应用数学和力学，第4卷第4期（1983年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

屈服条件由应力张量的二次齐次函数与一次齐次函数之和来表达的极限分析定理

赵家谊　　薛大为

（北京工业学院，1982年8月4日收到）

摘　要

本文建立了由应力张量σ_{ij}的二次齐次函数与一次齐次函数的和来表达其屈服条件的刚理想塑性体的极限分析变分原理，它可用于岩土力学的极限分析问题，并把屈服条件为应力张量σ_{ij}的二次齐次函数或一次齐次函数来表达的情况作为其特例.

一、前　言

自从著名的上下限定理奠定以来，固体力学中的极限分析问题得到相当的重视和发展.1951年，Drucker从稳定材料的概念出发，讨论了塑性势函数，证明了塑性应变率与屈服曲面的正交性，提出了相关联的流动法则，为极限分析理论带来很大的方便.极限分析的上下限定理虽然为结构的极限分析奠定了某种理论基础，但由于据此求出的上限值和下限值往往相距甚大，难以估计近似解的精度，而且经常由于不易妥善选取应力场而找不到较合适的下限解，因此，有必要对此进一步研究使之趋于完善.

极限分析可以根据广义变分原理来进行.早在五十年代，广义变分原理在固体力学中就得到了相当的发展.在我国，胡海昌[1]继Reissner[2]之后得到了广泛形式的弹性力学的广义变分原理，并建立了全塑性体的广义变分原理；解伯民[3]推广了文献[1]的成果，建立了弹塑性混合体的广义变分原理.钱伟长[4]则在1964年作出了巨大的贡献，他系统地论证并创立了许多广义变分原理，首先提出了建立广义变分原理的方法，同时指出了两类广义变分原理的等价性.实践表明，变分原理在求解反映结构的某种整体性能的问题上（例如刚度、临界荷载、固有频率等）是非常有力的工具.1963年，钱令希等[5]提出了一个极限分析的广义变分原理，但这一变分原理在论证上存在着错误和疏忽.国外，Mura-Lee[6]也作过这方面的工作.王仁等[7]曾对文献[5]进行过广泛的讨论；薛大为[8][9]曾指出了文献[5]及[6]在论证上的错误和疏忽，建立了正确的刚理想塑性体极限分析的广义变分原理，并建立了大变形情况下的极限分析定理，计及了几何变形的影响.

对于岩土材料的结构，由于问题的复杂性，在极限分析方面还没有取得很大进展.近年来，我国在岩体力学的弹塑性理论研究方面作了不少工作.一般认为，莫尔强度理论能较好地反映出岩石的极限条件，即在通过物体中任一点的各个微面上，剪应力τ_n与正应力σ_n如满足：

$$\max\{|\tau_n|-\varphi(\sigma_n)\}=0 \tag{1.1}$$

则该点处于极限平衡.

在$|\tau_n|$，σ_n坐标平面上，滑移面上应力所满足的函数关系：$|\tau_n|=\varphi(\sigma_n)$ 的图形是一系列极限应力圆的包络线——极限曲线.关于极限曲线的形状，有着不同的建议．在岩体力学围岩弹塑性分析中，经常使用直线型、双曲线型和二次抛物线型极限曲线．赵彭年[10]得到了这三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一表达式：

$$\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^n=A\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2+B\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)+C \tag{1.2}$$

式中：σ_1，σ_3是处于极限平衡状态的某点处的最大、最小主应力；A，B，C均为常数，它们与材料的特性有关；n的取值为1 或 2．注意到σ_1，σ_3 均是 σ_{ij} 的一次齐次函数，因此，条件（1.2）总可以写成如下形式：

$$f(\sigma_{ij})-\sigma_T^2=0 \tag{1.3}$$

其中：$f(\sigma_{ij})=f_1(\sigma_{ij})+f_2(\sigma_{ij})$，$f_1(\sigma_{ij})$是$\sigma_{ij}$的一次齐次函数，$f_2(\sigma_{ij})$是$\sigma_{ij}$的二次齐次函数；$\sigma_T^2$是与材料性质有关的参数，可以是常数或坐标的函数．

