

血液锥形分离杯内血液流动 稳定性的边界摄动解*

朱月锐 张效慈

(上海交通大学工程力学系, 1981年7月1日收到)

摘 要

本文首次用边界摄动方法求解了二相同角速度转动的圆锥面间(窄间隙)均质流体的流动, 和锥面间流动稳定性, 证实了在小轴向 Re 数、窄间隙血液分离杯中血液流动的稳定性. 并进而采用一种新的数学技巧证实了二相同角速度转动的圆柱面间(窄间隙)流动流体动力稳定性.

理论分析得到上海医疗器械研究所实验的证实.

一、血液分离杯内的流体运动

1. 引言

近十年发展起来的血液细胞分离技术, 是现代血液成份采集和临床治疗的新技术. 血液分离杯是分离技术的关键部件, 它利用离心分离原理, 使血液中密度不等的几种成份分离开来, 达到成份采血和临床治疗的目的.

血液分离杯的结构、血流方向、分离过程如图1所示. 它分内外两杯, 用一个旋转密封环隔开, 这个密封环是设计在收集口上面的. 来自供血者的血液经中央管道流入分离杯内. 当从供血者体内抽出血液时, 抗凝剂与这些血液以规定的比例不断地混和. 血液经中央管道流到杯子底部, 然后通向周围的孔口进入由内外杯形成的分离空间内. 用特殊的夹具将血液分离杯装在离心机上, 使它高速旋转, 进入分离空间内的血液按密度大小进行分层. 分出的血液成份依次由溢口处流入静止的收集管道, 从顶部离开血液分离杯.

当前, 国外已广泛将血液分离杯用于临床, 有些国家成份采集占采血总量的60%, 成份输血和临床治疗比例也高达50%~80%. 我国是于1978年开始这项工作的技术研究的. 上海医疗器械所承担了这项任务. 我国的试制要考虑利用进口的离心机(保持外杯半径不变),

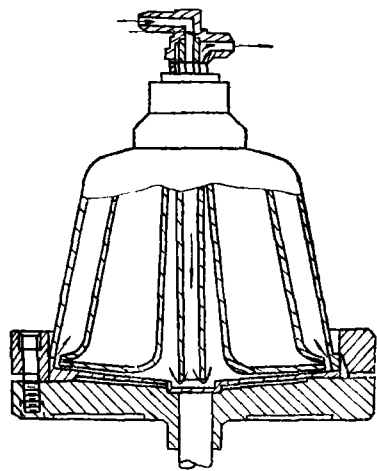


图1 血液分离杯的结构、血流方向

* 钱伟长推荐.

又要缩小每次循环的血处理量(杯子容量从美制375或225ml缩小到150ml),并使血液分离杯能多次拆卸清洗.这就不得不重新设计和试制血液分离杯.在试制过程中碰到了已分离出的成份重新相混的现象.分析这种现象并加以解决,这就是我们的研究任务.

血液分离杯有两种类型,同轴圆柱型和同轴圆锥型.血液分离杯内的流场可以看成是叠加轴向流的二相同角速度转动圆柱(锥)面间的流场.叠加轴向流的转动圆柱(锥)面间流场分析和稳定性问题,是目前未能完善解决的复杂问题.从1923年 G. I. Taylor 开始,一直到现在,许多人进行过理论和实验方面的研究.其中,本世纪六十年代 R. C. Diprima, S. Chandrasekhar 等人对叠加轴向流的转动圆柱面间粘性不可压缩流的稳定性问题,针对窄圆柱间隙、小轴向 Re 数的情况,采用 Galerkin 法及小参数摄动法得出过临界 Taylor 数的半分析式子 $T_o = 1708 + 26.5 Re^2$ [1]. 至于圆锥面间的流场分析,由于涉及的二阶非线性偏微分方程组难于数学精确求解,而在规定的定解条件下近似求解也异常困难,目前国外还停留于数值摸索求解阶段.

2. 叠加轴向流的二相同角速度转动圆柱面的流体运动

我们将采用圆柱坐标系.

