

非线性系统动力分析的模态综合技术*

郑 兆 昌

(清华大学, 1982年 3 月收到)

摘 要

各种模态综合方法已广泛应用于线性结构的动力分析, 但是, 一般都不适用于非线性系统。

本文基于[20][21]提出的方法, 将一种模态综合技术推广到非线性系统的动力分析。该法应用于具有连接件耦合的复杂结构系统, 以往把连接件简化为线性弹簧和阻尼器。事实上, 这些连接件通常具有非线性弹性和非线性阻尼特性。例如, 分段线性弹簧、软特性或硬特性弹簧、库伦阻尼、弹性滞回阻尼等, 但就各部件而言, 仍属线性系统。可以通过计算或试验或兼由两者得到一组各部件的独立的自由界面主模态信息, 且只保留低阶主模态。通过连接件的非线性耦合力, 集合各部件运动方程而建立成总体的非线性振动方程。这样问题就成为缩减了自由度的非线性求解方程, 可以达到节省计算机的存贮和运行时间的目的。对于阶次很高的非线性系统, 若能缩减足够的自由度, 那么问题就可在普通的计算机上得以解决。

由于一般多自由度非线性振动系统的复杂性, 一般而言, 这种非线性方程很难找到精确解。因此, 对于任意激励下系统的瞬态响应, 可以采用数值计算方法求解缩减的非线性方程。

一、引 言

过去二十年来, 作为结构动力学领域里的一个分支发展起来的模态综合技术, 已广泛应用于复杂结构系统的线性动力分析。模态综合的概念是 Hurty^{[1][2]}引入的, 他的第一篇文章发表于1960年, 更早的工作可追溯到 Serbin^[3], Sofrin^[4]和 Bishop^[5]。自从 Hurty 初期的工作发表以来, 又有很多的改进工作^{[6]—[16]}, 近期的评述、总结可见[17]—[19]。应用的范围从飞机、导弹一直扩展到其它机械、土木工程结构。该法成功的关键在于大大缩减系统的自由度而又不影响问题的物理本质。但是, 就作者所知, 这些方法通常只限于线性系统, 遗憾的是很多工程结构不能当作线性系统来处理。当出现强非线性特性时, 线性近似和实际观察与试验很不符合。此外, 线性化理论还自动滤掉像跳跃现象、亚谐振动、极限环运动等如此重要的振动现象。因此, 目前正致力于求解能更准确代表实际情况的模型的非线性方程。对于复杂结构系统, 尤其是对非线性系统作振动分析, 所化费的代价是极其昂贵的。线性系统中采用模态综合缩减自由度, 对节省内存和机时是十分有用的。因此, 把模态综合法推广到非线性系统确实是一个值得进一步研究的问题。

文献[20][21]给出了一种适合于具有连接件耦合的复杂结构系统振动分析的模态综合技术。但是, 这种连接件被简化成线性弹簧和阻尼器。如果结构遭受到强的激励, 这些连接件

* 钱伟长推荐。

将首先呈现非线性特性，而各部件则通常仍保持线性特性。例如：行驶在随机性路面上的车辆，板簧将出现非线性；转子-油膜轴承-基础系统中油膜力在本质上是非线性的；在滨海结构-土壤交互作用问题的动力分析中，土壤是很强的非线性材料。当连续加载时，应力-应变呈曲线关系，因此，切线模量连续下降，在循环载荷下出现滞后回线。

本文基于文献[20][21]提出的方法，企图把模态综合方法推广应用于上述非线性系统。

具有非线性连接件耦合的系统，其模态综合的方法类似于线性系统，大致包括以下四个基本步骤：

1. 分解

当系统的连接件被解除后，整体结构将解体为一系列的部件（或称子结构，子系统），由于这些部件和连接件是在建造的组装过程中所用的，因而这种模型自然而然能等同和描述系统的各个部分。

2. 分析

我们考虑各部件仍属线性振动系统，由有限元法计算或由试验可得各部件的自由界面主模态信息且只保留低阶模态。此外，对于大型复杂结构而言，往往由不同工厂和部门所生产，子结构化的分析可由各负责的工程师们独立地进行。非线性连接件的特性，也由试验或计算得到，有的很容易，有的则很困难。

