) \psi} B \quad (5.21)$$

最后，我们讨论排气阀无流情况。此时由于气阀处流速  $U$  等于零，此时根据 (3.10) — (3.12) 式立即可得气缸网格点值为

$$A_a = (A_a)_{\text{上一时刻}}$$

$$A = B = B_s + \left( \frac{A}{A_a} \right)_s (A_a - A_{a_s}) + (\delta B_a)_s + (\delta B_b)_s + (\delta B_f)_s \quad (5.22)$$

## 六、涡轮边界条件

对于涡轮边界处理,我们也同工程上处理办法一样,即建立“当量喷嘴”模型,认为排气道与涡轮之间用一个当量喷嘴来连接,并且认为涡轮处为常压、常温状态,而且当量喷嘴面积是一个考虑了流量损失后的恒定常量。

对涡轮边界网格点的计算,也分三种流动情况进行处理,流向用参量  $N_e = \frac{A}{A_a r_N^{\frac{k-1}{2k}}}$  来判别。当  $N_e > 1$  时,为涡轮正向流;  $N_e = 1$  时,涡轮无流;  $N_e < 1$  时,涡轮反向流。

首先,对涡轮正向流,  $A_a$  与  $A$  可由 (3.10)、(3.11) 式定出,只要求  $B$  值,此种情况与前面讨论的气缸反向流情况完全相同,不再重复。

其次,对涡轮反向流,此时边界网格点  $A_a$ 、 $A$  与  $B$  全不确定。为此需与气缸正向流一样先选取初估值进行反复迭代。但不同的是此时应认为从当量喷嘴到排气管的流动是符合“突扩模型”的,这是因为通过当量喷嘴后压力有所恢复之故。

显然,我们同样可以确定  $A_a$  的取值范围为

$$\left\{ A_{aR} + \left( \frac{3-k}{2} \sqrt{\frac{2}{k+1}} A_N - A_R \right) / \left( \frac{A+B}{2A_a} \right)_R \right\} < A_a < \left\{ (A_N - A_R) / \left( \frac{A+B}{2A_a} \right)_R + A_{aR} \right\} \quad (6.1)$$

若记

$$A_{an_1} = A_{aR} + \left( \frac{3-k}{2} \sqrt{\frac{2}{k+1}} A_N - A_R \right) / \left( \frac{A+B}{2A_a} \right)_R$$

$$A_{an_2} = (A_N - A_R) / \left( \frac{A+B}{2A_a} \right)_R + A_{aR}$$

于是可取第一次初估值为

$$(A_a)_{est} = \frac{1}{2} (A_{an_1} + A_{an_2})$$

$$(\Delta A_a)_{est} = \frac{1}{2} (A_{an_2} - A_{an_1})$$

根据 (3.11) 式可得  $A$  值为

$$A = A_R + \left( \frac{A}{A_a} \right)_R (A_{a_{est}} - A_{aR}) \quad (6.2)$$

由 Bernoulli 方程得

$$B = \frac{3-k}{k+1} A + \frac{2}{k+1} \sqrt{2(k-1) \left[ \frac{k+1}{2} A_N^2 - A^2 \right]} \quad (6.3)$$

另外,根据涡轮边界情况,建立这样的力学模型,即认为从涡轮到喷嘴喉口流动为等熵,喉口到排气管流动是“突扩”的,至于从涡轮到排气管的整个流动为绝热的。因而可得

关于  $\left| \frac{U_i}{A} \right|$  所满足的关系为<sup>[3]</sup>:

$$\left( k\phi - \frac{k-1}{2} \right) \left| \frac{U_i}{A} \right|^2 - \frac{\phi \left[ 1+k \left| \frac{U}{A} \right|^2 \right]}{\left| \frac{U}{A} \right|} \left| \frac{U_i}{A} \right| + \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \left| \frac{U}{A} \right|^2 \right] = 0 \quad (6.4)$$

显然, 当  $k\phi - \frac{k-1}{2} = 0$  时, 上述方程退化为一元一次方程, 其解为

$$\left| \frac{U_i}{A} \right| = \frac{1 + \frac{k-1}{2} \left| \frac{U}{A} \right|^2}{1+k \left| \frac{U}{A} \right|^2} \cdot \frac{\left| \frac{U}{A} \right|}{\phi} \quad (6.5)$$