圆柱坐标系下的 Navier-Stokes 方程和连续性方程是 [2]

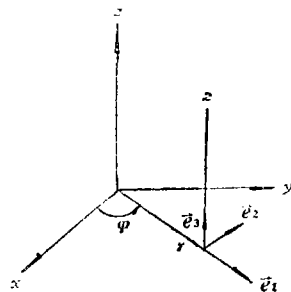


图2 圆柱坐标系

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r V_\varphi}{r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} = F_\varphi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

式中 V_r , V_φ , V_z 分别表示三个速度分量; P 表示压力; F_r , F_φ , F_z 分别表示外力的三个分量; ν 系运动粘度, ρ 系流体的密度.

考虑到 a) 圆柱足够长(忽略边端效应); b) 流体不可压; c) 流动定常; d) 离心力大于重力等条件, Navier-Stokes 方程简化成

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{V_{\varphi}^2(r)}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V_{\varphi}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_{\varphi}}{dr} - \frac{V_{\varphi}}{r^2} = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 V_z(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_z}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

式中 μ 系动力粘度.

根据边界条件

$$\begin{cases} V_{\varphi}(r_1) = r_1 \Omega, & V_{\varphi}(r_2) = r_2 \Omega \\ V_z(r_1) = V_z(r_2) = 0 \end{cases}$$

式中 r_1 系内杯半径、 r_2 系外杯半径, 以及 Ω 是转速, 遂求得流体速度分布和压强分布为

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_{\varphi} = r\Omega \\ V_z = A(r) = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - r_1^2) \\ P = h(r) + cz = \frac{\rho r^2 \Omega^2}{2} + cz + \beta \end{cases}$$

式中 β 是任意常数.

考虑到血液分离杯的具体数据 (即外杯半径5.5cm, 间隙0.5cm), 我们可以认为圆柱面间隙远小于圆柱面半径 (窄圆柱面间隙 $d \ll \frac{r_1 + r_2}{2}$), 从而可得

$$V_z = 6V_m \zeta (1 - \zeta)$$

式中 $\zeta = \frac{r - r_1}{d}$, $V_m = -\frac{d^2}{24\mu} \frac{\partial P}{\partial z}$. V_m 实际上是圆柱面间隙内轴向速度 $V_z = A(r)$ 的平均值.

并求得流线为圆柱螺旋族

$$\begin{cases} r = \text{const} \\ z = e\varphi + f \end{cases}$$

式中 $e = \frac{1}{\Omega} \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P}{\partial z} (r^2 - r_1^2) \right\}$, f 是常数.

我们完全精确地解决了同轴圆柱间均质流体的流场分析, 得出了所有流体质点均以相同角速度绕转轴旋转, 轴向速度仅是 r 的函数, 以及流线为圆柱螺旋族的结论.

3. 叠加轴向流的二相同角速度转动圆锥面间的流体运动

我们考虑定常流动.

Navier-Stokes方程和连续性方程是

$$\left\{ \begin{aligned} V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_\varphi^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) & (1.4) \\ V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r V_\varphi}{r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right) & (1.5) \\ V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) & (1.6) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0 & (1.7) \end{aligned} \right.$$

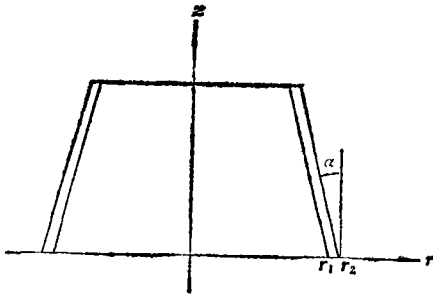


图3 窄间隙同轴圆锥

相应的边界条件是

$$\left\{ \begin{aligned} V_r \Big|_{r=r_1-\varepsilon z} = V_r \Big|_{r=r_2-\varepsilon z} &= 0 \\ V_\varphi \Big|_{r=r_1-\varepsilon z} = r\Omega \Big|_{r=r_2-\varepsilon z} & \end{aligned} \right.$$

