

螺旋槽球形轴承的承载能力*

阚健民 朱月锐

(上海交通大学工程力学系, 1981年7月3日收到)

摘 要

本文运用J·H·Vohr和C·H·T·Pan的理论和方法^[1],建立了广义坐标系下的螺旋槽轴承的压力雷诺方程.然后在球轴承的边界条件下采用参数摄动法导出了动压螺旋槽轴承润滑油膜的雷诺方程的近似解析解.由此,对各轴承槽型参数关于承载能力的影响作了计算和讨论,给出的最佳槽型参数与实验结果是一致的,与当前已发表的国内外资料相比较也是一致的.由于目前业已发表的文章均为计算机数值解,因此,本文对螺旋槽球轴承的特性研究提供了一个新的方法和途径.

本文承中国科学院力学研究所林同骥,付仙罗同志及上海651研究所丁世德,蔡建中同志审阅,并提出了宝贵意见,作者谨在此表示衷心的感谢.

一、雷诺方程的建立

本文通过纳维-斯托克斯方程和质量守恒方程来推出螺旋槽轴承的雷诺方程.为使方程具有其通用性,我们首先建立一组广义坐标系.

众所周知,对于实际应用的各种轴承而言,轴承面都是对称轴与旋转轴一致的旋转面,例如圆盘、圆柱面、圆锥面和球面等.旋转面上一点M,可以用二个坐标 ϕ 和 s 来表示,其中 ϕ 为圆周角坐标, s 是沿旋转面母线的子午坐标.点M到旋转轴的距离为 r .见图1.

图2所示螺旋槽轴承中,设转子部分开槽并以角速度 ω 转动,轴承面即定子面设为固定.

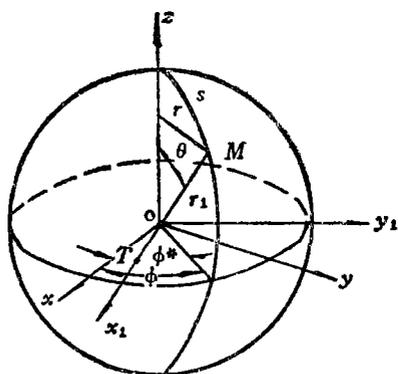


图1 坐标系

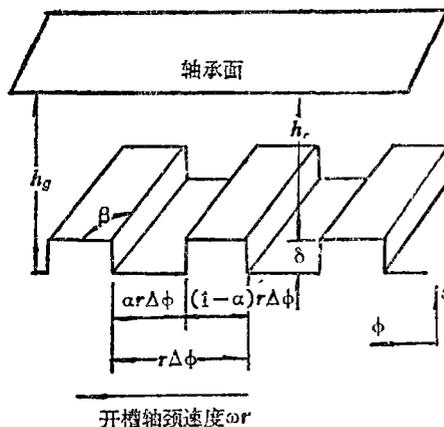


图2 螺旋槽

* 钱伟长推荐.

轴承间隙在槽域内为 h_g ,在台域内为 h_r ,槽深 $\delta = h_g - h_r$ 为一常数;槽台的宽度比为 $\alpha:(1-\alpha)$;槽的螺旋角 β ;槽区在子午方向的宽度以 θ_s 表出。

如图3建立固定控制体积:它在圆周方向和子午方向都恰好截取一对槽和台,宽度分别为 $r\Delta\phi$ 和 Δs ;它的顶部与定子面重合;它的底部与转子面重合.由于,槽的运动并不影响所取的固定控制体积,因此对于这个控制体积的流量平衡条件也即质量守恒方程为单位时间内通过侧面向外流出的净流量与这个体积内增加的质量之和等于零:

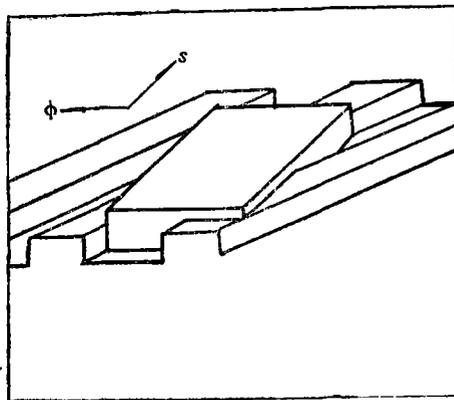


图3 控制体积

$$\Delta s \frac{\partial}{\partial s} (\Delta \psi_s) + \Delta \phi \frac{\partial}{\partial \phi} (\Delta \psi_\phi) + \frac{d}{dt} [ah_g + (1-\alpha)h_r] \rho r \Delta \phi \Delta s = 0 \quad (1.1)$$

其中 $\Delta \psi_s$ 和 $\Delta \psi_\phi$ 分别为一对槽台的子午和圆周流量, ρ 为流体密度。

由经典的流体动力润滑理论,对于纳维-斯托克斯方程进行一定的限制和简化后可以得到润滑流体的质量流向量^[1]: $\vec{\psi} = \rho h \vec{u} = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \nabla p + \frac{\rho h \vec{v}}{2}$; \vec{v} 为转子面的速度; μ 为流体粘度。

由上,其子午和圆周方向的分量分别为:

$$\left. \begin{aligned} \psi_s &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \psi_\phi &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right) + \frac{\omega r \rho h}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

是于,一对槽台的子午和圆周流量分别为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \psi_s &= \int_{\phi - (1-\alpha)\Delta\phi}^{\phi} \left[-\frac{\rho h_r^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_r \right] r d\phi + \int_{\phi}^{\phi + \alpha\Delta\phi} \left[-\frac{\rho h_g^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_g \right] r d\phi \\ \Delta \psi_\phi &= \int_{s - (1-\alpha)\Delta s}^s \left[-\frac{\rho h_r^3}{12\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_r + \frac{\omega r \rho h_r}{2} \right] ds \\ &+ \int_s^{s + \alpha\Delta s} \left[-\frac{\rho h_g^3}{12\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_g + \frac{\omega r \rho h_g}{2} \right] ds \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

其中下标 r 和 g 分别表示台域和槽域。

(1.3)式中出现槽域和台域的压力梯度由对台阶的动压效应的分析可知在槽台界面处是间断的.呈锯齿形的压力分布对螺旋槽轴承的数学处理带来了很大的困难.国外在60年代末期建立的准不可压窄槽理论解决了这个困难,该理论的主要思想为以沿整个轴承的平滑的压力分布 p' 来代替原来的锯齿形压力分布 p .