3. 总装

当经过模态分析得到各部件的模态信息之后，各部件的运动可以用一组减缩的低阶主模态来代表。集合各部件的运动方程即可得总系统的运动方程，部件之间的耦合是由连接件的耦合力实现的。这样，就把问题化简为求解较少自由度的非线性方程。

4. 再现

在结构部件的某些重要部位，工程师需要很好了解到计算所得到的振幅、动应力等的动力分析的结果，而求解非线性方程所采用的是模态坐标，因此，要转换到物理坐标以再现结构的动态特性。

二、运动方程

考虑图 1 所示由连接件组装各部而成的复杂结构系统。当解除各连接件 BG, GH, \dots 后，系统分为各部件 B, G, H, \dots 。用角标 b, g, h, \dots 指示各矢量（位移、力、 \dots ）所属部件的关系。

部件之间连接的本质是连接件的耦合作用，当连接件被解除后，其作用可用耦合力或/和力矩来代替，如图 2 所示。连接件的惯性一般可以忽略，因此这些耦合力成对出现并符合平衡方程：

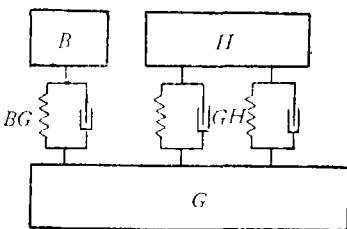


图 1

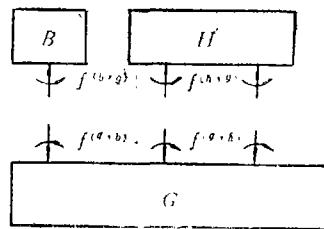


图 2

$$f^{(g,b)} = -f^{(b,g)}$$

这些耦合力是连接点相对位移和相对速度的非线性函数。为了选择由各连接件如 BG 连接到部件 G 上的界面坐标, 构造指示矩阵 $L^{(g,b)}$, 若 $x_j^{(g)}$ 是界面坐标 $x^{(g,b)}$ 中第 j 个元素, 则 $L_{ij}^{(g,b)} = 1$, 而 $L^{(g,b)}$ 的 i 行的其余元素皆取零。这可得

$$x^{(g,b)} = L^{(g,b)} x^{(g)}$$

其中 $x^{(g)}$ 表示部件 G 的位移矢量。非线性力矢量可以表达为以下函数

$$f^{(g,b)} = f^{(g,b)}(x^{(g,b)}, \dot{x}^{(g,b)}, x^{(b,g)}, \dot{x}^{(b,g)})$$