方程 (6.4) 是关于  $\left| \frac{U_i}{A} \right|$  的一元二次方程, 仔细讨论其合理根的选取, 不难发现有<sup>[4]</sup>:

$$\left| \frac{U_i}{A} \right| = \begin{cases} L + \sqrt{L^2 - M}, & \text{当 } k\phi < \frac{k-1}{2}, \\ L - \sqrt{L^2 - M}, & \text{当 } k\phi > \frac{k-1}{2}. \end{cases} \quad (6.6)$$

$$(6.7)$$

式中

$$L = \frac{\phi \left[ 1+k \left( \frac{U}{A} \right)^2 \right]}{2 \left( k\phi - \frac{k-1}{2} \right) \left| \frac{U}{A} \right|}, \quad M = \frac{1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{U}{A} \right)^2}{k\phi - \frac{k-1}{2}}.$$

有了  $\left| \frac{U_i}{A} \right|$  之后, 即可进一步算出新的  $A_0$  值为

$$(A_0)_{\text{计算}} = \left[ \phi^{-1} \left| \frac{U}{A} \right| \cdot \left| \frac{U_i}{A} \right|^{-1} \right]^{\frac{k-1}{2k}} \cdot \left| \frac{A_i}{A} \right|^{-\frac{1}{k}} \cdot r_N^{-\frac{k-1}{2k}} \cdot A_N \quad (6.8)$$

其中

$$\left| \frac{U}{A} \right| = \frac{2}{k-1} \left| \frac{A-B}{A+B} \right|$$

$$\left| \frac{A_i}{A} \right| = \sqrt{1 + \frac{k-1}{2} \left[ \left( \frac{U}{A} \right)^2 - \left| \frac{U_i}{A} \right|^2 \right]}$$

若  $(A_0)_{\text{计算}}$  与  $(A_0)_{\text{迭代}}$  误差落在精度范围内, 则迭代运算结束. 否则同气缸正向流时类似, 重新进行迭代运算, 直到满足精度为止.

最后, 对于涡轮无流情况, 完全与气缸无流情况一样进行处理, 不再重复.

## 七、分叉接头边界条件

对于分叉接头, 我们采用“不等压, 不等熵”模型, 即认为每个分叉接头对应的三管压

力不等、熵不等。若选取相应三管朝向接头坐标  $x$  为正，于是当令

$$\left. \begin{aligned} A^* &= \frac{A}{A_0}, & U^* &= \frac{U}{A_0}, \\ A_{in}^* &= \frac{A_{in}}{A_0}, & A_{out}^* &= \frac{A_{out}}{A_0}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

$$\Delta A_{N}^* = A_{1}^* - A_{N}^*, \quad (N = 1, 2, 3) \quad (7.2)$$

其中  $A_n$  与  $A_{out}$  分别为进入接头与流出接头的 Riemann 变量。这时有基本方程为<sup>(2)</sup>

连续方程

$$\sum_{N=1}^3 F_N \frac{(A_{1}^* - \Delta A_{N}^*)^{k-1}}{A_{0N}} ({}_N A_{in}^* - A_{1}^* + \Delta A_{N}^*) = 0 \quad (7.3)$$

动量方程

$$\left(\frac{A_{N}^*}{A_{1}^*}\right)^{2k-1} + G_{1N} \left(\frac{A_{N}^*}{A_{1}^*}\right)^{k-1} - G_{2N} = 0 \quad (N=2,3) \quad (7.4)$$

其中

$$G_{1N} = ck \left(\frac{U_{N}^*}{A_{1}^*}\right)^2, \quad G_{2N} = ck \left(\frac{U_{1}^*}{A_{1}^*}\right)^2 + 1 \quad (N=2,3)$$

对于不同流型  $c$ ,  $G_{1N}$  与  $G_{2N}$  取值不同。

能量方程

$$A_{01}^2 \left( A_{1}^{*2} + \frac{k-1}{2} U_{1}^{*2} \right) = A_{02}^2 \left( A_{2}^{*2} + \frac{k-1}{2} U_{2}^{*2} \right) = A_{03}^2 \left( A_{3}^{*2} + \frac{k-1}{2} U_{3}^{*2} \right) \quad (\text{分散流}) \quad (7.5)$$

$$\sum_{N=1}^3 \left( A_{N}^{*2} + \frac{k-1}{2} U_{N}^{*2} \right) A_{N}^{*k-1} A_{0N} U_{N}^* F_N = 0 \quad (\text{聚合流}) \quad (7.6)$$