下面简要地叙述这个理论并建立 p' 和 p 的数学关系。

我们假定轴承的开槽面上槽数趋于无穷多,即每一对槽台之宽与轴承的特征长度相比为无穷小,也即 $\Delta s = 0$; $\Delta \phi = 0$;可以预期,这种分析的结果将会相当精确地符合槽数很多,

然而有限的轴承⁽¹⁾。由这个假定, $\frac{\partial p}{\partial s}$, $\frac{\partial p}{\partial \phi}$ 和 ρ 可以视为分段取常数值函数, 即在每个槽域和每个台域内其值不变。

在这个基础上, 要以光滑的平滑压力 p' 的曲线去代替折线段组合成的锯齿形压力 p 的曲线, 条件应该是:

1. 在同一子午线上, 其坐标分别为 (s, ϕ) 和 $(s+\Delta s, \phi)$ 的相邻二个槽的前沿点的平滑压力 p' 的改变量应该等于对应位置上的锯齿形压力 p 的改变量; 即:

$$\begin{aligned} p'(s+\Delta s, \phi) - p'(s, \phi) &= \int_s^{s+\Delta s} \frac{\partial p}{\partial s} ds = \int_s^{s+\alpha\Delta s} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g ds + \int_{s+\alpha\Delta s}^{s+\Delta s} \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r ds \\ &= \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g \Delta s + (1-\alpha) \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r \Delta s \end{aligned}$$

$$\text{从而: } \frac{\partial p'}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{p'(s+\Delta s, \phi) - p'(s, \phi)}{\Delta s} = \alpha \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g + (1-\alpha) \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r \quad (1.4)$$

2. 同理, 在圆周方向上应有类似关系:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \phi} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_g + (1-\alpha) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_r \quad (1.5)$$

3. 在槽与台的交界面上压力 p 的梯度连续。

$$\sin \beta \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g + \cos \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_g = \sin \beta \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r + \cos \beta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_r \quad (1.6)$$

4. 在这个交界面处, 槽域和台域的法向流量 ψ_n , 应由因交界面的运动使台域变成槽域所增加的流量来平衡:

$$(\psi_n)_g = (\psi_n)_r + \omega r \rho \delta \sin \beta \quad (1.7)$$

以 $\psi_n = \psi_\phi \sin \beta - \psi_s \cos \beta$ 和式(1.2)代入(1.7)式可以改写(1.7)为:

$$\begin{aligned} \cos \beta h_g^3 \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g - \sin \beta h_g^3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_g &= \cos \beta h_r^3 \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r - \sin \beta h_r^3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_r \\ &+ 6\mu\omega r \delta \sin \beta \end{aligned} \quad (1.8)$$

联立(1.4)、(1.5)、(1.6)、(1.8)四式便可建立 $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_g$, $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_r$, $\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_g$, $\left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_r$ 与

$\left(\frac{\partial p'}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial p'}{\partial \phi}\right)$ 之间的数学关系, 使我们得以用平滑压力 p' 的梯度去代替锯齿形压力 p 的梯度, 从而去表出(1.3)的 $\Delta\psi_s$ 和 $\Delta\psi_\phi$:

$$\Delta\psi_s = -\frac{\Delta\phi}{12\mu} \left[-\rho r^2 K_3 K_4 \cos \beta + \rho h_r^3 \left(K_1 r \frac{\partial p'}{\partial s} + K_2 \frac{\partial p'}{\partial \phi} \right) \right] \quad (1.9)$$

$$\Delta\psi_\phi = -\frac{\Delta s}{12\mu} \frac{1}{r} \left[-6\mu\omega r^2 \rho h_r K_3 + \rho r^2 K_3 K_4 \sin \beta + \rho h_g^3 \left(K_2 r \frac{\partial p'}{\partial s} + K_3 \frac{\partial p'}{\partial \phi} \right) \right] \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{其中} \quad K_1 &= \frac{\alpha(1-\alpha)\sin^2\beta(\Gamma^3-1)^2 + \Gamma^3}{(1-\alpha)\Gamma^3 + \alpha} \\
 K_2 &= \frac{\alpha(1-\alpha)\sin\beta\cos\beta(\Gamma^3-1)^2}{(1-\alpha)\Gamma^3 + \alpha} \\
 K_3 &= \frac{\alpha(1-\alpha)\cos^2\beta(\Gamma^3-1)^2 + \Gamma^3}{(1-\alpha)\Gamma^3 + \alpha} \\
 K_4 &= \frac{\Gamma^3-1}{(1-\alpha)\Gamma^3 + \alpha} \\
 K_5 &= -6\mu\omega\alpha(1-\alpha)\delta\sin\beta \\
 K_6 &= \alpha\Delta + 1 \quad \Delta = \delta/h_r = \Gamma - 1 \\
 \Gamma &= h_g/h_r
 \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

以(1.10)式代入质量守恒方程(1.1)中即可得到平滑压力 p' 的雷诺方程.为简单起见,我们仅考虑不可压缩润滑流体,并作变量替换,把所得方程无量纲化.令:

$$\left. \begin{aligned}
 P &= p'/P_0; & S &= s/R_0; & T &= tv; \\
 H &= h/c; & R &= r/R_0; & \phi^* &= \phi - T;
 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

其中 ν 为振动频率; R_0 为轴承半径; P_0 为系统气压; c 为转子与定子同心时的轴承台区间隙.