关于岩土力学的极限分析问题，中国矿业学院赵彭年同志曾在与本文第二作者的一次学术讨论中谈到过，当时他首先提出，如能将文献[8]的结果加以推广并应用于岩土力学问题，是有意义的．如所周知，当温度较高或围压较大时，岩石可视为理想刚塑性材料．因此，我们以式(1.3)作为屈服条件，按照塑性位势理论，考虑刚理想塑性体的极限分析问题，提出下面的变分原理，它可用于岩土力学的极限分析．对于屈服条件中$f(\sigma_{ij})$由σ_{ij}的二次齐次式或一次齐次式来表达的特殊情况，这个变分原理也是适用的，在前者的情况下，它与文献[8]中的结果在理论上完全一致．

二、几 个 定 理

一受外载作用的刚理想塑性体，在极限状态下，应满足下列方程和条件：

1）平衡方程(在全部体积内)：

$$\sigma_{ij,j}+X_i=0 \tag{2.1}$$

2）应变速度与位移速度的关系：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}) \tag{2.2}$$

3）流动定律和刚性条件：

在塑性区 V_p 中： $$\varepsilon_{ij}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.3a}$$

在刚性区 V_r 中： $$\varepsilon_{ij}=0 \tag{2.3b}$$

4）在给定力的边界面S_T上：

$$\sigma_{ij}n_j=\nu T_i \tag{2.4}$$

5）在支承边界面S_V上：

$$v_i=0 \tag{2.5}$$

6）屈服条件：

在V_p内:　$f(\sigma_{ij})-\sigma_T^2=0$　(2.6a)

在V_r内:　$f(\sigma_{ij})-\sigma_T^2\leqslant 0$　(2.6b)

其中: $f(\sigma_{ij})=f_1(\sigma_{ij})+f_2(\sigma_{ij})$, f_1是σ_{ij}的一次齐次函数, f_2是σ_{ij}的二次齐次函数.

在上述各式中, x_i是三维直角坐标; σ_{ij} 为应力张量; ε_{ij} 为应变速度张量; v_i 为位移速度矢量; X_i为体积力; T_i为基准外力; ν为载荷乘子; n_i为边界面的外法线单位矢量; λ为一与i, j无关的标量函数; 足标p, r 分别代表塑性、刚性. 为简明起见, 本文采用张量分析中的求和约定.

定理 1　结构抵达极限状态时, 载荷乘子ν为下式的驻值:

$$\nu=\mathrm{sta}\frac{\int_V(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-X_iv_i)\,dV-\int_{V_p}\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\sigma_T^2+f_2}(f-\sigma_T^2)\,dV-\int_{S_V}\sigma_{ij}n_jv_idS}{\int_{S_T}T_iv_idS}\tag{2.7}$$

其中: σ_{ij}, v_i互相无关, 同时独立变分, ε_{ij} 通过 $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})$与$v_i$相联系, σ_{ij}和v_i应使$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}>0$, $f(\sigma_{ij})$的最大值处于塑性区内.

证明: 将(2.7)式变分, 并用Gauss公式进行变换, 整理得:

$$\begin{aligned}&-\int_V(\sigma_{ij,j}+X_i)\delta v_idV+\int_{V_p}\left[\left(\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}\right)_{,j}-\sigma_{ij,j}-X_i\right]\delta v_idV+\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV\\&+\int_{V_p}\left[\varepsilon_{ij}-\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\varepsilon_{ij}-\frac{(\sigma_T^2+f_2)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}-(f-\sigma_T^2)\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}}{(\sigma_T^2+f_2)^2}\sigma_{mk}\varepsilon_{mk}\right]\delta\sigma_{ij}dV\\&-\int_{S_V}v_in_j\delta\sigma_{ij}dS+\int_{S_{Tp}}\left(\sigma_{ij}n_j-\nu T_i-\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j\right)\delta v_idS\\&+\int_{S_{Tr}}(\sigma_{ij}n_j-\nu T_i)\delta v_idS-\int_{S_{Vp}}\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j\delta v_idS-\int_{S_{rp}}\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j\delta v_idS=0\end{aligned}$$

由于$\delta\sigma_{ij}$, δv_i的任意性, 有:

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_{ij,j}+X_i=0 & \text{在}V_r\text{内}\\ \left(\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}\right)_{,j}-\sigma_{ij,j}-X_i=0 & \text{在}V_p\text{内}\\ \varepsilon_{ij}=0 & \text{在}V_r\text{内}\\ \varepsilon_{ij}-\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\varepsilon_{ij}-\frac{(\sigma_T^2+f_2)\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}-(f-\sigma_T^2)\frac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}}{(\sigma_T^2+f_2)^2}\sigma_{mk}\varepsilon_{mk}=0 & \text{在}V_p\text{内}\\ v_i=0 & \text{在}S_V\text{上}\\ \sigma_{ij}n_j-\nu T_i=0 & \text{在}S_{Tr}\text{上}\\ \sigma_{ij}n_j-\nu T_i-\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j=0 & \text{在}S_{Tp}\text{上}\\ \frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j=0 & \text{在}S_{Vp}\text{上}\\ \frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}\sigma_{ij}n_j=0 & \text{在}S_{rp}\text{上}\end{array}\right\}\quad(2.8\text{a}\sim\text{i})$$

在(2.8d)两端乘以σ_{ij}，按规则求和，并注意到$f=f_1+f_2$，因f_1，f_2分别是σ_{ij}的一次，二次齐次函数，$\sigma_{ij}\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma_{ij}}=f_1$，$\sigma_{ij}\dfrac{\partial f_2}{\partial\sigma_{ij}}=2f_2$，$\sigma_{ij}\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=f_1+2f_2=f+f_2$，故有：

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left[1-\frac{f-\sigma_T^2}{\sigma_T^2+f_2}-\frac{(\sigma_T^2+f_2)(f+f_2)-2f_2(f-\sigma_T^2)}{(\sigma_T^2+f_2)^2}\right]=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\left[\frac{2\sigma_T^2(\sigma_T^2-f)}{(\sigma_T^2+f_2)^2}\right]=0$$

因$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}>0$，由上式知，在$V_p$内$f=\sigma_T^2$，从而在$V_r$内$f\leqslant\sigma_T^2$。

以$f=\sigma_T^2$代入(2.8d)得：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\sigma_{mk}\varepsilon_{mk}}{\sigma_T^2+f_2}\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}，$$ 此即流动定律。

再将$f=\sigma_T^2$代入(2.8b)、(2.8g)，注意到(2.8a)、(2.8c)、(2.8e)、(2.8f)，即得(2.1)、(2.3)、(2.4)、(2.5)各式。以$f=\sigma_T^2$代入(2.8h)、(2.8i)两式得恒等式。(2.2)式在建立定理时已用过。由此定理1证毕。对于刚塑性分界面上以及塑性区内部可能存在的不连续面上的平衡、连续诸条件，可照通常的方法加入相应的项即可。当在S_V上，$v_i=\bar{v}_i$为已知时，只需将(2.7)式中分子最后一项改为$\int_{S_V}\sigma_{ij}n_j(v_i-\bar{v}_i)dS$即可。

定理1的逆定理，即刚理想塑性体（结构）极限分析问题的完全解必使载荷乘子ν的一次变分为零，显然成立。

在具体运用变分原理定理1时，场函数σ_{ij}，v_i不必满足平衡方程、流动定律、边界条件及屈服条件，刚塑性分界面由$f(\sigma_{ij})-\sigma_T^2=0$确定。对于准确解，通过变分所有条件均能满足；对于近似解，通过变分上述条件可得到近似满足。近似解的好坏，与所选取的近似场函数有关。在工程设计中，应尽可能使所选取的应力场满足下限定理，使所选取的位移速度场满足上限定理，以便获得较好的近似解。如果σ_{ij}，v_i是这样选取的，则有：

定理 2 如果所设应力场σ_{ij}^*满足下限定理，且$f_2^*=f_2(\sigma_{ij}^*)\geqslant0$（当$f_2^*=0$时，应有$f_1^*=f_1(\sigma_{ij}^*)>0$），所设位移速度场$v_i^\circ$满足上限定理，则由定理1(2.7)式所决定的极限载荷乘子ν将不小于同一σ_{ij}^*通过下限定理给出的下限值，它也将不大于同一v_i°通过上限定理给出的上限值。

证明：根据定理1(2.7)式：

$$\nu=\frac{\int_V\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^\circ dV-\int_{V_p}\frac{\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^\circ}{\sigma_T^2+f_2^*}(f^*-\sigma_T^2)dV-\int_V X_iv_i^\circ dV}{\int_{S_T}T_iv_i^\circ dS} \tag{2.9a}$$

$$=\frac{\int_V\frac{2\sigma_T^2-f_1^*}{\sigma_T^2+f_2^*}\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_r}\frac{\sigma_{ij}^*\varepsilon_{ij}^\circ}{\sigma_T^2+f_2^*}(f^*-\sigma_T^2)dV-\int_V X_iv_i^\circ dV}{\int_{S_T}T_iv_i^\circ dS} \tag{2.9b}$$