某些非线性力的特殊情况如图3。

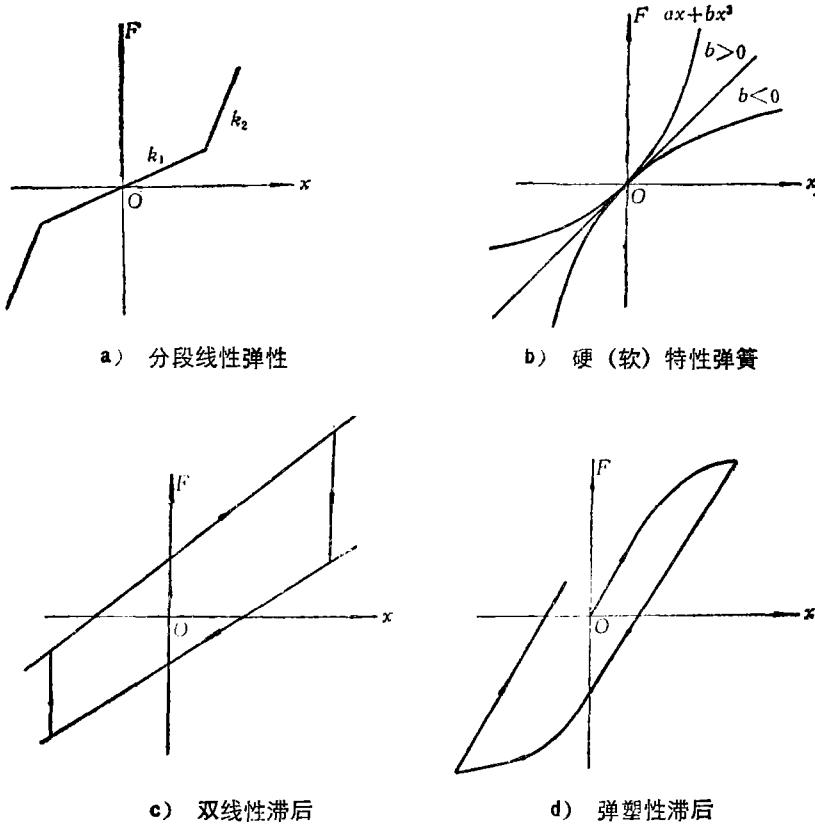


图 3

应用有限元法, 可建立任一部件 G 的运动方程如下

$$m^{(g)} \ddot{x}^{(g)} + c^{(g)} \dot{x}^{(g)} + k^{(g)} x^{(g)} = r^{(g)}(t) - f^{(g)} \tag{2.1}$$

其中 $r^{(g)}(t)$ 是外激励力矢量, 耦合力矢量 $f^{(g)}$ 是由零元素和由连接件 EG, GH, \dots 等作用于部件 G 上的耦合力矢量 $f^{(g,e)}, f^{(g,h)}, \dots$ 等集合而成的。

可得整系统的运动方程为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = R(t) - F(x, \dot{x}) \tag{2.2}$$

其中准对角矩阵

$$M = \text{block-diag}[m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(g)}] \tag{2.3}$$

$$C = \text{block-diag}[c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(g)}] \tag{2.4}$$

$$K = \text{block-diag}[k^{(1)}, k^{(2)}, \dots, k^{(g)}] \tag{2.5}$$

外力矢量和耦合力矢量为

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{r}^{(1)T}, \mathbf{r}^{(2)T}, \dots, \mathbf{r}^{(s)T}]^T \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = [\mathbf{f}^{(1)T}, \mathbf{f}^{(2)T}, \dots, \mathbf{f}^{(s)T}]^T \quad (2.7)$$

系统具有 s 个部件, 任一部件 G 具有 N_g 个自由度, 系统总自由度 $N = N_1 + N_2 + \dots + N_s$.

由于复杂结构系统的自由度 N 过大, 所以对非线性方程 (2.2) 的求解是困难的, 采用下述模态综合法以降低系统自由度, 将使非线性方程易于求解.

三、模态分析及综合

模态综合是使复杂结构系统得以用缩减自由度的方程来代表的一种模拟方法, 也可以认为是瑞雷-李兹(Rayleigh-Ritz)法对复杂结构系统作动力分析的应用. 模态综合基于对各部件的模态分析, 这种分析可采用有限元法或其它任何合适的方法来进行. 模态分析是为了得到各部件的模态矩阵 $\Phi^{(g)}$, 该矩阵由李兹基矢量亦即部件各阶模态所组成, 对于给定的部件, 可由求解特征值问题和静力问题得到. Hurty 采用部件的固定界面主模态 $\Phi_n^{(g)}$ 以及刚体模态 $\Phi_r^{(g)}$ 和约束模态 $\Phi_c^{(g)}$. Craig^[6] 指出事实上勿需区别刚体模态和约束模态, 因为它们都是由界面上给定点的位移所决定的. Goldman^[7] 和 Hou^[8] 只用自由界面主模态 $\Phi_n^{(g)}$.

主模态经常分为低阶保留主模态 $\Phi_k^{(g)}$ 和高阶剩余模态 $\Phi_h^{(g)}$ 如下

$$\Phi_n^{(g)} = [\Phi_k^{(g)}, \Phi_h^{(g)}] \quad (3.1)$$

根据频率截取准则, 从低阶频率开始截去高阶剩余模态而只取全部主模态中的一部分, 即保留主模态 $\Phi_k^{(g)}$ 来进行分析.