这样便得到了不可压粘性流体的雷诺方程:

$$\begin{aligned}
 R \frac{\partial}{\partial S} \left[H^3 \left(K_1 R \frac{\partial}{\partial S} + K_2 \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right) P - A_3 K_4 \cos \beta R^2 \right] + \frac{\partial}{\partial \phi^*} \left[H^3 \left(K_2 R \frac{\partial}{\partial S} \right. \right. \\
 \left. \left. + K_3 \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right) P + A_3 K_4 \sin \beta R^2 \right] - \left[A^* \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right. \\
 \left. + \sigma \frac{\partial}{\partial T} \right] (K_6 H, R^2) = 0
 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{其中} \quad A_3 &= \frac{-6\mu\omega\alpha(1-\alpha)\sin\beta R_0^2 \delta}{P_0 c^3} \\
 A &= \frac{6\mu\omega R_0^2}{P_0 c^2} \\
 A^* &= A \left(1 - \frac{2\nu}{\omega} \right) \\
 \sigma &= A \frac{2\nu}{\omega}
 \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

二、不可压润滑油的雷诺方程的参数摄动

方程(1.13)为对 S , ϕ^* , T 的偏微分方程,其求解是困难的,本文利用参数摄动法,并采用稳态涡动的分析处理,在螺旋槽球形轴承的具体条件下,对它的方程和边界条件进行小参数摄动,从而求得其一阶近似解.

在轴承定子球心 o 点建立固定球坐标系 (r_1, ϕ, θ) 见图1. 轴承转子的运动认为是由二个运动所合成: 转子中心 o_1 在垂直于转子旋转轴 oz 的平面内, 绕平衡位置 o 作水平方向的正圆形稳态涡动, 频率为 ν . 转子在 oz 方向即铅直方向上以频率 ν 上下振动. 转子自转角频率 ω . 转子中心 o_1 与定子中心 o 的距离由径向偏心 e_r 和轴向偏心 e_z 所组成, 其无量纲值相应为 $\varepsilon_r = e_r/c$; $\varepsilon_z = e_z/c$. 又在 o 点取动坐标系 (r_1, ϕ^*, θ) 和对应的直角坐标系 $o-x_1y_1z$, x_1 轴和 y_1 轴在其自身平面 (ox_1y_1) 内以频率 ν 旋转. 因有关系: $\phi^* = \phi - T$. (图1).

由上, 轴承台区间隙可通过把转子中心偏离平衡位置的位移向球半径 r_1 方向投影而得:

$$H_r = 1 + \cos\theta \varepsilon_z \cos T + \sin\theta \varepsilon_r \cos\phi^* = 1 + \cos\theta \operatorname{Re}\{\varepsilon_z e^{iT}\} + \sin\theta \operatorname{Re}\{\varepsilon_r e^{i\phi^*}\} \quad (2.1)$$

假定(1.13)的解可以表示为:

$$P = P_c(\theta) + \operatorname{Re}\{\varepsilon_z P_z(\theta) e^{iT}\} + \operatorname{Re}\{\varepsilon_r P_r(\theta) e^{i\phi^*}\} \quad (2.2)$$

又由于方程(1.13)中参数 $K_j (j=1, 2, 3, 4, \omega)$ 中含有槽台间隙比 Γ , 所以我们同样地在轴承同心时为中心位置把 K_j 展开为 $\Delta\Gamma$ 的幂级数, 也即 ε_r 和 ε_z 的幂级数, 略去二阶小量项后有:

$$K_j = K_{jc} + \left. \frac{\partial K_j}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_c} \cdot \Delta\Gamma \quad (2.3)$$

其中 Γ_c 为轴承与转子同心时的槽台间隙比, $K_{jc} = K_j|_{\Gamma=\Gamma_c}$.

$$\left. \begin{aligned} \text{而} \quad \Delta\Gamma = \Gamma - \Gamma_c &= -\Delta_c [\cos\theta \operatorname{Re}\{\varepsilon_z e^{iT}\} + \sin\theta \operatorname{Re}\{\varepsilon_r e^{i\phi^*}\}] \\ \Delta_c &= \frac{\delta}{c} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

令 $K_{jr} = \left. \frac{\partial K_j}{\partial \Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_c}$ 则(2.3)可写为:

$$K_j = K_{jc} + K_{jr} \cdot \Delta\Gamma \quad j=1, 2, 3, 4, \omega; \quad (2.5)$$

以(2.1), (2.2), (2.5)代入方程(1.13), 注意到在球坐标系中 $S = s/R_0 = R_0\theta/R_0 = \theta$, 略去 ε_r 和 ε_z 的二阶小量项, 分别归并 ε_r 和 ε_z 的零次项和一次项, 则可得关于中心位置压力 P_c (零阶解), 轴向扰动压力 P_z , 和径向扰动压力 P_r 的三个常微分方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[K_{1c} \sin\theta \frac{dP_c}{d\theta} - A_3 \cos\beta K_{4c} \sin^2\theta \right] &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_c}{d\theta} \cdot K_{1r} \Delta_c \cos\theta \right] + \sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[K_{1c} \sin\theta \left(3\cos\theta \frac{dP_c}{d\theta} + \frac{dP_z}{d\theta} \right) \right] \\ + \sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[A_3 \cos\beta K_{4r} \Delta_c \sin^2\theta \cos\theta \right] - i\sigma \sin^2\theta \cos\theta &= 0 \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left[K_{1c} \sin\theta \frac{dP_r}{d\theta} \right] + i \frac{d}{d\theta} \left[K_{2c} P_r \right] + i K_{2c} \frac{dP_r}{d\theta} - \frac{K_{3c} P_r}{\sin\theta} \\ = X_1 \sin^2\theta \cos\theta + i X_2 \sin^2\theta \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

$$\text{式(2.8)中 } X_1 = 3 \left(A_3 \frac{K_{4c}}{K_{1c}} \cos\beta K_{1r} \Delta_c - 3A_3 K_{4c} \cos\beta - A_3 \cos\beta K_{4r} \Delta_c \right)$$

$$X_2 = K_{2r} \Delta_c A_3 \frac{K_{4c}}{K_{1c}} \cos\beta - 3K_{2c} A_3 \frac{K_{4c}}{K_{1c}} \cos\beta + A_3 \sin\beta K_{4r} \Delta_c + A^* \quad (2.9)$$