式中 Ω 是角速度, $\varepsilon = \text{tg}\alpha$, α 是半圆锥角。

我们知道, 粘性流体运动方程组是由四个方程组成的二阶非线性偏微分方程组, 而数学上要在一定的定解条件下解决一个非线性方程组却是非常困难的。目前只在极少数情况下才可以找到它们的精确解。我们同样无法求出方程(1.4)~(1.7)的精确解。但是对于半圆锥角 α 很小的同轴圆锥, 我们可以采用边界摄动的方法, 将圆锥体边界看作为同轴圆柱体的摄动边界, 采用近似方法来解决这个问题^[3]。

$$\text{设} \left\{ \begin{aligned} V_r(r, z, \varepsilon) &= 0 + \varepsilon V_{1r}(r, z) + o(\varepsilon^2) \\ V_z(r, z, \varepsilon) &= V_{0z}(r) + \varepsilon V_{1z}(r, z) + o(\varepsilon^2) \\ V_\varphi(r, z, \varepsilon) &= r\Omega + \varepsilon V_{1\varphi}(r, z) + o(\varepsilon^2) \\ P(r, z, \varepsilon) &= P_0 + \varepsilon P_1(r, z) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \right.$$

式中 $V_r=0$, $V_z=V_{0z}(r)=A(r)$, $V_\varphi=r\Omega$, $P=P_0=h(r)+cz$ 是 $\varepsilon=0$ (即同轴圆柱面情况) 的解。而 V_{1r} , V_{1z} , $V_{1\varphi}$, P_1 分别表示同轴圆锥面对同轴圆柱面边界摄动所引起的一级摄动速度与压力。

代入(1.4)~(1.7), 得到

$$\left\{ \begin{aligned} -2\Omega V_{1\varphi} + V_{0z} \frac{\partial V_{1r}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 V_{1r}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} - \frac{\nu V_{1r}}{r} + \nu \frac{\partial^2 V_{1r}}{\partial z^2} & (1.8) \\ 2\Omega V_{1r} + V_{0z} \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 V_{1\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{\nu V_{1\varphi}}{r^2} + \nu \frac{\partial^2 V_{1\varphi}}{\partial z^2} & (1.9) \\ V_{1r} \frac{\partial V_{0z}}{\partial r} + V_{0z} \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 V_{1z}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V_{1z}}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 V_{1z}}{\partial z^2} & (1.10) \\ \frac{\partial V_{1r}}{\partial r} + \frac{V_{1r}}{r} + \frac{\partial V_{1z}}{\partial z} &= 0 & (1.11) \end{aligned} \right.$$

而扰动方程(1.8)~(1.11)相应的边界条件是

$$\begin{cases} V_{1r}(r_1, z) = V_{1r}(r_2, z) = 0 \\ V_{1\varphi}(r_1, z) = V_{1\varphi}(r_2, z) = 0 \\ V_{1z}(r_1, z) = z \frac{dV_{0z}}{dr} \Big|_{r=r_1}, \quad V_{1z}(r_2, z) = z \frac{dV_{0z}}{dr} \Big|_{r=r_2} \end{cases}$$

下面我们来求解。

利用图 4 所示的关系式 $V_r = -\varepsilon V_z$ ，求得

$$V_{1r} = V_{1r}(r) = -V_{0z} = -A(r) = -\left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} (r^2 - r_1^2) \right]$$

$$V_{1z} = B(r)z = \left\{ \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{1}{r} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{4\mu r} \frac{\partial P_0}{\partial z} (r^2 - r_1^2) - \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{1}{r} + \frac{r}{2\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} \right\} z$$

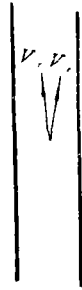


图 4 V_r 与 V_z 的关系

对窄间隙同轴圆锥（小轴向 Re 数 $Re = \frac{Vd}{\nu}$ ），我们来比较式 (1.9) 各项的量级，得到

$$\nu \frac{\partial^2 V_{1\varphi}}{\partial z^2} \ll \nu \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial r^2}, \quad V_{0z} \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial z} \ll \nu \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial r^2}$$

所以式 (1.9) 简化为，

$$2\Omega V_{1r} = \nu \frac{\partial^2 V_{1\varphi}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V_{1\varphi}}{\partial r} - \frac{\nu V_{1\varphi}}{r^2}$$