经典的自由界面法由于没有考虑剩余模态的影响, 因而界面上的局部柔度难于反映, 致使结果的收敛性很差. 为了改善自由界面法的精度, 许多作者^{[10]-[16]} 采用其它模态, 例如附着模态 $\Phi_a^{(g)}$ 以替代剩余模态.

文献[20][21]的算例表明, 由于有连接件耦合的系统部件之间一般是一种弱耦合, 因此不计剩余模态的影响仍有足够的精度. 本文仍采用这种方法进行非线性振动分析.

求解自由界面主模态可由部件 G 的无阻尼自由振动方程

$$\mathbf{m}^{(g)} \ddot{\mathbf{x}}^{(g)} + \mathbf{k}^{(g)} \mathbf{x}^{(g)} = 0 \quad (3.2)$$

得到. 对应上式的广义特征值问题的方程

$$p_i^{(g)2} \mathbf{m}^{(g)} \Phi_i^{(g)} = \mathbf{k}^{(g)} \Phi_i^{(g)} \quad (3.3)$$

共有 N_g (部件 G 的自由度) 对特征值和特征矢适合上式, 第 i 特征对为 $(p_i^{(g)2}, \Phi_i^{(g)})$, 频率平方对角矩阵 $\Lambda_N^{(g)}$ 和主模态矩阵 $\Phi_N^{(g)}$ 分别如下:

$$\Lambda_N^{(g)} = \text{diag}[p_1^{(g)2}, p_2^{(g)2}, \dots, p_{n_g}^{(g)2}, \dots, p_{N_g}^{(g)2}] \quad (3.4)$$

$$\Phi_N^{(g)} = [\Phi_1^{(g)}, \Phi_2^{(g)}, \dots, \Phi_{n_g}^{(g)}, \dots, \Phi_{N_g}^{(g)}] \quad (3.5)$$

$\Phi_i^{(g)}$ 已经正则化, 满足正交条件

$$\Phi_N^{(g)T} \mathbf{m}^{(g)} \Phi_N^{(g)} = \mathbf{I}^{(g)} \quad (3.6)$$

$$\Phi_N^{(g)T} \mathbf{k}^{(g)} \Phi_N^{(g)} = \Lambda_N^{(g)} \quad (3.7)$$

通常我们只需 n_g 个保留模态, 故

$$\Lambda^{(g)} = \text{diag}[p_1^{(g)2}, p_2^{(g)2}, \dots, p_{n_g}^{(g)2}] \quad (3.8)$$

$$\Phi^{(g)} = [\Phi_1^{(g)}, \Phi_2^{(g)}, \dots, \Phi_{n_g}^{(g)}] \quad (3.9)$$

其中保留模态的数目 $n_g \ll N_g$ 。将物理坐标转换到保留的模态坐标 $q^{(g)}$ ，其近似关系为

$$x^{(g)} = \Phi_k^{(g)} q^{(g)} \quad (3.10)$$

其中略去了高阶模态，由上式把 $x^{(g)}$ 、 $\dot{x}^{(g)}$ 、 $\ddot{x}^{(g)}$ 代入方程(2.1)并前乘 $\Phi_k^{(g)T}$ 得

$$\ddot{q}^{(g)} + C^{(g)} \dot{q}^{(g)} + \Lambda_k^{(g)} q^{(g)} = \Phi_k^{(g)T} R^{(g)}(t) - \Phi_k^{(g)T} F^{(g)} \quad (3.11)$$

通常阻尼矩阵 $C^{(g)}$ 并非对角矩阵。

集合全部部件方程，可将系统方程缩减为

$$\ddot{q} + \tilde{C} \dot{q} + \Lambda q = \Phi^T R(t) - \Phi^T F(q, \dot{q}) \quad (3.12)$$

其中系统模态坐标矢量和模态矩阵为

$$q = [q^{(1)T}, q^{(2)T}, \dots, q^{(g)T}]^T \quad (3.13)$$

$$\Phi = \text{block-diag}[\Phi_k^{(1)}, \Phi_k^{(2)}, \dots, \Phi_k^{(g)}] \quad (3.14)$$