有了方程 (7.3)–(7.6)，我们对流出接头边界网格点上的  $A_0$  与  $\Delta A_N^*$  ( $N=2,3$ ) 选取初估值，进行反复迭代运算，最后求得接头三个边界网格点的  $A_0$ 、 $A$  与  $B$  值。

上述方程 (7.4)–(7.6) 都与流型有关，一般把三分叉接头分为六种流型 (表 1)，但实际上，由于模型归结与数值计算误差等原因，在迭代过程之中，也会出现三管流速全大于零或全小于零的情况。为了使计算封闭起见，我们增设两种流型，并称  $U_1 < 0$ 、 $U_2 < 0$  与  $U_3 < 0$  为流型 0，以及称  $U_1 > 0$ 、 $U_2 > 0$  与  $U_3 > 0$  为流型 7。对于这两种流型，我们取  $G_{1N} = 0$ 、 $G_{2N} = 1$ 、 $c = 0$ ，从而保证通过动量方程 (7.4) 后， $A_2^*$  与  $A_3^*$  仍取其原来值。这样，虽然我们增设了不切实际的两种流型，但仍不影响原来的力学模型。因为这两种不切实际的流型只出现在迭代过程之中，而当收敛后是不会出现的。

由于动量方程及能量方程与流型关系密切，按理说在进行一次数值计算时，每解一次方程就要先进行流型判别。但这样做极易引起解的大起大落变化。故我们在进行数值求解时，对方程 (7.3)–(7.5) (或 (7.6)) 这三个方程完成一次计算后才进行流型判别，这样做收敛较快。但是，这时根据已判别的流型由动量方程求得  $A_2^*$ 、 $A_3^*$  后，可能流型已发生变化，我们仍作原流型处理。于是在求解能量方程时， $A_0$  值跳动得较厉害。为了克服这个毛病，我们运用“松弛法”进行数值求解，即若一次迭代运算时  $A_0$  值从  $A_{0n}$  跳到  $A_{0_{n+1}}$

表1 三分叉接头的流型分类

	流 型	$U_1$	$U_2$	$U_3$
分 散 流	1	+	-	-
	2	-	+	-
	3	-	-	+
聚 合 流	4	-	+	+
	5	+	-	+
	6	+	+	-

( $N=1,2,3$ ), 则下一次迭代运算时就选取  $A'_{\sigma_N}$  为

$$A'_{\sigma_N} = A_{\sigma_N} + \delta [A_{\sigma_{cN}} - A_{\sigma_N}] \quad (7.7)$$

其中  $\delta$  为松弛因子。根据我们计算情况,  $\delta$  取 0.5 左右较为合适。

## 八、数 值 例 子

我们曾对 6135 型柴油机的多种工况进行了数值计算, 这儿以 1、2、3 缸相连的排气管系为例进行说明。

对于这一排气管系共有 5 个排气管段构成(如图 3 所示), 它们的长度分别为 546 毫米, 376 毫米, 376 毫米, 170 毫米, 1043 毫米; 直径都是 50 毫米。

