

# 在旋转系统中4°C的水流经具有等常 负压的无限大多孔板时的自由对流\*

A. 赖泼底斯      C. 潘第革斯      G. 啟文尼第斯

(希腊, 爱翁尼那大学, 物理数学学院, 1981年9月28日收到)

## 摘 要

本文研究了旋转系统中4°C的水流经竖立的无穷大多孔板时定常自由对流的分析解, 求得了速度和温度的耦合非线性方程组的近似解, 讨论了爱克曼数 $E'$ 的效应 (普朗特数为 $P=11.4$ , 相当于4°C的水)

## 一、引 论

我们考虑4°C的水流经无穷大竖立多孔板时的自由对流流动, 在这个温度下, 密度变化按下式进行

$$\Delta\rho = -\rho\gamma(\Delta T)^2 \quad (1.1)$$

其中 $\gamma$ 为热膨胀系数, 在自由对流的流动中, 这种密度变化处于主导地位, 这和普通温度下的对流流动是完全不一样的, 除了测定微粒子的末端速度外, 在4°C时测定水的或其它热传导和质量传递的分子扩散率, 对研究如何抑制自由对流是很有用的.

Coren<sup>[1]</sup>分析了从竖立板以最大密度的自由对流流进液体时的热传导问题, 证明了对4°C的水而言, 容许有一个相似解. Covindarajulu<sup>[2]</sup>在板上有正压(注入)和负压(吸出)的条件下求解了同一问题. Pandé, Georgantopoulos, Goudas<sup>[3]</sup>研究了4°C的水流经具有负压的无穷大多孔板时的自由对流问题.

本文研究了旋转的4°C水历经无穷大多孔板并在板上具有等速吸入能力的自由对流问题.

这里必须指出, 当爱克曼数 $E'=0$ 时, 我们所得结果和 Pandé, Georgantopoulos, Goudas的理论相同.

## 二、数 学 分 析

我们假定4°C的水历经无穷大多孔竖立板时的自由对流是定常的, 初始卡氏坐标为 $x', \psi'$ ,

\* 钱伟长推荐.

$z'$ , 其中  $x'z'$  平面为板的平面,  $x'$  轴向上,  $\psi'$  轴在平面的法线方向. 因为板是无穷大的, 所以一切变量都只是  $\psi'$  的函数. 如果液体绕  $\psi'$  轴作等角速度  $\Omega$  的等速转动, 在利用了伯努利近似以后, 则描述本问题的方程:

$$\frac{\partial v'}{\partial \psi'} = 0 \quad (2.1)$$

$$v' \frac{\partial u'}{\partial \psi'} = g_x \gamma (T' - T'_\infty)^2 + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial \psi'^2} - 2\Omega w' \quad (2.2)$$

$$v' \frac{\partial w'}{\partial \psi'} = \nu \frac{\partial^2 w'}{\partial \psi'^2} + 2\Omega u' \quad (2.3)$$

$$v' \frac{\partial T'}{\partial \psi'} = \frac{k}{\rho' c_p} \frac{\partial^2 T'}{\partial \psi'^2} + \frac{\nu}{c_p} \left[ \left( \frac{\partial u'}{\partial \psi'} \right)^2 + \left( \frac{\partial w'}{\partial \psi'} \right)^2 \right] \quad (2.4)$$

其中  $u'$ ,  $w'$  为  $x'$  轴和  $z'$  轴向的速度分量,  $g_x$  为地球引力加速度,  $\rho'$  为边界层中的流体密度,  $\nu$  为动力粘度系数,  $T'$  为流体温度,  $k$  为热传导率,  $c_p$  为等压比热. 方程 (2.2), (2.3) 的最后一项为哥氏力的分量, (2.4) 式的括弧中的项为粘性耗散. 连续方程 (2.1) 给出  $v = -v_0 =$  常数, 其中  $v_0 > 0$ .