准对角阻尼矩阵和频率平方矩阵为

$$\tilde{C} = \text{block-diag}[C_k^{(1)}, C_k^{(2)}, \dots, C_k^{(g)}] \quad (3.15)$$

$$\Lambda = \text{diag}[\Lambda_k^{(1)}, \Lambda_k^{(2)}, \dots, \Lambda_k^{(g)}] \quad (3.16)$$

方程(3.12)右端非线性力 $F(q, \dot{q})$ 原来是位移 x 和 \dot{x} 的非线性函数，通过(3.10)即可转换成 q, \dot{q} 的非线性函数。在转换中只涉及到界面上的位移和速度。

事实上，采用系统的模态矩阵 Φ ，引入变换

$$x = \Phi q \quad (3.17)$$

代入运动方程(2.2)，即得对应于模态坐标 q 的缩减运动方程(3.12)，显然

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (3.18)$$

$$\Phi^T C \Phi = \tilde{C} \quad (3.19)$$

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (3.20)$$

各部件缩减后的自由度为 n_g ，缩减的系统运动方程自由度 $n = n_1 + n_2 + \dots + n_g$ 大大低于原系统的自由度 N ，即 $n \ll N$ 。从物理坐标 x 到模态坐标 q 的变换，这意味着一种坐标的减缩。

四、数值解

一般而言，非线性系统方程的精确解是难于得到的，但有时可以很有效地得到近似解，可以采用直接积分法或称逐步积分法，近来有很多著名的数值计算方法^[22]。

上节已得到减缩的系统运动方程

$$\ddot{q} + \tilde{C} \dot{q} + \Lambda q = \Phi^T R(t) - \Phi^T F(q, \dot{q}) \quad (4.1)$$

现在为了选择合适的积分格式，把方程写成下列形式。

1. 若能把非线性力矢量分成线性项 F_l 和带有摄动参数 ε 的非线性小项 F_{nl} ，即

$$F(q, \dot{q}) = F_l + \varepsilon F_{nl} \quad (4.2)$$

其中线性项为

$$F_l = \bar{K} q + \bar{C} \dot{q} \quad (4.3)$$

附加刚度矩阵和附加阻尼矩阵 \bar{K} 和 \bar{C} 可由参考文献[21]求出。方程(3.12)则成为

$$\ddot{q} + C \dot{q} + K q = \Phi^T R(t) - \varepsilon \Phi^T F_{nl}(q, \dot{q}) \quad (4.4)$$

其中

$$\mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} + \bar{\mathbf{K}} \quad (4.6)$$

组合的阻尼矩阵和刚度矩阵 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} 与时间 t 无关。

对于非线性项为零的特殊情况，以上结果化为线性系统的模态综合的情况^[21]。

就非线性性质而言，方程(4.4)易于写成 $t + \Delta t$ 瞬时的形式为

$$\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \Phi^T \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \varepsilon \Phi^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{t+\Delta t}, \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}) \quad (4.7)$$

其中角标 t 表示时间增量 Δt 开始瞬时，方程(4.7)右端依赖于 $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ ，可近似地取作已知载荷，采用迭代法求解这一方程，其 $(n+1)$ 迭代方程可写成如下形式：

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{n+1} \\ = \Phi^T \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \varepsilon \Phi^T \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}_{t+\Delta t}^n, \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}^n) \end{aligned} \quad (4.8)$$

其中 n 为迭代次数，当 $\mathbf{q}_{t+\Delta t}^{n+1} = \mathbf{q}_{t+\Delta t}^n$ 时，迭代停止。这一方程易于由 Newmark- β 法或 Wilson- θ 法逐步积分求解。上述方法的优点是对等刚度矩阵三角化只需一次，因为矩阵 \mathbf{K} 、 \mathbf{C} 都是常数矩阵；其缺点是每步要采用迭代以减少精度的损失。

2. 另一种形式是采用增量方程。方程(3.12)在邻近的时间站 t 和 $t + \Delta t$ 展开后可得增量方程

$$\Delta \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}} \Delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A} \Delta \mathbf{q} = \Phi^T \Delta \mathbf{R} - \Phi^T \Delta \mathbf{F} \quad (4.9)$$

