应用数学和力学, 第 26 卷 第 1 期(2005 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 01_0120_07

夹层圆板轴对称非线性弯曲和屈曲的样条函数解法*

侯朝胜, 张守恺, 林 锋

(天津大学 土木系, 天津 300072)

(刘人怀推荐)

摘要: 以三次 B 样条函数为试函数, 用配点法计算夹层圆板的非线性弯曲• 支座可以是弹性的• 夹层板采用 Reissner 模型• 荷载可为多项式型的分布荷载、均布边缘力矩、均布径向压力或均布径向预应力及它们的组合• 首次用非线性理论计算了夹层圆板的压曲临界荷载• 在均布荷载作用下的结果同幂级数解的结果作了比较, 说明样条配点法具有收敛范围大、精度高、编写程序通用的优点•

关 键 词: 夹层圆板; 大挠度; 屈曲; 样条配点法
中图分类号: TU33 文献标识码: A

引 言

Bruun[1]、Huang[2]、Wang[3] 发表了夹层圆板线性静力分析的论文, 刘人怀等建立了夹层圆板非线性弯曲方程[4] 并解决了一系列非线性问题[5~10]• 迄今为止, 尚未见到别的作者讨论夹层圆板受非均布荷载或均布边缘径向力的大挠度问题• 作者以三次 B 样条函数为试函数, 用配点法求解夹层圆板的大挠度•

一般地说, 如浮点数的有效数字足够长, 只要配点数 n 增加, 可得到更高精度的解答• 我们用不同的点数 n 计算同一问题, 比较它们的结果可判断解答的精度和收敛范围•

1 基本方程及边界条件

设夹层圆板半径为 c, 对其采用 Reissner 模型[11], 即由厚度为 t 的材料制成上、下表层, 它们和较轻的中间夹层粘合在一起• 假定材料服从虎克定律• 夹心横向不可压缩, 仅当受剪时才做功• 夹心中面法线在变形后保持直线• 垂直于中面的正应力很小而可忽略• 并设表层厚度 t 比起板的按两层中平面的距离 h 是很小的, 从而认为表层板的法向力与剪力沿其厚度均匀分布• 夹层板受轴对称分布荷载 $\overline{q}(r)$ 作用, 这儿 r 为径向坐标• 利用变分原理可导出夹层圆板大挠度的基本方程和边界条件[4]• 推导时应注意荷载 $\overline{q}(r)$ 不是常数, 可导出夹层板大挠度方程式为[4,11]:

* 收稿日期: 2003_12_22; 修订日期: 2004_08_22
作者简介: 侯朝胜(1945—) 男, 四川自贡人, 副教授(联系人. Tel: + 86_22_27407042; Fax: + 86_22_27400893; E_mail: lghcs@ 167. net. cn)

$$D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}+\frac{2tD}{Gh}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\bar{\sigma}_r\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}\right)-2t\bar{\sigma}_r\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}=$$

$$\frac{1}{r}\int_0^r\bar{q}(r)r\,\mathrm{d}r-\frac{D}{Gh}\frac{\mathrm{d}\bar{q}(r)}{\mathrm{d}r},\tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\bar{\sigma}_r)+\frac{E}{2r}\left(\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}\right)^2=0,\tag{2}$$

式中: 板的弯曲刚度 $D=Eth^2/(2(1-\mu^2))$, E 为表板弹性模量, μ 为表板的泊松比, G 为夹心剪切弹性模量, $\bar{w}$ 为挠度, $\bar{\sigma}_r$ 为表板的径向薄膜应力•

夹层板中面法线在径向平面内的转角 $\bar{\Psi}$ 可导出为[4]

$$\bar{\Psi}=-\frac{1}{Gh}\left[2t\bar{\sigma}_r\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}+\frac{1}{r}\int_0^r\bar{q}(r)r\,\mathrm{d}r\right]-\frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}r}\text{•}\tag{3}$$