根据上、下限定理：

$$\nu_u=\frac{\int_V\sigma_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ dV-\int_V X_iv_i^\circ dV}{\int_{S_T}T_iv_i^\circ dS} \tag{2.10}$$

$$\nu_l=\frac{\int_V \sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}\,dV-\int_V X_i v^\circ_i dV}{\int_{S_T} T_i v^\circ_i dS} \tag{2.11}$$

其中：σ°_{ij} 是与 ε°_{ij} 对应的应力场。

要比较ν_u，ν，ν_l的大小，只需比较(2.10)，(2.9)，(2.11)三式中分子的大小。

先证明：$\nu\geqslant\nu_l$。

因为：$f^*_2\geqslant 0$，σ^*_{ij}满足下限定理，所以：

$$\sigma^2_T+f^*_2>0,\quad f^*-\sigma^2_T\leqslant 0$$

注意到，$\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}>0$，有：

$$\int_{V_p}\frac{\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}}{\sigma^2_T+f^*_2}(f^*-\sigma^2_T)\,dV\leqslant 0 \tag{2.12}$$

由不等式(2.12)比较(2.9a)式和(2.11)式立得：$\nu\geqslant\nu_l$。

现证明：$\nu\leqslant\nu_u$。

1) 当$f^*_2>0$时，

σ^*_{ij}一般不满足屈服条件，而$\dfrac{\sqrt{4f^*_2\sigma^2_T+(f^*_1)^2}-f^*_1}{2f^*_2}\sigma^*_{ij}$恰好满足屈服条件，但不一定满足流动定律；$\sigma^\circ_{ij}$与$\varepsilon^\circ_{ij}$是满足流动定律的。根据极限曲面的外凸性，有：

$$\sigma^\circ_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}\geqslant\frac{\sqrt{4f^*_2\sigma^2_T+(f^*_1)^2}-f^*_1}{2f^*_2}\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij} \tag{2.13}$$

利用不等式：$\sigma^2_T\geqslant f^*_1+f^*_2$，$\sigma^2_T>0$，$f^*_2>0$，有：

$$\sigma^4_T\geqslant f^*_1\sigma^2_T+f^*_2\sigma^2_T$$

$$\sigma^4_T+2f^*_2\sigma^2_T+(f^*_2)^2\geqslant f^*_1\sigma^2_T+3f^*_2\sigma^2_T+(f^*_2)^2$$

$$1\geqslant\frac{(\sigma^2_T+f^*_2)(f^*_1+2f^*_2)+f^*_2(\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2)}{(\sigma^2_T+f^*_2)^2}$$

$$1\geqslant\frac{f^*_1}{\sigma^2_T+f^*_2}+\frac{2f^*_2}{\sigma^2_T+f^*_2}+\frac{f^*_2(\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2)}{(\sigma^2_T+f^*_2)^2}$$

$$\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2\geqslant\frac{f^*_1(\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2)}{\sigma^2_T+f^*_2}+\frac{2f^*_2(\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2)}{\sigma^2_T+f^*_2}+\frac{f^*_2(\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2)^2}{(\sigma^2_T+f^*_2)^2}$$

$$\sigma^2_T\geqslant f^*_1\left(1+\frac{\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2}{\sigma^2_T+f^*_2}\right)+f^*_2\left(1+\frac{\sigma^2_T-f^*_1-f^*_2}{\sigma^2_T+f^*_2}\right)^2$$

$$4f^*_2\sigma^2_T+(f^*_1)^2\geqslant(f^*_1)^2+4f^*_1f^*_2\left(\frac{2\sigma^2_T-f^*_1}{\sigma^2_T+f^*_2}\right)+4(f^*_2)^2\left(\frac{2\sigma^2_T-f^*_1}{\sigma^2_T+f^*_2}\right)^2$$

$$\sqrt{4f^*_2\sigma^2_T+(f^*_1)^2}\geqslant\frac{2f^*_2(2\sigma^2_T-f^*_1)}{\sigma^2_T+f^*_2}+f^*_1$$

$$\frac{\sqrt{4f^*_2\sigma^2_T+(f^*_1)^2}-f^*_1}{2f^*_2}\geqslant\frac{2\sigma^2_T-f^*_1}{\sigma^2_T+f^*_2} \tag{2.14}$$