其中各增量为

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t$$

$$\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} - \mathbf{R}_t$$

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_t$$

将 $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ 在 \mathbf{F}_t 邻域内展成台劳级数

$$\Delta \mathbf{F} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_t \Phi \Delta \mathbf{q} + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_t \Phi \Delta \dot{\mathbf{q}} + \dots$$

略去 $\Delta \mathbf{q}$ 、 $\Delta \dot{\mathbf{q}}$ 的高阶小量，代入方程(4.9)得

$$\Delta \ddot{\mathbf{q}} + [\tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}_t] \Delta \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{A} + \mathbf{K}_t) \Delta \mathbf{q} = \Phi^T \Delta \mathbf{R} \quad (4.10)$$

其中梯度矩阵

$$\mathbf{C}_t = \Phi^T \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right|_t \Phi \quad (4.11)$$

$$\mathbf{K}_t = \Phi^T \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_t \Phi \quad (4.12)$$

依赖于时间 t ，但在每一次新的时间增量之前可以求出。方程(4.10)是线性方程可以采用直接解法而无需迭代。但是，组合的刚度矩阵和阻尼矩阵在每次新的增量开始时要重新集成，这包含着矩阵的重新存贮和三角化，文献[23]提出了采用迭代法来改进。注意到(4.10)的广义质量矩阵是单位矩阵，因此无需三角分解的中心差分法是适宜的。

五、算 例*

图4表示一扭转振动系统，为具有扭转刚度为 k_t 的无重轴段和转动惯量为 I_t 的刚性圆

* 算例是由研究生谭明一完成的。

盘所组成, 且设

$$I_1 = I_2 = \dots = I_{35} = I$$

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{35} = k$$

图 5 表示轴(A)的恢复力矩 M 和相对扭转角 θ 的弹塑性近似关系. 当第 20 圆盘和末端圆盘受到如图 6 所示的一对反方向但相等的扭矩 $M(t)$ 作用时, 求系统的瞬态响应.

当轴段 A 的变形在线弹性范围内时, 系统的固有周期

$$T_j = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2j-1}{142}\pi\right)} \sqrt{\frac{I}{k}} \quad (j=1, 2, \dots, 35)$$

若常扭矩 M_0 作用于第 20 和末端圆盘时, 末端圆盘的最大静转角为

$$\theta_{sm} = 15 \frac{M_0}{k}$$

取图 5 和图 6 中值

$$M_p = 0.95 M_0, \quad T_M = 0.704 T_1$$

应用上述模态综合法, 把系统分割为两部分, 把轴段(A)取作连接件, 左半部和右半部分别取 n_1 和 n_2 个保留模态, 于是系统缩减为 $(n_1 + n_2)$ 个自由度.

采用 $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ 的 Newmark 积分法, 并取

$$\Delta t = T_1 / 28.4$$

$$\bar{\theta} = \theta_{35} / \theta_{sm}$$

计算第 35 圆盘的瞬态响应如表 1 和图 7 所示. 其中 $n_1 = 30$, $n_2 = 5$ 是未减缩系统的计算结果.