引入下列无量纲量:

$$x=\left(\frac{r}{c}\right)^2,\ w=[2(1-\mu^2)]^{1/2}\frac{\bar{w}}{h},\ [\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_0,\sigma_p]=\frac{2tc^2}{D}[\bar{\sigma}_r,\bar{\sigma}_\theta,\bar{\sigma}_0,\bar{\sigma}_p],$$

$$\phi=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},\ [M_r,M_\theta,M_0]=[2(1-\mu^2)]^{1/2}\frac{c^2}{2Dh}[\bar{M}_r,\bar{M}_\theta,\bar{M}_0],$$

$$\lambda_1=\frac{2}{\beta_1c/D+1+\mu},\ \lambda_2=\frac{2}{2tE/(\beta_2c)+1-\mu},\ K=\frac{D}{Ghc^2},$$

$$\Psi=[2(1-\mu^2)]^{1/2}\frac{c^2}{2rh}\bar{\Psi},\ q=[2(1-\mu^2)]^{3/2}\frac{c^4}{16Eth^3}\bar{q}(r),$$

式中: $\bar{\sigma}_\theta$ 为表板的切向薄膜应力, $\bar{\sigma}_0$ 为均布边缘径向应力, $\bar{\sigma}_p$ 为均布边缘径向预应力, $\bar{\sigma}_0$ 和 $\bar{\sigma}_p$ 以受拉为正, $\bar{M}_r$、$\bar{M}_\theta$ 为板径向、切向弯矩, $\bar{M}_0$ 为均布边缘力矩; β_1 为边缘单位长度转动单位转角所需力矩, β_2 为边缘单位长度沿径向移动单位距离所需径向薄膜应力, K 为剪切参数•

夹层板的大挠度式(1)、(2)变成:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x\phi)+K\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x\sigma_r\phi)-\frac{1}{4}\sigma_r\phi=\frac{1}{x}\int_0^x q\,\mathrm{d}x-4K\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x},\tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x\sigma_r)+\phi^2=0\text{•}\tag{5}$$

我们可导出下面方程:

$$\sigma_\theta=\sigma_r+2x\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}x},\tag{6}$$

$$\Psi=-K\left(\sigma_r\phi+\frac{4}{x}\int_0^x q\,\mathrm{d}x\right)-\phi,\tag{7}$$

$$M_r=2x\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}+(1+\mu)\Psi,\tag{8}$$

$$M_\theta=2\mu x\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}+(1+\mu)\Psi\text{•}\tag{9}$$

问题的边界条件为:

$$\Psi_{x=0}\quad 有限,\tag{10}$$

$$(\sigma_r)_{x=0}\quad 有限,\tag{11}$$

$$\left(\Psi+\lambda_1\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1}=\frac{\lambda_1}{2}M_0,\tag{12}$$

$$\left(\sigma_r+\lambda_2\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1}=\left(1-\frac{1-\mu}{2}\lambda_2\right)\sigma_0+\frac{1-\mu}{2}\lambda_2\sigma_p,\tag{13}$$

$$w_{x=1}=0\text{•}\tag{14}$$

四种特殊支承刚度系数取值为:

1) 固定夹紧: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2/(1-\mu)$,

2) 可移夹紧: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$,

3) 铰支承: $\lambda_1 = 2/(1+\mu)$, $\lambda_2 = 2/(1-\mu)$,

4) 简单支承: $\lambda_1 = 2/(1+\mu)$, $\lambda_2 = 0$•

设分布荷载为多项式型如下:

$$\bar{q} = [2(1-\mu^2)]^{-3/2}\frac{16Eth^3}{c^4}q_0\sum_{j=0}^{p}d_j\left(\frac{r}{c}\right)^j, \tag{15}$$

则
$$q = q_0\sum_{j=0}^{p}d_jx^{j/2}, \tag{16}$$

式中: q_0, d_j 为无量纲量常数• 若 $p = 0$, $q(= q_0d_0)$ 为均布荷载•

2 问 题 求 解

采用配点法求解式(4), (5), 选三次 B 样条函数为试函数, 分划 x 定义域为 n 等分, 分点号依次为 0, 1, …, n• 虚设两个结点 -1, $n+1$, 取 $s = 1/n$, $x_i = i/n$, 设:

$$x\phi = \sum_{i=-1}^{n+1}B_i\ \Omega_3\left(\frac{x-x_i}{s}\right), \tag{17}$$

$$x\sigma_r = \sum_{i=-1}^{n+1}C_i\ \Omega_3\left(\frac{x-x_i}{s}\right), \tag{18}$$