为了提高螺旋槽轴承的稳定性, 目前普遍采取在部分转子面上刻槽的措施, 见图4, 因此尚须考虑在无槽区(光区)上的对应压力, P_{cs}, P_{zs}, P_{rs} 的方程. 由于在光区上 $\Gamma_c = (h_0/h_c)_c = 1$

所以有 $K_{1c}=K_{3c}=1$ 而 $K_{2c}=K_{4c}=0$ 等关系,从而方程相应地改变为对应于光区上的 P_{cs}, P_{rs}, P_{rs} 的三个方程:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_{cs}}{d\theta} \right] = 0 & (2.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_{rs}}{d\theta} \right] - i\sigma \sin^2\theta \cos\theta = 0 & (2.11) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_{rs}}{d\theta} \right] - P_{rs} = iA^* \sin^3\theta & (2.12) \end{cases}$$

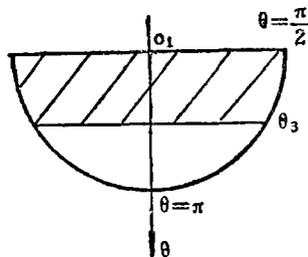


图4 转子

三、螺旋槽球轴承的边界条件及其参数摄动

如图4示,球轴承转子在 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_3$ 上开槽,在 $\theta_3 \leq \theta \leq \pi$ 上为光区.其边界条件为:

1. 在 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 处开口与系统相连即 $P=1$, 而因摄动压力 P 和 P_r 在此处只能为零, 所以

$$P_c = P_0 / P_0 = 1.$$

2. 在 $\theta = \theta_3$ 处, 槽区压力与光区压力在交界处连续.

3. 在 $\theta = \theta_3$ 处子午流量连续.

4. 在 $\theta = \pi$ 处子午流量为零.

关于子午流量 ψ 的数学表达式只要比较(1.9)式即可得到

$$\psi_c = \frac{\rho}{12\mu} \left[A_3 K_{4c} \cos\beta R^2 - H_3 \left(K_{1c} R \frac{\partial}{\partial \theta} + K_{2c} \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right) P \right] \quad (3.1)$$

我们以同样的方法以小参数 e_r, e_c 对式(3.1)进行摄动, 分离各有关项, 分别得到:

对应于中心位置压力 P_c 的槽区子午流量 ψ_{cc} :

$$\psi_{cc} = \frac{\rho}{12\mu} \left[A_3 K_{4c} \cos\beta R^2 - K_{1c} R \frac{dP_c}{d\theta} \right] \quad (3.2)$$

对应于轴向摄动压力 P_r 的槽区子午流量 ψ_{cr} :

$$\begin{aligned} \psi_{cr} = \frac{\rho}{12\mu} \operatorname{Re} \left\{ \left[-A_3 K_{4r} \cos\beta R^2 \Delta_c \cos\theta + RK_{1r} \Delta_c \cos\theta \frac{dP_c}{d\theta} \right. \right. \\ \left. \left. - K_{1c} R \left(3\cos\theta \frac{dP_c}{d\theta} + \frac{dP_r}{d\theta} \right) \right] e_c e^{i\tau} \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

对应于径向摄动压力 P_r 的槽区子午流量 ψ_{cr} :

$$\begin{aligned} \psi_{cr} = \frac{\rho}{12\mu} \operatorname{Re} \left\{ \left[-A_3 K_{4r} \cos\beta R^2 \Delta_c \sin\theta + RK_{1r} \Delta_c \sin\theta \frac{dP_c}{d\theta} \right. \right. \\ \left. \left. - RK_{1c} \left(3\sin\theta \frac{dP_c}{d\theta} + \frac{dP_r}{d\theta} \right) - iK_{2c} P_r \right] e_c e^{i\phi^*} \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

在光区上, 同样地由于其上有 $\Gamma_c=1$, 使(3.2), (3.3), (3.4)式相应地改变为:

对应于中心位置压力 P_{cs} 的光区子午流量 ψ_{csc} :

$$\psi_{scs} = \frac{\rho}{12\mu} \left[-\sin\theta \frac{dP_{cs}}{d\theta} \right] \quad (3.5)$$

对应于轴向摄动压力 P_{zs} 的光区子午流量 ψ_{szs} :

$$\psi_{szs} = \frac{\rho}{12\mu} \operatorname{Re} \left[-\sin\theta \frac{dP_{zs}}{d\theta} \varepsilon_r e^{i\tau} \right] \quad (3.6)$$

对应于径向摄动压力 P_{rs} 的光区子午流量 ψ_{srs} :

$$\psi_{srs} = \frac{\rho}{12\mu} \operatorname{Re} \left[-\sin\theta \frac{dP_{rs}}{d\theta} \varepsilon_r e^{i\phi^*} \right] \quad (3.7)$$

这样, 我们便具备了用以确定压力 P_c 和 P_{cs} 的方程(2.6), (2.10); P_r 和 P_{rs} 的方程(2.7), (2.11); P_s 和 P_{ss} 的方程(2.8), (2.12)的定解条件. 具体地:

对于 P_c 和 P_{cs} 的方程(2.6)、(2.10)的定解条件为:

$$\left. \begin{aligned} P_c \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 1 \\ P_c \Big|_{\theta=\theta_3} &= P_{cs} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{sc} \Big|_{\theta=\theta_3} &= \psi_{scs} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{scs} \Big|_{\theta=\pi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

对于 P_r 和 P_{rs} 的方程(2.7), (2.11)的定解条件为:

$$\left. \begin{aligned} P_r \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 0 \\ P_r \Big|_{\theta=\theta_3} &= P_{rs} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{sr} \Big|_{\theta=\theta_3} &= \psi_{srs} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{srs} \Big|_{\theta=\pi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

对于 P_s 和 P_{ss} 的方程(2.8), (2.12)的定解条件为:

$$\left. \begin{aligned} P_s \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= 0 \\ P_s \Big|_{\theta=\theta_3} &= P_{ss} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{sr} \Big|_{\theta=\theta_3} &= \psi_{srs} \Big|_{\theta=\theta_3} \\ \psi_{srs} \Big|_{\theta=\pi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

解之得:

$$\left. \begin{aligned} P_c &= 1 - A_s \frac{K_{Ac}}{K_{1c}} \cos\beta \cos\theta & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_3 \\ P_{cs} &= 1 - A_s \frac{K_{Ac}}{K_{1c}} \cos\beta \cos\theta_3 & \theta_3 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} P_s &= \frac{1}{K_{1s}} \left[\frac{X_1}{6} \sin^2 \theta - \frac{i\sigma \cos \theta}{2} - \frac{X_1}{6} \right] & \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_3 \\ P_{s'} &= \frac{-i\sigma \cos \theta}{2} + \frac{i\sigma \cos \theta_3}{2} + \frac{1}{K_{1s'}} \left[\frac{X_1}{6} \sin^2 \theta_3 - \frac{i\sigma \cos \theta_3}{2} - \frac{X_1}{6} \right] & \theta_3 \leq \theta \leq \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

P_s 和 $P_{s'}$ 较复杂, 表达如下:

$$P_s = C_5 \operatorname{tg}^{\alpha_1} \left(\frac{\theta}{2} \right) + C_6 \operatorname{tg}^{\alpha_2} \left(\frac{\theta}{2} \right) + Y^*(\theta) \quad (3.13)$$

$C_5 \operatorname{tg}^{\alpha_1} \left(\frac{\theta}{2} \right) + C_6 \operatorname{tg}^{\alpha_2} \left(\frac{\theta}{2} \right)$ 为方程(2.8)所对应的齐次方程的通解, 而 C_5 , C_6 二积分

常数由下面定解条件所确定. $Y^*(\theta)$ 为方程(2.8)的一个特解. 式中 $\alpha_1 = \frac{\sqrt{4B-A^2} - iA}{2}$;

$$\alpha_2 = \frac{-\sqrt{4B-A^2} - iA}{2}; \quad A = \frac{2K_{2c}}{K_{1c}}; \quad B = \frac{K_{3c}}{K_{1c}}.$$

记 $Y_1 = \operatorname{tg}^{\alpha_1} \left(\frac{\theta}{2} \right)$; $Y_2 = \operatorname{tg}^{\alpha_2} \left(\frac{\theta}{2} \right)$; $t = \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right)$; 则

$$\begin{aligned} Y^*(\theta) &= Y_2 \int \frac{\sin^2 \theta}{Y_2} d\theta \left[\frac{X_1}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\alpha_2}{3} + i \frac{X_2}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \\ &\quad - Y_1 \int \frac{\sin^2 \theta}{Y_1} d\theta \left[\frac{X_1}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \frac{\alpha_1}{3} + i \frac{X_2}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{而} \quad \left. \begin{aligned} Y_2 \int \frac{\sin^2 \theta}{Y_2} d\theta &= \frac{(1-\alpha_2^2)}{2} \left[\frac{32}{25} \frac{t}{(1-\alpha_2)} - \frac{8}{25} \frac{t^3}{(3-\alpha_2)} \right] - \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\alpha_2 \sin \theta}{2} \\ Y_1 \int \frac{\sin^2 \theta}{Y_1} d\theta &= \frac{(1-\alpha_1^2)}{2} \left[\frac{32}{25} \frac{t}{(1-\alpha_1)} - \frac{8}{25} \frac{t^3}{(3-\alpha_1)} \right] - \frac{\sin 2\theta}{4} - \frac{\alpha_1 \sin \theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

(3.15)式的二个积分为展开为 t 的幂级数后的近似积分, 在 $90^\circ < \theta < 115^\circ$ 范围内其相对误差不大于4%.

$$P_{s'} = C_3 \csc \theta + C_4 \operatorname{ctg} \theta + iA^* \left(\frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \operatorname{ctg} \theta \right) \quad (3.16)$$

$C_3 \csc \theta + C_4 \operatorname{ctg} \theta$ 为方程(2.12)对应的齐次方程的通解. 而 $iA^* \left(\frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \operatorname{ctg} \theta \right)$ 为(2.12)的一个特解.