这一方程在边界条件 $V_{1\varphi}(r_1, z) = V_{1\varphi}(r_2, z) = 0$ 下的解是

$$V_{1\varphi} = C(r) = C_2 r + \frac{C_1}{r}$$

$$\text{式中 } C_1 = \frac{r_1 r_2}{r_2^2 - r_1^2} \left\{ -\frac{2}{15} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_1^4 r_2 + \frac{2}{9} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_1^2 r_2 + \frac{\Omega}{6\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} (r_2^2 - r_1^2) r_1^2 r_1 \right. \\ \left. + \frac{\Omega}{6\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_1^4 r_2^2 - \frac{1}{30} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_2^4 r_1 - \frac{2}{9} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_2^2 r_1 \right\}$$

$$C_2 = \frac{r_1 r_2}{r_2^2 - r_1^2} \left\{ \frac{2}{15} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{r_1^4}{r_2} - \frac{2}{9} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{r_1^2}{r_2} - \frac{\Omega}{6\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} (r_2^2 - r_1^2) \frac{r_2^2}{r_1} \right. \\ \left. - \frac{\Omega}{6\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} r_1 r_2^2 + \frac{1}{30} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{r_2^4}{r_1} + \frac{2}{9} \frac{\Omega}{\nu \mu} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \frac{r_2^2}{r_1} \right\}$$

即一级摄动 $V_{1\varphi}$ 在垂直于转轴的各平面上是一样的。

$$\text{若记 } A(r) = V_{0z} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4\mu \ln r_2/r_1} \frac{\partial P_0}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} (r^2 - r_1^2)$$

$$B(r) = \frac{dV_{0z}}{dr} + \frac{V_{0z}}{r} = \frac{dA(r)}{dr} + \frac{A(r)}{r}$$

$$C(r) = V_{1\varphi}(r)$$

则

$$\begin{cases} V_r = -\varepsilon A(r) \\ V_\varphi = r\Omega + \varepsilon C(r) \\ V_z = A(r) + \varepsilon B(r)z \end{cases}$$

我们于是用边界摄动法求出了二相同角速度转动的同轴圆锥面间的流体流动近似分析解。因为在流动稳定性的证明中，并不必需求出基本流动的压力值，所以这里我们不专门去求一级摄动压力 P_1 了。

二、血液分离杯内血液流动的稳定性

如果不存在轴向流，很明显离心分离出来的分层流体是稳定的。但是，如果叠加上轴向流，情况可能不同。L. N. Howard在1962年指出，无轴向流时稳定的密度分层对任何可能存在的轴向流具有稳定性影响^[4]。当然，这种稳定性影响未必大到足以使叠加上轴向流时的流动也是稳定的。不过，在我们的情况中，如果证明了叠加上轴向流时均质流体在二相同角速度旋转的同轴圆柱面间流动的稳定性，再加上无轴向流时稳定的密度分层的影响，自然也就证实了带轴向流的二相同角速度旋转同轴圆柱间离心分层流体流动的稳定性。

4. 二相同角速度转动的圆柱面间血液流动的稳定性

设扰动速度和扰动压力分别是 u_r 、 u_φ 、 u_z 及 P' ，则扰动后的速度和压力是

$$\begin{cases} V_r = 0 + u_r \\ V_\varphi = r\Omega + u_\varphi \\ V_z = A(r) + u_z \\ P = h(r) + cz + P' \end{cases}$$

扰动方程是

$$\begin{cases} \frac{\partial u_r}{\partial t} + A \frac{\partial u_r}{\partial z} - 2\Omega u_\varphi = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + A \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + 2\Omega u_r = \nu \left(\nabla^2 u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + A \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_r \frac{dA}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\text{式中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

扰动方程是线性的，方程中的系数仅是坐标的函数，而不是时间的函数。方程的一般解可用特解的和式来表示。在这些特解中扰动速度，扰动压力将通过因子 e^{iqt} 而依赖于时间。扰动“频率” q 不是任意的，而是根据符合于相应条件的方程解式来确定的。假若有虚部为负的一些 q 存在，则与它们对应的 e^{iqt} 将随时间无限增大。换句话说，这种扰动一经发生就会不断地增强，也即是对于这种扰动流动将是不稳定的，因而要使流动具有稳定性，就必需任何可能的“频率” q 的虚部为正。这时，所发生的扰动便随时间按指数律而衰减^[6]。