式中: $\Omega_3((x-x_i)/s))$ 为三次B样条函数, B_i、C_i 为待定系数, 由三次B 样条函数的性质可得:

$$[x\phi]_{x=x_i} = \frac{B_{i-1}+4B_i+B_{i+1}}{6},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\phi]_{x=x_i} = \frac{B_{i+1}-B_{i-1}}{2s}•$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[x\phi]_{x=x_i} = \frac{B_{i-1}-2B_i+B_{i+1}}{s^2},\quad \phi_{x=0} = \frac{B_1-B_{-1}}{2s}•$$

对 $x\sigma_r$ 有类似式子, 把上述式子及式(17), (18) 代入基本方程式(4), (5)• 对第 i 个结点可得:

$$\begin{aligned}
&i^2(B_{i-1}-2B_i+B_{i+1}) - \frac{1}{144}(B_{i-1}+4B_i+B_{i+1})(C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}) + \\
&K\Bigg\{\frac{B_{i+1}-B_{i-1}}{2s}\left[i(C_{i+1}-C_{i-1}) - \frac{C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}}{3}\right] + \\
&\frac{x_i}{6s^2}(C_{i-1}+4C_i+C_{i+1})(B_{i-1}-2B_i+B_{i+1}) + \frac{B_{i-1}+4B_i+B_{i+1}}{6x_i}\times \\
&\left[i^2(C_{i-1}-2C_i+C_{i+1}) + \frac{C_{i-1}+4C_i+C_{i+1}}{3} - i(C_{i+1}-C_{i-1})\right]\Bigg\} = \\
&2q_0\sum_{j=0}^{p}d_j\left(\frac{x_i}{j+2} - jK\right)x_i^{j/2+1}\qquad (i = 1, 2, \cdots, n),
\end{aligned} \tag{19}$$

$$i^2(C_{i-1}-2C_i+C_{i+1}) + \left(\frac{B_{i-1}+4B_i+B_{i+1}}{6}\right)^2 = 0\qquad (i = 1, 2, \cdots, n)• \tag{20}$$

对 $i = 0$ 结点, 若我们忽略中心的奇异性得 $\lim_{x\to 0}\mathrm{d}q(x)/\mathrm{d}x = q_0d_2$, 即

$$\begin{aligned}
&\frac{B_{-1}-2B_0+B_1}{s^2} - \frac{(B_1-B_{-1})(C_1-C_{-1})}{16s^2} + \\
&\frac{K}{2s^3}[(B_1-B_{-1})(C_1-2C_0+C_{-1}) +
\end{aligned}$$

$$(C_1 - C_{-1})(B_{-1} - 2B_0 + B_1)] = q_0(d_0 - 4Kd_2), \tag{21}$$

$$4(C_{-1} - 2C_0 + C_1) + (B_1 - B_{-1})^2 = 0, \tag{22}$$

对边界条件式(10) ~ (13)可得:

$$B_{-1} + 4B_0 + B_1 = 0, \tag{23}$$

$$C_{-1} + 4C_0 + C_1 = 0, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{2s}(B_{n+1} - B_{n-1}) + \frac{1-\lambda_1}{6}(B_{n-1} + 4B_n + B_{n+1}) + \\
&K\left\{\frac{1-2\lambda_1}{36}(B_{n-1} + 4B_n + B_{n+1})(C_{n-1} + 4C_n + C_{n+1}) + \right. \\
&\quad \frac{\lambda_1}{12s}\left[(B_{n+1} - B_{n-1})(C_{n-1} + 4C_n + C_{n+1}) + \right. \\
&\quad \left.\left.(C_{n+1} - C_{n-1})(B_{n-1} + 4B_n + B_{n+1})\right]\right\} = \\
&\quad -\frac{\lambda_1}{2}M_0 - 4Kq_0\sum_{j=0}^{p}\frac{j\lambda_1 + 2}{j+2}d_j,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_2\frac{C_{n+1} - C_{n-1}}{2s} + (1-\lambda_2)\frac{C_{n-1} + 4C_n + C_{n+1}}{6} = \\
&\quad \left(1 - \frac{1-\mu}{2}\lambda_2\right)\sigma_0 + \frac{1-\mu}{2}\lambda_2\sigma_p.
\end{aligned} \tag{26}$$

式(19) ~ (26)共$2n+6$个非线性方程, 用牛顿迭代法求解可以确定$2n+6$个待定系数B_i、C_i($i=-1, 0, 1, 2, \cdots, n+1$). 进一步可得内力及挠度.