速度场、温度场的有关边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \psi' = 0: & \quad u' = 0, \quad w' = 0, \quad T' = T'_w \\ \psi' \rightarrow \infty: & \quad u' \rightarrow 0, \quad w' \rightarrow 0, \quad T' \rightarrow T'_\infty \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中  $T'_w$  是板的温度,  $T'_\infty$  是板外流体的温度. 让我们引进下列无量纲参量:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{\psi' v_0}{\nu}: \text{距离} \\ u &= \frac{u'}{v_0}: \text{速度} \\ w &= \frac{w'}{v_0}: \text{速度} \\ \theta &= \frac{T' - T'_\infty}{(T'_w - T'_\infty)}: \text{温度} \\ P &= \frac{\rho' \nu c_p}{k}: \text{普朗特数} \\ G &= \frac{\nu g_x \gamma (T'_w - T'_\infty)^2}{v_0^3}: \text{葛赖肖夫数} \\ E &= \frac{v_0^2}{c_p (T'_w - T'_\infty)}: \text{爱克尔特数} \\ E' &= \frac{2\Omega \nu}{v_0^2}: \text{爱克曼数} \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

于是, 在利用了 (2.5) 和 (2.6) 式以后, (2.2), (2.3), (2.4) 式可以化简为

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{du}{d\eta} = -G\theta^2 + E'w \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} + \frac{dw}{d\eta} = -E'u \quad (2.8)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + P \frac{d\theta}{d\eta} = -PE \left[ \left( \frac{du}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{dw}{d\eta} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

而边界条件(2.6)可以用无量纲量写成:

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: & u=0, w=0, \theta=1 \\ \eta \rightarrow \infty: & u \rightarrow 0, w \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

引入复变量  $f = u + iw$ , 方程(2.7)–(2.9)可以写成

$$\frac{d^2f}{d\eta^2} + \frac{df}{d\eta} + iE'f = -G\theta^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} + P \frac{d\theta}{d\eta} = -PE \left[ \frac{df}{d\eta} \frac{d\bar{f}}{d\eta} \right] \quad (2.12)$$

其中 $\bar{f}$ 为 $f$ 的共轭复变量. 方程组(2.11)和(2.12)仍是耦合的、非线性的, 为了求解它们, 我们展开 $f$ 和 $\theta$ 如下:

$$\left. \begin{aligned} f &= f_0 + Ef_1 + O(E^2) \\ \theta &= \theta_0 + E\theta_1 + O(E^2) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

对于不可压缩的流体而言,  $E$ 是很小的小量.

把(2.13)代入(2.11), (2.12), 并使 $E^0$ 、 $E$ 的系数相等, 略去 $E^2$ 及高次项, 我们有

$$\frac{d^2f_0}{d\eta^2} + \frac{df_0}{d\eta} + iE'f_0 = -G\theta_0^2 \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2f_1}{d\eta^2} + \frac{df_1}{d\eta} + iE'f_1 = -2G\theta_0\theta_1 \quad (2.15)$$

$$\frac{d^2\theta_0}{d\eta^2} + P \frac{d\theta_0}{d\eta} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{d\eta^2} + P \frac{d\theta_1}{d\eta} = -P \left( \frac{df_0}{d\eta} \right) \left( \frac{d\bar{f}_0}{d\eta} \right) \quad (2.17)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \eta=0: & f_0=0, f_1=0, \theta_0=1, \theta_1=0 \\ \eta \rightarrow \infty: & f_0 \rightarrow 0, f_1 \rightarrow 0, \theta_0 \rightarrow 0, \theta_1 \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

(2.14)–(2.17)式在边界条件(2.18)下的解为

$$\theta_0 = e^{-P\eta} \quad (2.19)$$

$$f_0 = C_1(e^{R_2\eta} - e^{-2P\eta}) \quad (2.20)$$

$$\theta_1 = C_2 e^{(R_2 + \bar{R}_2)\eta} + C_3 e^{(R_2 - 2P)\eta} + C_4 e^{(\bar{R}_2 - 2P)\eta} + C_5 e^{-4P\eta} + C_6 e^{-P\eta} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} f_1 = & C_7 e^{-2P\eta} + C_8 e^{(R_2 + \bar{R}_2 - P)\eta} + C_9 e^{(R_2 - 3P)\eta} + C_{10} e^{(\bar{R}_2 - 3P)\eta} \\ & + C_{11} e^{-6P\eta} + C_{12} e^{R_2\eta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中