积分常数 C_3 , C_4 , C_5 , C_6 由定解条件(3.10)确定:

$$C_5 = \begin{vmatrix} R_1 & a_5 \\ -Y^* \left(\frac{\pi}{2} \right) & 1 \\ a_5 & a_6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad C_6 = \begin{vmatrix} a_5 & R_1 \\ 1 & -Y^* \left(\frac{\pi}{2} \right) \\ a_5 & a_6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} a_5 &= \left[(1 + iK_{2c}) \operatorname{tg}^{\alpha_1} \left(\frac{\theta_3}{2} \right) + K_{1c} \alpha_1 \operatorname{tg}^{\alpha_1} \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \right] \\ a_6 &= (1 + iK_{2c} + K_{1c} \alpha_2) \operatorname{tg}^{\alpha_2} \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \\ R_1 &= \frac{X_1}{3} \sin^3 \theta_3 - K_{1c} \sin \theta_3 \frac{dY^*(\theta_3)}{d\theta} - I + H - (1 + iK_{2c}) Y^*(\theta_3) \\ I &= iA^* \left[\frac{\sin 2\theta_3}{4} + \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \right] \\ H &= iA^* \left[\frac{\sin \theta_3}{2} + (1 + \cos \theta_3) \operatorname{ctg} \theta_3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= [P_c(\theta_3) - H] / \operatorname{ctg} \left(\frac{\theta_3}{2} \right) \\ C_4 &= C_3 + iA^* \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

至此把 P_c , P_s , P_r 代入所设压力表达式 $P = P_c + \operatorname{Re}\{\varepsilon_r P_r e^{i\tau}\} + \operatorname{Re}\{\varepsilon_s P_s e^{i\phi^*}\}$ 就可得槽区 $[\frac{\pi}{2}, \theta_3]$ 上的压力分布. 把 P_{cs} , P_{rs} , P_{ss} 代入 $P = P_{cs} + \operatorname{Re}\{\varepsilon_r P_{rs} e^{i\tau}\} + \operatorname{Re}\{\varepsilon_s P_{ss} e^{i\phi^*}\}$ 中 就得到光区上 $[\theta_3, \pi]$ 的压力分布.

四、油膜压强的合力

有了油膜的压强分布, 压强在轴承定子上产生的合力 \bar{F} 就只是一个积分的问题了.

$\bar{F} = P_0 \iint P \bar{r}_1^0 d\sigma = P_0 R_0^2 \int_0^{2\pi} d\phi^* \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P \bar{r}_1^0 \sin \theta d\theta$. \bar{r}_1^0 为球坐标系 (r_1, θ, ϕ^*) 中半径方向单位矢量, 它与对应直角坐标系 $o-x_1 y_1 z_1$ 的关系为: $\bar{r}_1^0 = \cos \phi^* \sin \theta \bar{i}_1 + \sin \phi^* \sin \theta \bar{j}_1 + \cos \theta \bar{k}$. 注意压强 P 的表达式形式及三角函数在区间 $[0, 2\pi]$ 内的正交性, 立即可以得到: P_{cs} , P_{rs} , P_{ss} 在 x_1, y_1 方向无合力. 而 P_r , P_{rs} 在铅直方向的合力为零. 积分的结果是:

1. 由 P_c , P_{cs} 造成的铅直方向的合力 F_{z1} .

$$\begin{aligned} F_{z1} &= P_0 R_0^2 \left\{ 2\pi \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} P_c \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_{\theta_3}^{\pi} P_{cs} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] \right\} \\ &= P_0 R_0^2 \cdot 2\pi \left[A_s \frac{K_{4c}}{K_{1c}} \cos \beta \cos \theta_3 \left(\frac{\cos^2 \theta_3}{3} + \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \right) - \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. 由 P_r , P_{rs} 产生铅直方向合力 F_{z2} .

$$\begin{aligned} F_{z2} &= P_0 R_0^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\phi^* \cdot \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} \operatorname{Re}\{\varepsilon_r P_r e^{i\tau}\} \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_{\theta_3}^{\pi} \operatorname{Re}\{\varepsilon_s P_{rs} e^{i\tau}\} \sin \theta \cos \theta d\theta \right] \\ &= P_0 R_0^2 \cdot 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \varepsilon_r e^{i\tau} \left[\frac{1}{K_{1c}} \left(\frac{X_1}{24} \cos^4 \theta_3 + i\sigma \frac{\cos^3 \theta_3}{6} \right) - \frac{i\sigma}{6} (1 + \cos^3 \theta_3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \left(\frac{i\sigma \cos \theta_3}{2} - \frac{X_1 \cos^2 \theta_3}{6K_{1c}} - \frac{i\sigma \cos \theta_3}{2K_{1c}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. 由 P_r , P_{r*} 产生水平面内合力可分成二个分量 F_{x_1} 和 F_{y_1} ,

$$F_{x_1} - iF_{y_1} = P_0 R_0^2 \pi \cdot e_r \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} P_r \sin^2 \theta d\theta + \int_{0_3}^{\pi} P_{r*} \sin^2 \theta d\theta \right] \quad (4.3)$$

其中第一项: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} P_r \sin^2 \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} \sin^2 \theta Y^*(\theta) d\theta + C_5 \left\{ \frac{2}{5} (1 - \alpha_1^2) \left[\frac{8}{5} \frac{\operatorname{tg}^{\alpha_1+1}(\theta_3/2)}{(1+\alpha_1)} \right. \right.$

$$- \frac{2}{5} \frac{\operatorname{tg}^{\alpha_1+3}(\theta_3/2)}{3+\alpha_1} \left. \right] - \frac{\sin 2\theta_3 \operatorname{tg}^{\alpha_1}(\theta_3/2)}{4} + \frac{\alpha_1 \sin \theta_3 \operatorname{tg}^{\alpha_1}(\theta_3/2)}{2} \left. \right\}$$

$$- C_5 \left\{ \frac{2}{5} (1 - \alpha_1^2) \left[\frac{8}{5} \frac{1}{1+\alpha_1} - \frac{2}{5} \frac{1}{3+\alpha_1} \right] + \frac{\alpha_1}{2} \right\}$$

$$+ C_5 \left\{ \frac{2}{5} (1 - \alpha_2^2) \left[\frac{8}{5} \frac{\operatorname{tg}^{\alpha_2+1}(\theta_3/2)}{(1+\alpha_2)} - \frac{2}{5} \frac{\operatorname{tg}^{\alpha_2+3}(\theta_3/2)}{(3+\alpha_2)} \right] \right.$$

$$- \frac{\sin 2\theta_3 \operatorname{tg}^{\alpha_2}(\theta_3/2)}{4} + \frac{\alpha_2 \sin \theta_3 \operatorname{tg}^{\alpha_2}(\theta_3/2)}{2} \left. \right\} - C_6 \left\{ \frac{2}{5} (1 - \alpha_2^2) \left[\frac{8}{5} \frac{1}{1+\alpha_2} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2}{5} \frac{1}{3+\alpha_2} \right] + \frac{\alpha_2}{2} \right\} \quad (4.4)$$