挠度

$$w = \sum_{i=-1}^{n+1}B_i\int\frac{\Omega_3[(x-x_i)/s]}{x}\mathrm{d}x + c_1, \tag{27}$$

式中: 积分常数c_1由边界条件式(14)确定.

3　非线性方程的求解

程序中使用双精度数(有16位有效数字), 用牛顿迭代法解非线性方程组, 满足以下两条件之一, 认为收敛而结束迭代:

1) 每个方程的残数的绝对值小于10^{-10}.

2) 每个方程的残数的绝对值小于10^{-4}, 并且小于$\max|B_i|^3\times10^{-16}$和$\max|C_i|^3\times10^{-16}$ ($i=-1, 0, 1, 2, \cdots, n, n+1$).

由于样条函数的紧凑性, 用牛顿迭代法解非线性方程组时, 选列主元解线性方程组, 雅可比矩阵可存储在带宽为9的二维数组中, 这样可大量地节省计算时间和内存.

4　算例及说明

在给出的算例中, 表板的泊松比为0.3, 表中点数即为公式(17) ~ (27)的n, 表中符号下标'c'代表中心、'b'代表边缘. 算例中有的荷载给得很大, 这时基本大挠度方程可能已失效, 得到的结果仅有数学上的意义, 判断大挠度方程是否失效应由试验决定.

表 1: 当荷载较小时, 样条函数解同幂级数解[5]非常一致• 均布荷载 $q=10$ 是文献[5]取的最大值• 从结果可明显得出中心挠度收敛最快, 弯矩收敛最慢, 其它的算例也可得出相同的结论•

表 1 受均布荷载 q 的可移夹紧夹层圆板 ($K=0.1$)

q	点数 n	w_c	$(\sigma_r)_c$	$(\sigma_\theta)_b$	$(M_r)_c$	$(M_r)_b$
10	文献[5]	3.941 6	7.559 4	−15.974	3.282 8	
	100	3.941 61	7.559 42	−15.974 2	3.282 86	−7.415 96
	200	3.941 60	7.559 40	−15.974 2	3.282 83	−7.415 79
500	100	22.001 9	139.139	−1 359.67	−14.086 9	−22 174.6
	500	24.089 4	156.354	−1 615.00	12.596 0	−796.165
	2 000	24.140 9	156.443	−1 621.15	13.330 7	−12.298 9
	10 000	24.144 5	156.471	−1 621.52	13.376 6	−63.545 8
	20 000	24.141 1	156.472	−1 621.54	13.378 0	−65.146 2

表 2 受均布边缘力矩 M_0 铰支承夹层圆板的中心挠度 w_c

M_0	$K=0.01$		$K=0.05$		$K=0.1$		$K=0.2$	
	100 点	200 点	100 点	200 点	100 点	200 点	100 点	200 点
5	1.606 3	1.606 3	1.562 1	1.562 1	1.509 9	1.509 9	1.420 5	1.420 5
20	2.553 2	2.553 3	2.594 6	2.594 6	2.555 0	2.555 1	2.426 4	2.4264
100	3.846 8	3.847 1	4.336 9	4.337 1	4.406 2	4.406 3	4.247 9	4.248 0
500	5.909 4	5.910 4	7.262 5	7.262 8	7.522 0	7.522 2	7.311 6	7.311 7

表 3: $(\sigma_r)_b$ 或 $(\sigma_\theta)_b$ 这样选择, 如边条是固定夹紧、铰支承为 $(\sigma_r)_b$, 若是可移夹紧、简单支承为 $(\sigma_\theta)_b$• $(M_r)_b$ 或 $(M_\theta)_b$ 这样选择, 如边条是固定夹紧、可移夹紧为 $(M_r)_b$, 若是铰支承、简单支承为 $(M_\theta)_b$•