$$R_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}, \quad R_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}, \quad \alpha = -iE' \quad (2.23a, b, c)$$

$$C_1 = \frac{G}{(2P + R_1)(2P + R_2)}, \quad C_2 = -\frac{PC_1 \bar{C}_1 R_2 \bar{R}_2}{(R_2 + \bar{R}_2)(R_2 + \bar{R}_2 + P)} \quad (2.23d, e)$$

$$C_3 = -\frac{2P^2 R_2 C_1 \bar{C}_1}{(R_2 - 2P)(R_2 - P)}, \quad C_4 = -\frac{2P^2 \bar{R}_2 C_1 \bar{C}_1}{(\bar{R}_2 - 2P)(\bar{R}_2 - P)} \quad (2.23f, g)$$

$$C_5 = -\frac{PC_1 \bar{C}_1}{3}, \quad C_6 = -(C_2 + C_3 + C_4 + C_5) \quad (2.23h, i)$$

$$C_7 = -\frac{2GC_6}{(2P + R_1)(2P + R_2)}, \quad C_8 = -\frac{2GC_2}{(R_2 + \bar{R}_2 - P - R_1)(\bar{R}_2 - P)} \quad (2.23j, k)$$

$$C_9 = \frac{2GC_3}{3P(R_2 - 3P - R_1)}, \quad C_{10} = -\frac{2GC_4}{(\bar{R}_2 - 3P - R_1)(\bar{R}_2 - 3P - R_2)} \quad (2.23l, m)$$

$$C_{11} = -\frac{2GC_5}{(5P + R_1)(5P + R_2)}, \quad C_{12} = -(C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11}) \quad (2.23n, o)$$

### 三、讨 论

为了指出爱克曼数  $E'$  对流场的影响, 我们考虑下面诸方面:

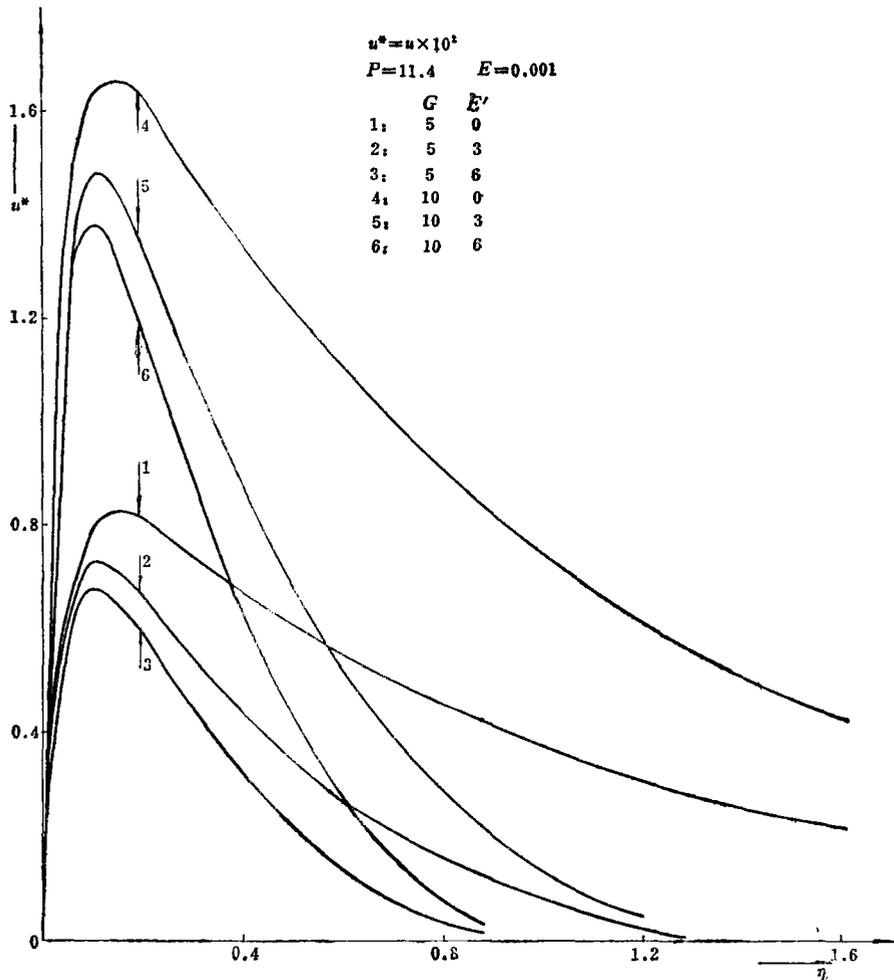


图1 无量纲一级近似速度

(I) 由于我们假定流体的密度变化按(1.1)式进行,普朗特数 $P$ 可以取11.4,它是对于4℃的水的 $P$ 值(Coren<sup>[1]</sup>).

(II) 自由对流参数 $G$ (葛赖肖夫数),由于它的定义规定取任意正值.

(III) 对不可压缩流体和对低速运动而言,爱克尔特数 $E$ 是很小的小数,我们取值(0.001—0.003),它可以解释为由粘性耗散而引起的加热过程.

在图1和图2中,我们图示了无量纲速度分量.从这些图中可以看到,当爱克曼数 $E'$ 增加时,一级近似速度在板的附近是降低的,而二级速度则是增加的.

无量纲剪应力分量在板面上( $\eta=0$ )由一级近似速度和二级速度所引起的部份由(2.20),(2.21)给出,它们分别为

$$\tau_u = \left. \frac{du}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (3.1)$$

$$\tau_w = \left. \frac{dw}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (3.2)$$

图3和图4表示 $\tau_u, \tau_w$ 对 $G$ 的分布,我们应看到,当 $E'$ 增加时, $\tau_u, \tau_w$ 是增加的.