我们将只考虑轴对称扰动，并设

$$[u_r, u_\varphi, u_z, P]^T = [u(r), v(r), w(r), P(r)]^T e^{i(qt + kz)}$$

引入算符 $D = \frac{d}{dr}$, $D_* = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r}$, 则

$$\nabla^2 = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} - K^2 = D_* D - K^2 = D D_* + \frac{1}{r^2} - K^2$$

扰动方程改写为

$$\begin{cases} v(DD_* - K^2 - i\frac{q}{\nu} - i\frac{K}{\nu}A)u + 2\Omega v = D\frac{P}{\rho} \\ v(DD_* - K^2 - i\frac{q}{\nu} - i\frac{K}{\nu}A)v = 2\Omega u \\ v(DD_* - K^2 - i\frac{q}{\nu} - i\frac{K}{\nu}A)w - uDA = iK\frac{P}{\rho} \\ D_*u = -iKw \end{cases}$$

扰动边界条件是

$$u = v = w = Du = 0, \text{ 于 } r = r_1, r_2 \text{ 处.}$$

对 $d \ll \frac{r_1 + r_2}{2}$ 的窄间隙问题, 1960年 R. C. Diprima 用 Galerkin 法对同向旋转的两圆筒进行数值计算, 发现当轴向 Re 数介于 0 与 5 之间时可用角速度的平均值代替角速度. 轴向速度的平均值代替轴向速度^[6]. 这样的观点, 以后为 S. Chandrasekhar, E. R. Krueger 等人所证实^[1, 7].

我们目前的问题也属于窄间隙小轴向 Re 数问题 (比如, 当血液流量 40 ml/m 时, 轴向 Re 数仅 0.53), 所以也能采用平均化的假定.

$$\frac{Ad}{\nu} = \frac{6V_m d}{\nu} \xi(1-\xi) = 6R\xi(1-\xi)$$

式中 $R = \frac{V_m d}{\nu}$

对于窄间隙问题, $D \approx D_*$, 利用恒等式

$$i\frac{Kd^2}{\nu} ru \left[D \left(\frac{d}{r} \right) \right] = -12iKua \quad (a = Kd)$$

$$\begin{aligned} \text{及 } D \left(D_* D - K^2 - i\frac{q}{\nu} - i\frac{K}{\nu}A \right) D_* u + \frac{iK}{\nu} D(uDA) \\ = \left(DD_* - K^2 - i\frac{q}{\nu} - i\frac{K}{\nu}A \right) (DD_* u) + \frac{iK}{\nu} ru \left[DD_* \left(\frac{A}{r} \right) \right] \end{aligned}$$

并将 ξ 的起点移到两圆筒间隙的中点, 用 $\frac{2\Omega d^2}{\nu} a^2 v$ 代 v , 遂得到简化后的扰动方程组及扰动边界条件

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - i\sigma - iaR \right) \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 \right) u - 12iR\sigma u = v & (2.1) \\ & \left(\frac{d^2}{d\xi^2} - a^2 - i\sigma - iaR \right) v = -T a^2 u & (2.2) \\ & u = v = \frac{du}{d\xi} = \tilde{u} = \tilde{v} = \frac{d\tilde{u}}{d\xi} = 0, \text{ 于 } \xi = \pm \frac{1}{2} \text{ 处} & (2.3) \end{aligned} \right.$$

式中 $\sigma = \frac{q d^2}{v}$, $T = -\frac{4\Omega^2 d^4}{v^2} < 0$ 以及“ \sim ”表示取共轭值。

我们将从这组方程着手, 证明稳定性。

$$\text{展开式 (2.2)} \quad \frac{d^2}{d\xi^2} v - a^2 v - i\sigma v - iaR v = -T a^2 u \quad (2.4)$$

$$\text{式 (2.4)} \times v \quad v \frac{d^2 \tilde{v}}{d\xi^2} - a^2 v \tilde{v} + i\tilde{\sigma} v \tilde{v} + iaR v \tilde{v} = -T a^2 \tilde{u} v \quad (2.5)$$

对式 (2.5) 从 $-\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}$ 对 ξ 进行积分, 注意到

$$\int_{-1/2}^{1/2} v \frac{d^2 \tilde{v}}{d\xi^2} d\xi = v \frac{d\tilde{v}}{d\xi} \Big|_{-1/2}^{1/2} - \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\tilde{v}}{d\xi} \frac{dv}{d\xi} d\xi = - \int_{-1/2}^{1/2} |v'|^2 d\xi$$