表 3 受九次多项式分布荷载 $q=50\sum_{i=0}^{9}x^{i/2}$ 的夹层圆板 ($K=0.01$)

边界条件	点数 n	w_c	$(\sigma_r)_c$	$(\sigma_r)_b$ 或 $(\sigma_\theta)_b$	$(M_r)_c$	$(M_r)_b$ 或 $(M_\theta)_b$
固定夹紧	100	5.606 6	64.932	50.748	5.716 7	−51.022
	200	5.606 2	64.928	50.749	5.672 1	−51.020
可移夹紧	100	9.890 9	44.565	−111.14	9.574 7	−87.242
	200	9.890 3	44.560	−111.14	9.529 2	−87.238
铰支承	100	5.835 4	81.562	68.826	4.747 7	6.230 8
	200	5.835 2	81.560	68.826	4.703 9	6.230 7
简单支承	100	13.459	59.208	−317.05	8.181 9	16.922
	200	13.459	59.204	−317.04	8.137 4	16.922

表 4: “$(\sigma_0)_{cr}$”是压曲临界荷载(它是负值)• 假如荷载 $\sigma_0>(\sigma_0)_{cr}$, 则板的挠度和弯矩为零• 压曲临界荷载这样计算: 首先同时施加较大径向压力和均布荷载, 然后卸去均布荷载, 并

逐步减小径向压力, 计算得出中心挠度突变为零或很小时, 前一荷载即为压曲临界荷载•

表 4　受均布边缘径向应力的可移夹紧夹层圆板的压曲临界荷载 $-(\sigma_0)_{cr}$

点数 n	$K=0$	$K=0.01$	$K=0.02$	$K=0.05$	$K=0.1$	$K=0.15$
100	14.682	12.802	11.350	8.466 5	5.948 4	4.584 8
200	14.682	12.803	11.350	8.466 6	5.948 5	4.584 7

表 5　受均布荷载 q、边缘均布径向应力 σ_0 和力矩 M_0 共同作用* 的弹性支承 $(\lambda_1=1, \lambda_2=1)$ 夹层圆板 $(K=0.05)$ 的中心挠度 w_c

σ_0	点数 n	$M_0=-10$			$M_0=0$			$M_0=50$		
		$q=10$	$q=100$	$q=1000$	$q=10$	$q=100$	$q=1000$	$q=10$	$q=100$	$q=1000$
20	100	1.127 3	7.004 0	16.639	2.012 7	7.126 7	16.660	4.202 3	7.663 8	16.763
	200	1.127 3	7.004 0	16.639	2.012 7	7.126 8	16.660	4.202 3	7.663 9	16.763
5	100	1.965 7	7.511 8	16.859	2.951 2	7.621 9	16.879	4.856 8	8.107 7	16.979
	200	1.965 7	7.511 8	16.859	2.951 2	7.621 9	16.879	4.856 9	8.107 8	16.979
−5	100	2.899 1	7.846 9	17.005	3.701 1	7.948 5	17.025	5.297 0	8.400 2	17.123
	200	2.899 1	7.846 9	17.005	3.701 1	7.948 5	17.025	5.297 1	8.400 3	17.123
−20	100	4.340 6	8.339 4	17.223	4.785 0	8.428 7	17.242	5.939 8	8.831 1	17.337
	200	4.340 6	8.339 5	17.223	4.785 0	8.428 8	17.242	5.940 0	8.831 3	17.337

*　加载方式为: 先固定 $M_0=-10$; 外循环 $\sigma_0=20, 5, -5, -20$; 内循环 $q=10, 100, 1\,000$; 初值取零解•　然后让 $M_0=0, 50$•　按上述方式重复•

表 6　受均布荷载 q 和边缘均布径向预应力 σ_p 共同作用* 的固定夹紧夹层圆板的中心挠度 w_c

K	q	点数	$\sigma_p=1\,000$	$\sigma_p=100$	$\sigma_p=0$	$\sigma_p=-100$	$\sigma_p=-1\,000$
0	1 000	100	3.665 00	11.287 2	12.743 9	14.177 6	23.852 9
		200	3.664 82	11.287 1	12.743 8	14.177 6	23.8529
	10 000	100	21.413 8	27.223 5	27.871 0	28.514 7	34.022 2
		200	21.4132	27.223 2	27.870 8	28.514 4	34.022 2
0.1	1 000	100	3.877 61	11.642 3	13.006 1	14.325 2	22.576 6
		200	3.877 61	11.642 3	13.006 1	14.325 3	22.579 4
	10 000	100	21.840 2	27.502 7	28.127 1	28.746 6	34.000 8
		200	21.840 2	27.502 7	28.127 1	28.746 6	34.001 0