式 (4.4) 中第一项 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_3} \sin^2 \theta Y^*(\theta) d\theta = \frac{1}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{X_1 \alpha_2}{3} \right.$

$$+ iX_2 \left. \right] \cdot \left\{ \frac{(1 - \alpha_2^2)}{2} \left[\frac{32}{25} \frac{a}{(1 - \alpha_2)} - \frac{8}{25} \frac{b}{(3 - \alpha_2)} \right] - \frac{e}{4} - \frac{\alpha_2}{2} \cdot d \right\}$$

$$- \frac{1}{K_{1c}(\alpha_2 - \alpha_1)} \left[\frac{X_1 \alpha_1}{3} + iX_2 \right] \cdot \left\{ \frac{1 - \alpha_1^2}{2} \cdot \left[\frac{32}{25} \frac{a}{(1 - \alpha_1)} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{8}{25} \frac{b}{(3 - \alpha_1)} \right] - \frac{e}{4} - \frac{\alpha_1}{4} d \right\} \quad (4.5)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} a &= - \left(\cos \theta_3 + \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \right) + \frac{1}{2} \\ b &= \left[4 \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_3}{2} \right) - 4 \ln (\sin \theta_3) + 3 \cos \theta_3 + \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \right] - \frac{1}{2} \\ e &= \frac{\sin^4 \theta_3 - 1}{2} \\ d &= \frac{\cos^3 \theta_3}{3} - \cos \theta_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

式 (4.3) 中第二项: $\int_{\theta_3}^{\pi} \sin^2 \theta P_{r*} d\theta = C_3 \left(1 + \cos \theta_3 - \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \right) + iA^* \left[- \frac{\sin^2 \theta_3}{2} \right.$

$$\left. + \frac{1}{6} (1 + \cos^3 \theta_3) + \frac{1 + \cos \theta_3}{2} \right] \quad (4.7)$$

由于油膜间隙内无径向压差和径向流动, 所以转子的受力与以上求出的 \vec{F} 等值且反向。

从下节的讨论中可以看到切应力的合力主要部分表现在 y_1 方向上, 因此求得后只要把这一部分也合并到 F_{y_1} 项中便可以得到润滑油膜对转子的支承力。

五、油膜的切应力及其合力

在得到了润滑油的压力分布之后, 它的速度分布从而切应力也都能解析地表达出来。

由于转子的高速旋转其油膜的切应力主要反映在转子的圆周方向 ϕ^* 上。

$$\tau_{\phi^*} = -P_0 \cdot \frac{c}{R_0} \left(\frac{H}{2\sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi^*} + \frac{A\sin\theta}{6H} \right) \quad (5.1)$$

式中第一项是由压力沿圆周方向的梯度所产生, 第二项是由转子运动所产生的速度所决定。由于后项的量级远远大于前项, 所以在研究切应力及其合力时, 我们把前项略去。同时在子午方向的切应力 τ_s , 也因在该方向上仅有压力梯度产生的切应力而无转子的旋转运动, 而予以略去。式中 H 为轴承间隙, 在槽区上以 H_0 代入, 在台区上以 H_1 代入。即在槽上有切应力 $\tau_{槽}$, 而在台上有切应力 $\tau_{台}$ 。为了简化之, 在开槽区上, 以平均切应力 $\bar{\tau}$ 来表示。在开槽区圆周方向 $\Delta\phi^*$ 内包含有一台一槽, 所以应有:

$$\bar{\tau}\Delta\phi^* = \tau_{槽} \cdot \alpha\Delta\phi^* + \tau_{台}(1-\alpha)\Delta\phi^*$$

$$\text{在}\Delta\phi^* \rightarrow 0\text{时} \quad \bar{\tau} = \tau_{槽} \cdot \alpha + \tau_{台}(1-\alpha)$$

从而在开槽区 $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_3$ 内切应力为:

$$\bar{\tau} \doteq -\frac{P_0 c}{R_0} \left[\frac{\alpha A \sin\theta}{6H_0} + (1-\alpha) \frac{A \sin\theta}{6H_1} \right] \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_3 \quad (5.2)$$

在光区($\theta_3 \leq \theta \leq \pi$)内切应力为:

$$\bar{\tau} \doteq -\frac{P_0 c}{R_0} \cdot \left(\frac{A \sin\theta}{6H_1} \right) \quad \theta_3 \leq \theta \leq \pi \quad (5.3)$$

切应力的合力 T 由于切应力沿圆周方向分布, 其合力必在水平面内, 它的沿 x_1 和 y_1 方向的分量 T_{x_1} 和 T_{y_1} 分别为:

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} &= \iint \bar{\tau} \sin\phi^* d\sigma = \iint \bar{\tau} \sin\phi^* R_0^2 \sin\theta d\theta d\phi^* \\ T_{y_1} &= \iint -\bar{\tau} \cos\phi^* d\sigma = \iint -\bar{\tau} \cos\phi^* R_0^2 \sin\theta d\theta d\phi^* \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

见图5所示。

将(5.2), (5.3)二式所表示的切应力代入(5.4)中积分, 同时注意到:

$$\frac{1}{H_1} \doteq 1 - \cos\theta \varepsilon, \cos T - \sin\theta \varepsilon, \cos\phi^* \quad (5.5)$$