所以

$$- \int_{-1/2}^{1/2} |v'|^2 d\xi - (a^2 - i\tilde{\sigma} - iaR) \int_{-1/2}^{1/2} |v|^2 d\xi = -T a^2 \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u} v d\xi \quad (2.6)$$

展开式 (2.1)

$$\left(\frac{d^4}{d\xi^4} - 2a^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - i\sigma \frac{d^2}{d\xi^2} - iaR \frac{d^2}{d\xi^2} + a^4 + i\sigma a^2 + ia^3 R \right) u - 12iR\sigma u = v \quad (2.7)$$

式 (2.7) $\times \tilde{u}$, 并从 $-\frac{1}{2}$ 到 $\frac{1}{2}$ 对 ξ 进行积分, 注意到

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u} \frac{d^4 u}{d\xi^4} d\xi &= -u'' \tilde{u}' \Big|_{-1/2}^{1/2} + \int_{-1/2}^{1/2} u'' \tilde{u}'' d\xi = \int_{-1/2}^{1/2} |u''|^2 d\xi \\ (-2a^2 - i\sigma - iaR) \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u} \frac{d^2 u}{d\xi^2} d\xi &= (2a^2 + i\sigma + iaR) \int_{-1/2}^{1/2} |u'|^2 d\xi \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \{ |u''|^2 + (2a^2 + i\sigma + iaR) |u'|^2 + (a^4 + i\sigma a^2 + ia^3 R - 12iRa) |u|^2 \} d\xi \\ = \int_{-1/2}^{1/2} \tilde{u} v d\xi \end{aligned} \quad (2.8)$$

将式 (2.6) 代入式 (2.8), 得到

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \{ |u''|^2 + (2a^2 + iaR) |u'|^2 + (a^4 + i\sigma a^3 R - 12iRa) |u|^2 \} d\xi \\ + i(\sigma_r + i\sigma_i) \int_{-1/2}^{1/2} \{ |u'|^2 + a^2 |u|^2 \} d\xi = -\frac{1}{T a^2} \left\{ - \int_{-1/2}^{1/2} [|v'|^2 \right. \\ \left. + (a^2 - iaR) |v|^2] d\xi + i(\sigma_r - i\sigma_i) \int_{-1/2}^{1/2} |v|^2 d\xi \right\} \end{aligned}$$

式中 σ_r , σ_i 分别是 σ 的实部和虚部.

将上式的实部分出, 得到

$$\int_{-1/2}^{1/2} \{ |u''|^2 + 2a^2 |u'|^2 + a^4 |u|^2 \} d\xi - \frac{1}{T a^2} \int_{-1/2}^{1/2} [|v'|^2 + a^2 |v|^2] d\xi \\ - \sigma_i \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} [|u'|^2 + a^2 |u|^2] d\xi - \frac{1}{T a^2} \int_{-1/2}^{1/2} |v|^2 d\xi \right\} = 0$$

由于 $T < 0$, 所以 $-\frac{1}{T a^2} > 0$. 欲使上式成立, 必需 $\sigma_i > 0$. 而 $\sigma = \frac{q d^2}{\nu}$, 所以 q 的虚部 q_i

> 0 , 从而扰动随时间按指数律衰减.

我们于是完全用数学分析的方法证明了圆柱型血液分离杯中血液流动的稳定性. 这是与实际观察到的现象一致的.

5. 二相同角速度转动的圆锥面间的流动稳定性

我们采用同样的符号、类似的方法及仍然采用速度平均化的假定, 得到的扰动方程组是

$$D^4 u - 2K^2 D^2 u + \frac{q_i A}{\nu} D^2 u + \frac{\varepsilon A}{\nu} D^3 u + \frac{\varepsilon}{\nu} D A D^2 u - \frac{\varepsilon}{\nu} D B D u - \frac{\varepsilon B}{\nu} D^2 u \\ + K^4 u - \frac{q_i K^2}{\nu} u - K^2 \frac{\varepsilon A}{\nu} D u - K^2 \frac{\varepsilon \frac{dA}{dr}}{\nu} u - \frac{i q_r}{\nu} D^2 u - \frac{i K}{\nu} (A + \varepsilon B z) D^2 u \\ + \frac{i K}{\nu} u D^2 (A + \varepsilon B z) + \frac{i q_r K^2}{\nu} u + i \frac{K^3 (A + \varepsilon B z)}{\nu} u = \frac{2K^2}{\nu r} (r \Omega + \varepsilon C) v \quad (2.9)$$