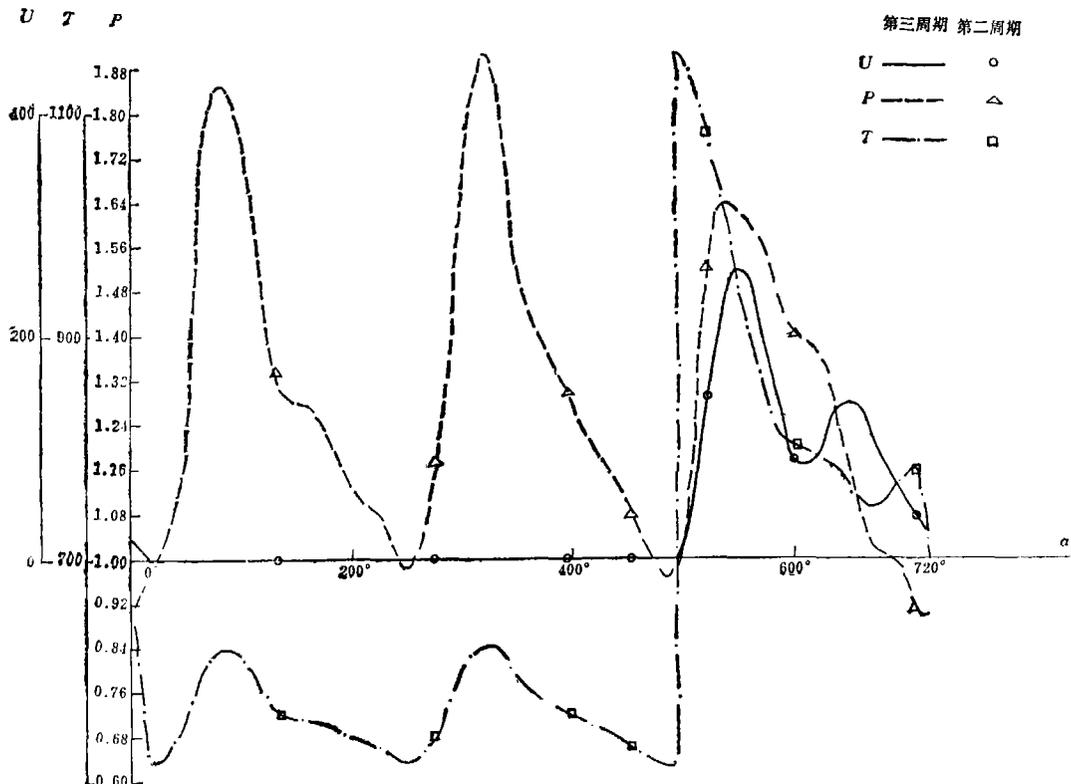


图 5

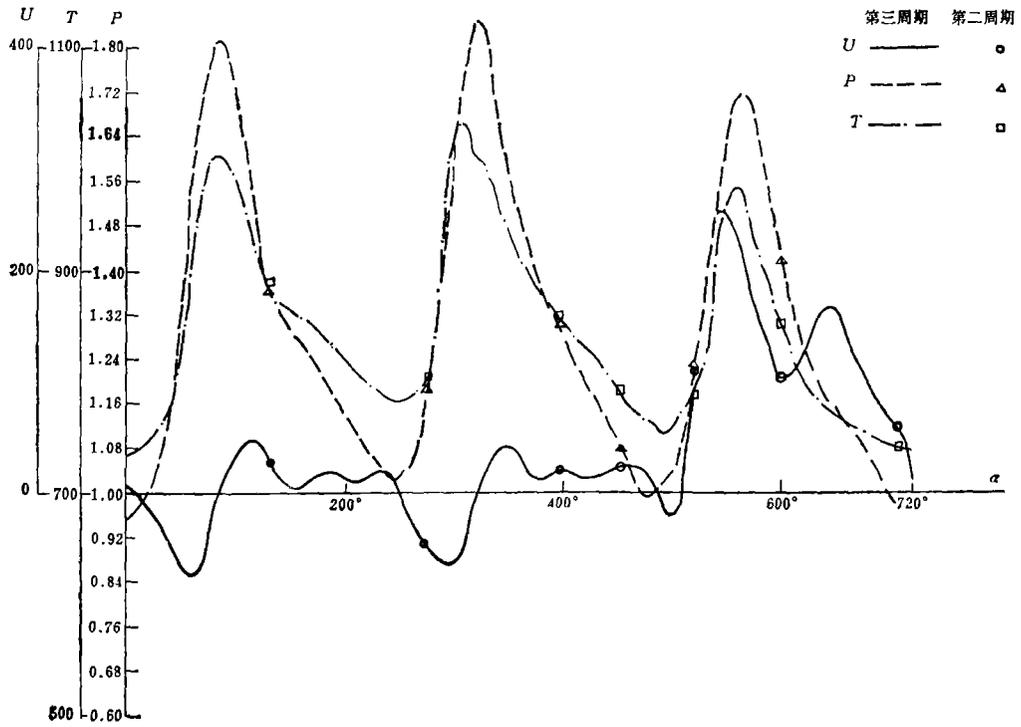


图 6

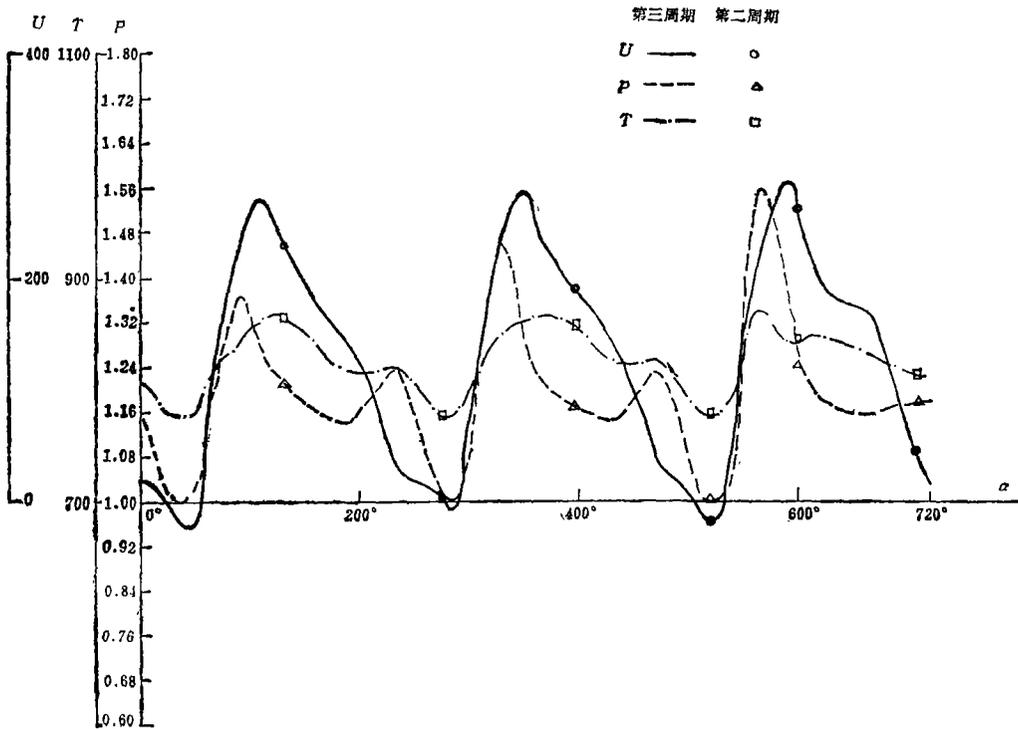


图 7

计算时采用的工况为：发动机转速  $n=2000$  转/分；压气机出口的空气温度为  $T_k=94^\circ\text{C}$ ，其压力为  $p_k=1.63\text{ kg/cm}^2$ ；涡轮后背压为  $p_N=1.005\text{ kg/cm}^2$ ；背温为  $T_N=505^\circ\text{C}$ ；气缸的释放压力为  $p_{cr}=5\text{ kg/cm}^2$ ，释放温度为  $T_{cr}=900^\circ\text{C}$ 。

对于这个排气管系我们划分为 19 个网格点进行计算，现将气缸边界网格点 (A)、分叉边界网格点 (B) 以及涡轮边界网格点 (C) (见图 3) 的第三周期的数值计算结果 (包括压力、速度、温度) 分别用曲线划出 (见图 5、6、7)。

从这些图上所给出的压力、速度与温度的曲线看，其波形是完全合理的。而且计算结果收敛得很快，第二与第三周期的计算结果已重合得很好。(图中曲线表示第三周期的计算结果，而符号  $\triangle$   $\circ$   $\square$  则表示相应参量的第二周期的计算结果)。

### 参 考 文 献

1. Benson, R. S., et al, A numerical solution of unsteady flow problems, *Intern. J. of Mech. Sci.*, 6, 1 (1964), 117-144.
2. Benson, R. S., et al, Unsteady flow in simple branch systems, *Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention*, Paper 17, IME, Cambridge. 9-10, April, (1964).
3. Benson, R. S., et al, Unsteady flow in pipe with gradual or sudden area changes, *Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention*, Paper 16, IME, Cambridge, 9-10, April, (1964).
4. Wards, W. A., et al, On the selection of a root of a quadratic equation applied to a problem in gas dynamics, *J. of Royal Aeron. Soc.*, 69, 655, July (1965).

## An Analysis and Calculation of Unsteady Flow through Exhaust System of Diesel Engines

Liu Zhao-rong    Chen Jin-e  
(Fudan University, Shanghai)

### Abstract

In this paper we make analysis and calculation for unsteady non-homoentropic flow through exhaust system of diesel engines by means of the characteristic method. With reference to certain rational reduction and treatment introduced into calculation, particularly for boundary conditions, the program of calculation is to have general applicability, while the convergence is quite fast. Finally, we take exhaust system of 6135 turbocharged engines as an illustrative example, its numerical results are quite good.