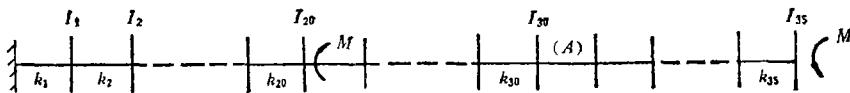


图 4

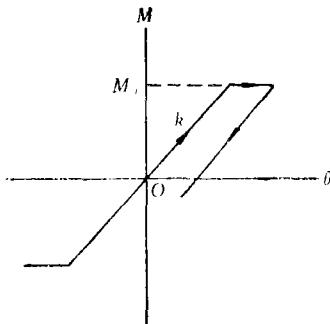


图 5

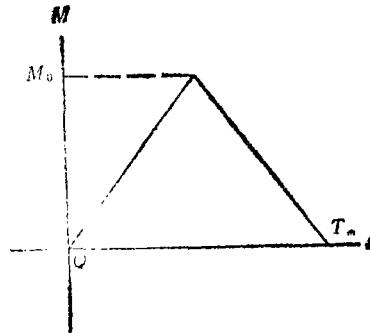


图 6

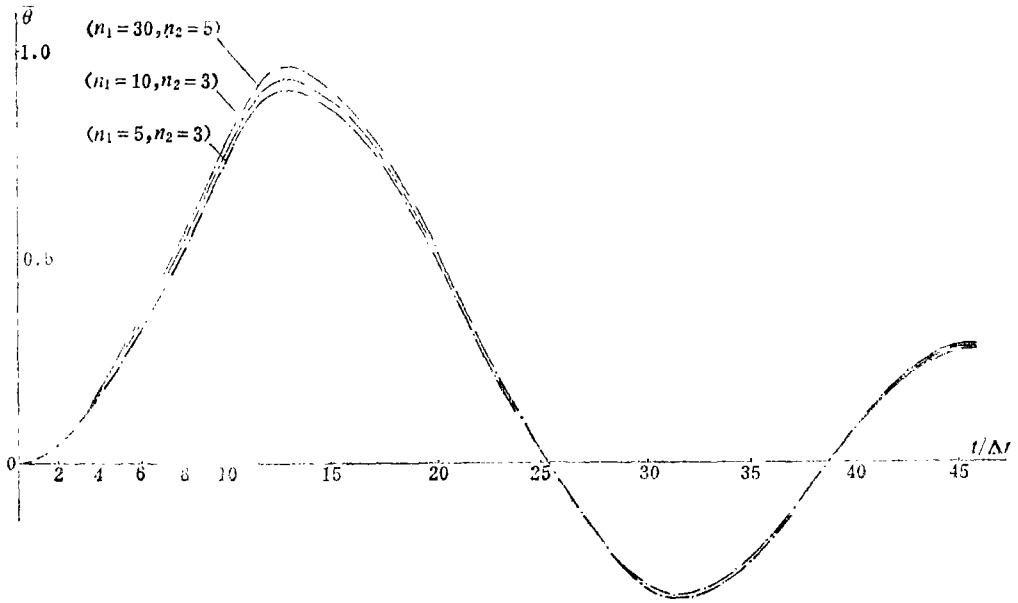


图 7

表 1

t	n_1			t	n_1		
	30	10	5		30	10	5
$4 \Delta t$	0.1743	0.1694	0.1653	$38 \Delta t$	-0.1705	-0.1686	-0.1641
$8 \Delta t$	0.5523	0.5366	0.5205	$40 \Delta t$	0.0922	0.0901	0.0878
$12 \Delta t$	0.9427	0.9177	0.8902	$44 \Delta t$	0.2704	0.2651	0.2576
$13 \Delta t$	0.9619	0.9353	0.9049	$48 \Delta t$	0.2840	0.2579	0.2492
$16 \Delta t$	0.8542	0.8347	0.8120	$52 \Delta t$	0.1098	0.1056	0.0998
$20 \Delta t$	0.5090	0.4982	0.4835	$56 \Delta t$	-0.0627	-0.0640	-0.0653
$24 \Delta t$	0.1033	0.0998	0.0952	$60 \Delta t$	-0.1365	-0.1360	-0.1343
$28 \Delta t$	-0.2096	-0.2088	-0.2067	$64 \Delta t$	-0.0811	-0.0807	-0.0793
$32 \Delta t$	-0.3241	-0.3205	-0.3142	$68 \Delta t$	0.0433	0.0418	0.0406