式中 $q = q_r + i q_i$; 以及

$$D^2 v - K^2 v + \frac{q_i v}{\nu} - \frac{i q_r}{\nu} v + \frac{\varepsilon A}{\nu} D v - \frac{(A + \varepsilon B z)}{\nu} i K v + \frac{\varepsilon A v}{\nu r} \\ = - \frac{2 \Omega + \varepsilon C / r + \varepsilon \frac{dC}{dr}}{\nu} u \quad (2.10)$$

我们将在任一 $z = \text{常数}$ 的截面上来取平均. 如果对任一截面都能说明 $q_i > 0$, 自然证明了流动是稳定的.

$$\text{用 } \bar{A}(z) = \frac{1}{d} \int_{r_1 - \varepsilon z}^{r_2 - \varepsilon z} A(r) dr \text{ 代替 } A(r),$$

$$\bar{B}(z) = \frac{1}{d} \int_{r_1 - \varepsilon z}^{r_2 - \varepsilon z} B(r) dr \text{ 代替 } B(r),$$

$$\bar{C}(z) = z \Omega \text{ 代替 } C(r), \text{ 其中 } \bar{C}(z) = \frac{1}{d} \int_{r_1 - \varepsilon z}^{r_2 - \varepsilon z} C(r) dr,$$

从上面两个扰动方程出发, 利用扰动边界条件 $u = v = w = Du = 0$ 于 $r = r_1 - \varepsilon z, r_2 - \varepsilon z$ 处,

$$\text{得到了 } \int_{r_1 - \varepsilon z}^{r_2 - \varepsilon z} \left\{ -|v'|^2 - K^2 |v|^2 + \frac{q_i}{\nu} |v|^2 + \frac{\varepsilon \bar{A}}{\nu} \frac{|v|^2}{r} \right\} dr + i \Phi = \frac{1}{\nu} \left[\frac{r_1 + r_2}{2} \Omega \right]$$

$$+\varepsilon(\bar{C}-z\Omega) \cdot \int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \frac{\bar{u}v}{r} dr \quad (2.11)$$

$$\int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \left\{ |u''|^2 + 2K^2|u'|^2 - \frac{q_i}{\nu}|u'|^2 + \frac{\varepsilon\bar{B}}{\nu}|u'|^2 + K^4|u|^2 - \frac{q_i K^2}{\nu}|u|^2 \right\} dr \\ + iF = \frac{2K^2}{\nu} \int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \frac{\bar{u}v}{r} dr \cdot \left[\frac{r_1+r_2}{2}\Omega + \varepsilon(\bar{C}-z\Omega) \right] \quad (2.12)$$

式中 Φ 、 F 为所有虚数的总和。

将式(2.11)代入式(2.12)，并取实部，得到

$$\int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \left\{ |u''|^2 + 2K^2|u'|^2 + \frac{\varepsilon\bar{B}}{\nu}|u'|^2 + K^4|u|^2 \right\} dr + 2K^2 \int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \left[|v'|^2 \right. \\ \left. + K^2|v|^2 - \frac{\varepsilon\bar{A}}{\nu} \frac{|v|^2}{r} \right] dr - \frac{q_i}{\nu} \int_{r_1-\varepsilon z}^{r_2-\varepsilon z} \left\{ |u'|^2 + K^2|u|^2 + 2K^2|v|^2 \right\} dr = 0$$