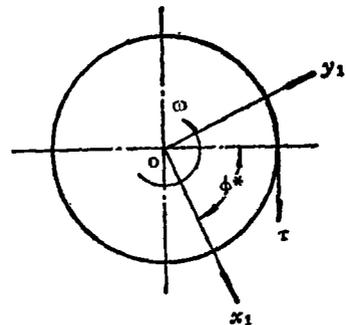


图5 切应力分布

$$\frac{1}{H_0} = \frac{1}{(H_1 + \delta/c)} \doteq \frac{1}{(1 + \delta/c)} \cdot \left\{ 1 - \left[\frac{\operatorname{Re}(\varepsilon \cos\theta e^{i\theta}) + \operatorname{Re}(\varepsilon \sin\theta e^{i\phi^*})}{(1 + \delta/c)} \right] \right\} \quad (5.6)$$

积分得:

$$\left. \begin{aligned} T_{x_1} &= 0 \\ T_{y_1} &= -P_0 R_0 c \varepsilon \cdot \frac{\pi A}{6} \left\{ \frac{2}{3} + \cos \theta_3 - \frac{\cos^3 \theta_3}{6} + \left(\frac{\cos^3 \theta_3}{6} - \cos \theta_3 \right) \left[\frac{\alpha}{(1 + \delta/c)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - \alpha) \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

六、计算结果

以上的结果使我们得以在给定轴承总体几何尺寸参数条件下, 选取最佳槽型参数, 定量地进行轴承动、静特性的研究. 只要编制一个简单的程序, 即可在计算机上对于各个不同的槽型参数所产生的影响逐点进行计算和比较.

本文给出一具体例子说明计算结果.

本例在四个槽型参数 $\Gamma_c = 1.9$, $\alpha = 0.17$, $\beta = 150^\circ$, $\theta_3 = 110^\circ$ 中任意固定其中三个参数, 变动其中一个进行计算, 以独立地研究各参数对水平方向承载能力的影响.

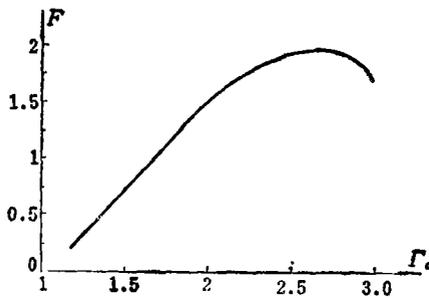


图6 槽台比 Γ_c 对支承力的影响

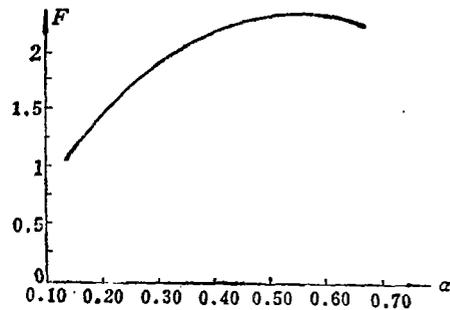


图8 槽宽比 α 对支承力的影响

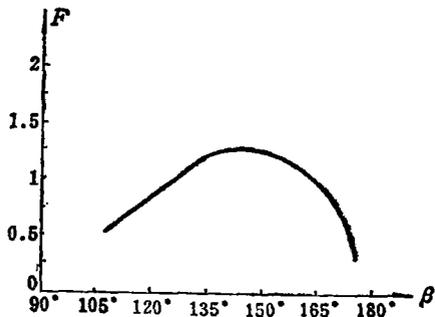


图7 槽倾角 β 对支承力的影响

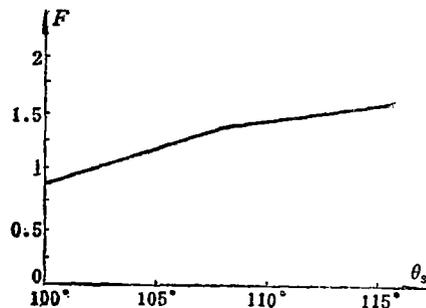


图9 槽区宽度 θ_3 对支承力的影响

图6—9所示为所设频率比 $\frac{\nu}{\omega} = 0.49$ 时水平方向无量纲合力 F 与四个槽型参数之间的函数关系. 可以看到, 当 Γ_c 取2.6时, α 取0.55时, β 取 147° 时, F 分别取得一个极大值. 表示槽

区宽度的 θ_0 越大, 支承力也随之增大. 它对于轴向承载能力的影响也是如此, 见式(4.1). 要说明的是 θ_0 的增大使轴承系统的稳定性随之降下, 见[2]. [2]认为 θ_0 以 135° 为佳. 槽型参数对于轴承稳定性的影响同样可以借助于以上结果, 通过求出油膜的刚度来进行计算. 由于篇幅所限, 本文不再赘述.

参 考 文 献

1. Vohr, J. H. and Pan, C. H. T., Designs Data of Gas Lubricated Spin Axis Bearings for Gyroscopes. MTI-68 TR29. (1968.6).
2. 苏铭德, 付瑞峰, 有螺旋槽球形轴承特性的小扰动分析, 全国第二次流体力学会议报告.

Load Capacity of Oilfilm-Lubricated Ball Bearing with Spiral Grooves

Kan Jian-min Chu Yueh-rei

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

In order to improve load capacity and stability of a fluid moving-pressure bearing. At present, measure of cutting grooves on a turning-shaft is generally adopted.

The performances of spiral grooves are better in various groove-types. Therefore, a theoretical analysis and an experimental investigation of the bearing with spiral grooves attract general attention. But the results of most articles are the numerical solutions of computer in China. Using the methods of parameter perturbation in this paper, an approaching analytical solution of Reynolds equation of the moving-pressure oilfilm-lubricated ball-bearing with spiral grooves has been obtained. We have combined the numerical solutions of computer, the influence of the bearing parameters upon the load capacity is discussed. The optimum values of the groove parameter are obtained. The theoretical conclusion of the paper is in good agreement with the experimental data obtained by "651" Institute.