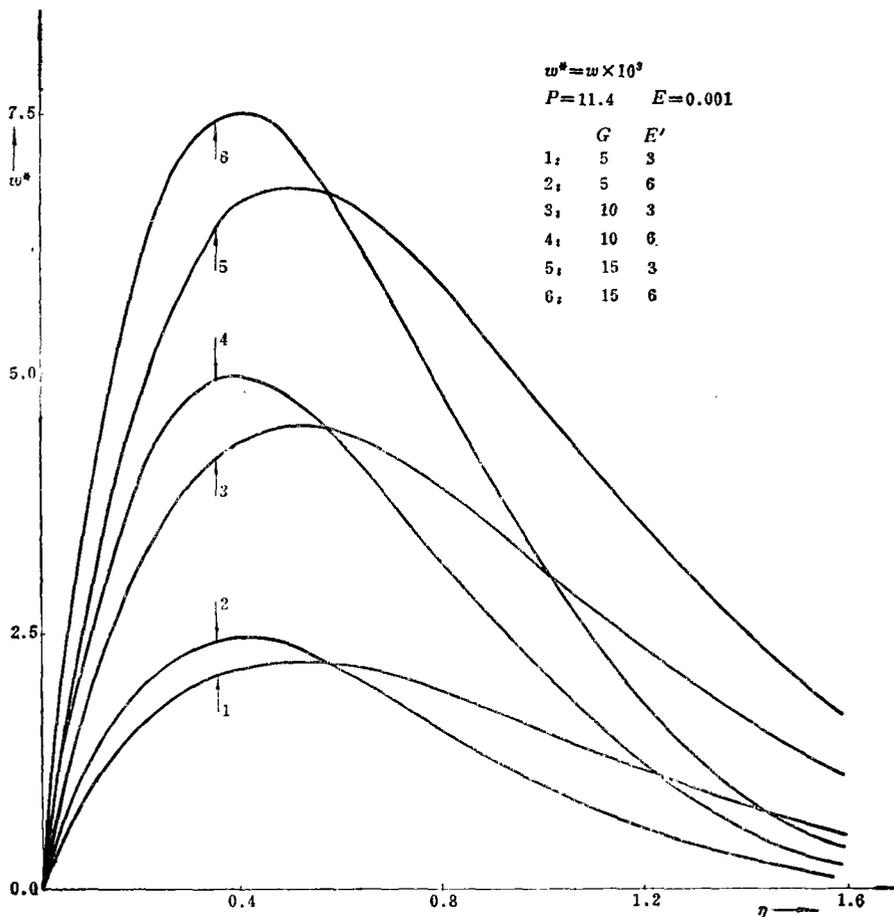
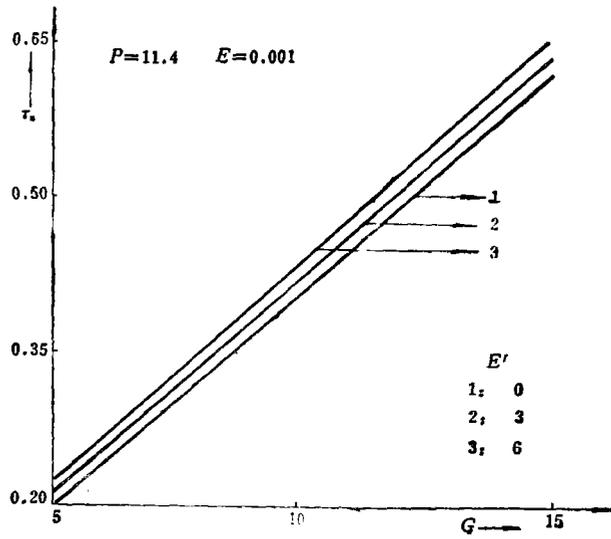
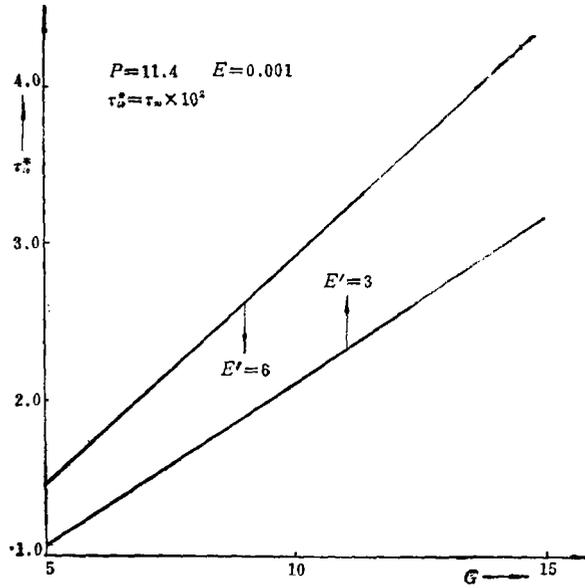


图2 无量纲二级速度

图3 无量纲剪应力 $\tau_w$ 图4 无量纲剪应力 $\tau_w$ 

## 参 考 文 献

1. Coren, S. L., *Chem. Engng. Sci.*, 21, (1966) 515.
2. Covindarajulu, T., *Chem. Engng. Sci.*, 25, (1970) 1827.
3. Pandé, G. C., Georgantopoulos, G. A., and Goudas, C. L., *Rev. Roum. Phys.*, 22, (1977) 903.

## Free Convection Flow of Water at 4°C Passing an Infinite Porous Plate with Constant Suction in a Rotating System

A. Raptis    C. Perdikis    G. Tjivanidis

*(University of Ioannina, School of Physics and Mathematics, Ioannina, Greece)*

### Abstract

In this work an analysis of steady free convection flow of water at 4°C passing a vertical infinite porous plate in a rotating system is considered. Approximate solutions for the coupled non-linear equations are obtained for the velocity and the temperature. The effect of  $E$  (Eckman number) is discussed, when  $P$  (Prandtl number)=11.4, which corresponds to water at 4°C.