我们能证明 $\bar{B} > 0$ 。由于

$$A(r_2-\varepsilon z) = \frac{r_2^2-r_1^2}{4\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\partial P_0}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r_2-\varepsilon z} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} [(r_2-\varepsilon z)^2-r_1^2]$$

$$A(r_1-\varepsilon z) = \frac{r_2^2-r_1^2}{4\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\partial P_0}{\partial z} \ln \frac{r_1}{r_1-\varepsilon z} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} [(r_1-\varepsilon z)^2-r_1^2]$$

$$A(r_2-\varepsilon z) - A(r_1-\varepsilon z) = \frac{d(r_1+r_2)}{4\mu \ln \frac{r_2}{r_1}} \frac{\partial P_0}{\partial z} \ln \frac{r_1-\varepsilon z}{r_2-\varepsilon z} + \frac{1}{4\mu} \frac{\partial P_0}{\partial z} [(r_1+r_2)-2\varepsilon z]d$$

$$\text{而 } \frac{\partial P_0}{\partial z} < 0, \text{ 所以为了证明 } \bar{B}(z) = \frac{1}{d} [A(r_2-\varepsilon z) - A(r_1-\varepsilon z)] > 0$$

$$\text{只需证明 } \frac{-(r_1+r_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r_2-\varepsilon z}{r_1-\varepsilon z} + [(r_1+r_2)-2\varepsilon z] < 0$$

这是显而易见的。因为 $\frac{r_2-\varepsilon z}{r_1-\varepsilon z} > \frac{r_2}{r_1}$ ，所以 $\ln \frac{r_2-\varepsilon z}{r_1-\varepsilon z} > \ln \frac{r_2}{r_1}$ ，则 $(r_1+r_2) \ln \frac{r_2-\varepsilon z}{r_1-\varepsilon z} > [(r_1+r_2)-2\varepsilon z] \ln \frac{r_2}{r_1}$ 。

另外，虽然 $\bar{A} > 0$ ，但是 $|v'|^2 \sim \frac{v^2}{d^2}$ ， $\frac{\varepsilon\bar{A}}{\nu} \frac{|v|^2}{r} \sim \frac{\varepsilon\bar{A}}{\nu} \frac{v^2}{r}$ ，而 $\frac{d}{r} \ll 1$ ， $\varepsilon \ll 1$ ， $Re = \frac{Ad}{\nu}$

很小，所以 $\frac{v^2}{d^2} \gg \frac{\varepsilon\bar{A}}{\nu r} v^2$ ，即 $|v'|^2 > \frac{\varepsilon\bar{A}}{\nu} \frac{|v|^2}{r}$ 。

于是，因为 $r_2-\varepsilon z > r_1-\varepsilon z > 0$ ，所以为使等式成立，必需 $q_i > 0$ 。

这样，我们证实了同轴圆柱型和同轴圆锥型血液分离杯内的血液流动稳定性。这是与实践观察到的杯中已分层的血液成份并没有在进溢口前在杯内重新相混的现象一致的。

本文呈蒙上海交通大学工程力学系江可宗教授、复旦大学数学系叶敬棠教授、上海医疗器械研究所靳宝华总工程师的审阅,并提出许多宝贵意见,作者致以衷心感谢,对上海医疗器械所的周娴、韩中厚二位工程师的热情帮助也深表谢意!

参 考 文 献

- [1] Krueger, E. R. et al., *J. Fluid Mech.*, 19(1964) 528—538.
- [2] Л. Д.朗道等,《连续介质力学》第一册,人民教育出版社,(1958).
- [3] Dyke, M. V., *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, (1964).
- [4] Howard, L. N., et al., *J. Fluid Mech.*, 14 (1962) 462—476.
- [5] Lin, C. C., et al., *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, (1974).
- [6] Dijkstra, R. C., *J. Fluid Mech*, 9(1960) 621—631.
- [7] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, (1960).

A Boundary Perturbation Solution for the Hydrodynamic Stability of Blood Flow in a Cone-Type Blood Processor

Zhu Yueh-ru: Zhang Xiao-ci

(Department of Engineering Mechanics,

Shanghai Jiao-Tong University, Shanghai)

Abstract

This paper is the first attempt to solve the flow-field of homogeneous fluid between concentric cones (narrow gap) with equal angular velocities of rotation by using a boundary perturbation method, and the hydrodynamic stability of blood flow in the cone-type blood processor is verified, under conditions of the narrow gap between the cones and small axial Re numbers. This paper also verifies the hydrodynamic stability between concentric cylinders (narrow gap) with equal angular velocities of rotation by using a new mathematical technics.

These theoretical analyses are in agreement with the experimental observations, which have been made by Shanghai Medical Instruments Institute.