计算是在 DJS-130 机上进行的, 计算到 $100 \Delta t$ 所用机时 T 比较如表 2。

响应最大值的截断误差 E , 比较也见表 2。

表 2

n_1	30	10	5
n_2	5	3	3
T (min)	42	6	2.5
E (%)	0	3	6

通过计算表明, 本方法在非线性分析中, 具有物理概念清楚、数学简洁、计算结果足够精确、所需内存少机时节省等特点。

参 考 文 献

- [1] Hurty, W. C., Vibration of structural systems by component mode synthesis, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, 86, (Aug. 1960), 51—69.
- [2] Hurty, W. C., Dynamic analysis of structural systems using component modes *AIAA Journal*, 3(April 1965), 678—685.
- [3] Serbin, H., Vibration of composite structures, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 12, 1(1945).
- [4] Sofrin, T. C., The combination of dynamical systems, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 13, 6(1946).
- [5] Bishop, R. E. D., The analysis and synthesis of vibrating systems, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, 58(1954).
- [6] Craig, Jr., R. R. and M. C. C. Bampton, Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, 9(July 1971), 1313—1319.
- [7] Goldman, R. L., Vibration analysis by dynamic partitioning, *AIAA Journal*, 7(1969), 1152—1154.
- [8] Hou, S. N., Review of modal synthesis techniques and a new approach, *Shock and Vibration Bulletin*, No. 4, Pt. 40, (1969)25—30.
- [9] Hintz, R. M., Analytical methods in component modal synthesis, *AIAA Journal*, 13 (Aug 1975), 1007—1016.
- [10] MacNeal, R. H., A hybrid method of component mode synthesis, *Computers and Structures Journal*, 1(1971), 581—601.
- [11] Rubin, S., Improved component-mode representation for structural dynamic analysis, *AIAA Journal*, 13(Aug. 1975), 995—1006.
- [12] Craig R. R. and Ching-jone Chang, Free-interface method of substructure coupling for dynamic analysis, *AIAA J.*, 14, 11(Nov. 1976).
- [13] Craig, R. R. and Chang, On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis, Paper 77—405, AIAA/ASME 18th Structures, Structural Dynamic and Materials Conference, San Diego (1977).
- [14] 王文亮、杜作润, 用改进的模态组合法计算空间双层刚架的模态特性, *上海力学*, 1, 4(1980).
- [15] 朱德懋, 结构动力分析的模态组合法, *南航学报*, 1(1978).
- [16] 邢京堂、郑兆昌, 基于弹性动力学变分原理的模态组合法理论研究, 振动理论及应用学术会议, 昆明 (1981.12).
- [17] Craig, R. R., Methods of component mode synthesis, *Shock and Vibration Digest*, 9, 11(Nov. 1977).
- [18] Nelson, F. C., A review of substructure analysis of vibrating systems, *The Shock and Vibration Digest*, 11, 11(Nov. 1979).
- [19] Meirovitch, L. and A. L. Hale, On the substructure synthesis method, *AIAA. J.*, 19, 7(1981).
- [20] 郑兆昌、吴建基, 汽车结构动力分析的模态综合技术, *清华大学学报*, 21, 3(1981).
- [21] 郑兆昌, 复杂结构系统振动研究的模态综合技术, *振动与冲击*, 1, 1(1982).
- [22] Bathe, K. J. and E. L. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc.,
- [23] Argyris J. H. et al., Numerical solution transient nonlinear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18, Part II/Feb. (1979).

Dynamic Analysis of Nonlinear Systems by Modal Synthesis Techniques

Zheng Zhao-chang

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

Different kinds of modal synthesis methods have been used widely in dynamic analysis of linear structure systems, but, in general, they are not suitable for nonlinear systems

In this paper, a kind of modal synthesis techniques is extended to dynamic analysis of nonlinear systems. The procedure is based upon the method suggested in (3.14)(3.15), which is applicable to vibration analysis for complex structure systems with coupling attachments but with simplified forms of linear springs and dampers. In fact, these attachments have nonlinear elasticity and nonlinear damping, e. g., piecewise-linear springs, softening or hardening springs, Coulomb damping, elastoplastic hysteresis damping, etc.. So far as the components of structure are still linear systems, we can get a set of independent free-interface normal mode informations only keep the lower-order for each component. This can be done by computations or experiments or both. The global equations of nonlinear vibration are set up by assembling of the component equations of motion with nonlinear coupling forces of attachments. Then the problem is reduced to the less degrees of freedom for solving nonlinear equations. Thus considerable saving in computer storage and execution time can be expected. In the case of a very high-order system, if sufficient degrees of freedom are reduced, then the problem may be possible to be solved by the aid of the computer of common grade.

As the general nonlinear vibration of multiple degrees of freedom systems is quite involved, in general, the exact solutions of a nonlinear system equations are not easy to find, so the numerical method can be adopted for solving the reduced nonlinear equations to obtain the transient response of system for arbitrary excitations.