*　加载方式为: 外循环 $q=1\,000, 10\,000$; 内循环 $\sigma_p=1\,000, 100, 0, -100, -1\,000$; 初值取零解•

5　结　　语

本文导出了夹层圆板的大挠度公式的一般形式•　当均布荷载较小时, 本文的结果同幂级数法解得的结果[5]非常一致, 说明本文提出的方法是可靠的•　本文的方法有比幂级数法大得多的收敛范围•

我们计算了均布荷载、均布边缘力矩、均布边缘压力或均布径向预应力及它们的组合作用的许多例子, 均取得了收敛的结果•　结果表明剪切参数 K 对收敛范围有重大的影响•　若 K 增加一点, 收敛的荷载范围迅速减小, 对简单支承影响更大•　因篇幅所限, 不能在此全列出•

整个程序用 Fortran 语言写成, 可在一般微机运行• 计算时仅需输入泊松比、剪切参数、荷载、支承条件、配点数• 本文的方法所需的输入的数据和计算时间同有限元法相比是很少的•

[参 考 文 献]

[1] Bruun E R. Thermal deflection of a circular sandwich plate[J]. AIAA J, 1963, **1**(5): 1213－1215.

[2] Huang J C, Ebcioglu I K. Circular sandwich plates under radial compression and thermal gradient[J]. AIAA J, 1965, **3**(6): 1146－1148.

[3] Wang C M. Buckling of polygonal and circular sandwich plates[J]. AIAA J, 1995, **33**(5): 962－964.

[4] 刘人怀. 夹层圆板的非线性弯曲[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(2): 173－179.

[5] 刘人怀、施云芳. 夹层圆板大挠度问题的精确解[J], 应用数学和力学, 1982, **3**(1): 11－28.

[6] 刘人怀. 在边缘力矩作用下夹层圆板的非线性轴对称弯曲问题[J]. 中国科技大学学报, 1980, **10**(2): 1－12.

[7] LIU Ren_huai. Nonlinear bending of circular sandwich plates under the action of axisymmetric uniformly distributed line loads[A]. In: YEH Kai_yuan, Ed. *Progress in Applied Mechanics*[C]. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1987, 293－321.

[8] 刘人怀, 朱高秋. 夹层圆板大挠度问题的进一步研究[J]. 应用数学和力学, 1989, **10**(12): 1041－1047.

[9] 刘人怀, 朱金福, 张小果. 夹层环形板的非线性弯曲[J]. 暨南大学学报, 1997, **18**(1): 2－10.

[10] 徐加初, 王乘, 刘人怀. 变厚度夹层环形板的非线性弯曲[J]. 工程力学, 2001, **18**(4): 28－37.

[11] Reissner E. Finite deflection of sandwich plates[J]. *J Aero Sci*, 1948, **15**(7): 435－440; 1950, **17**(2): 125－130.

Cublic Spline Solutions of Axisymmetrical Nonlinear Bending and Buckling of Circular Sandwich Plates

HOU Chao_sheng, ZHANG Shou_kai, LIN Feng

(*Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China*)

Abstract: Cubic B_spline taken as trial function, the nonlinear bending of a circular sandwich plate was calculated by the method of point collocation. The support could be elastic. A sandwich plate was assumed to be Reissner Model. The formulae were developed for the calculation of a circular sandwich plate subjected to polynomial distributed loads, uniformly distributed moments, radial pressure or radial prestress along the edge and their combination. Buckling load was calculated for the first time by nonlinear theory. Under action of uniformly distributed loads, results were compared with that obtained by the power series method. Excellences of the program written by the spline collocation method are wide convergent range, high precision and universal.

Key words: circular sandwich plate; large deflection; buckling; spline collocation method