注意到不等式(2.13)，有：

$$\sigma^\circ_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}\geqslant\frac{2\sigma^2_T-f^*_1}{\sigma^2_T+f^*_2}\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij} \tag{2.15}$$

由不等式(2.15)及不等式：$\int_V \frac{\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}}{\sigma_T^2+f_2^*}(f^*-\sigma_T^2)dV\leqslant 0$比较(2.10)式和(2.9b)式立即得：$\nu_u\geqslant\nu$。

2）当$f_2^*=0$，$f_1^*>0$时：

$$\nu=\frac{\int_V \frac{2\sigma_T^2-f_1^*}{\sigma_T^2}\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}dV+\int_V \frac{\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}}{\sigma_T^2}(f_1^*-\sigma_T^2)\,dV-\int_V X_i v_i^\circ\,dV}{\int_{S_T} T_i v_i^\circ\,dS} \tag{2.16}$$

此时，$\frac{\sigma_T^2}{f_1^*}\sigma^*_{ij}$恰好能满足屈服条件，但它与$\varepsilon^\circ_{ij}$不一定满足流动定律，故有：

$$\sigma^\circ_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}\geqslant\frac{\sigma_T^2}{f_1^*}\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij} \tag{2.17}$$

由$(\sigma_T^2-f_1^*)^2\geqslant 0$，有：

$$\frac{\sigma_T^2}{f_1^*}\geqslant\frac{2\sigma_T^2-f_1^*}{\sigma_T^2} \tag{2.18}$$

从而：　$$\sigma^\circ_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}\geqslant\frac{2\sigma_T^2-f_1^*}{\sigma_T^2}\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij} \tag{2.19}$$

由不等式(2.19)及不等式$\int_V \frac{\sigma^*_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}}{\sigma_T^2}(f_1^*-\sigma_T^2)dV\leqslant 0$ 比较 (2.10) 式及 (2.16) 式 立即得到：$\nu_u\geqslant\nu$。

故　$\nu_u\geqslant\nu\geqslant\nu_l$，定理 2 证毕。

定理2指出，当所选场函数v_i和σ_{ij}分别为机动可能场和静力容许场时，由定理1(2.7)式所决定的极限载荷乘子介于相应的上、下限值之间。

有必要指出，在定理2的证明过程中，不等式(2.14)当$f_2^*>0$，$\sigma_T^2>0$时恒能成立。事实上，对于任意的$f_2^*(>0)$，$\sigma_T^2(>0)$以及任意的f_1^*，或者有：$\sigma_T^2\geqslant f_1^*+f_2^*$，或者有：$\sigma_T^2\leqslant f_1^*+f_2^*$①。在前一情况下已证明了(2.14)式，现只需证明在后一情况下(2.14)式也成立就行了。由不等式$\sigma_T^2\leqslant f_1^*+f_2^*$，$f_2^*>0$以及$\sigma_T^2>0$，仿照定理2证明中的做法，有：

$$1\leqslant\frac{f_1^*}{\sigma_T^2+f_2^*}+\frac{2f_2^*}{\sigma_T^2+f_2^*}+\frac{f_2^*(\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*)}{(\sigma_T^2+f_2^*)^2}$$

因为$\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*\leqslant 0$，故有：

$$\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*\geqslant\frac{f_1^*(\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*)}{\sigma_T^2+f_2^*}+\frac{2f_2^*(\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*)}{\sigma_T^2+f_2^*}+\frac{f_2^*(\sigma_T^2-f_1^*-f_2^*)^2}{(\sigma_T^2+f_2^*)^2}$$

以下的推证完全和定理2中的证明相同。从而不等式(2.14)当$f_2^*>0$，$\sigma_T^2>0$时恒成立。这个不等式对于建立下面的便于实用的定理3很重要。

定理3 如果一应力场$\tilde{\sigma}_{ij}$与基准力T_i平衡(体力X_i不计)，且$\tilde{f}_2=f_2(\tilde{\sigma}_{ij})\geqslant 0$($\tilde{f}_2=0$时，应有$\tilde{f}_1=f_1(\tilde{\sigma}_{ij})>0$)，在定理 1 中取$\sigma_{ij}=\beta\tilde{\sigma}_{ij}$（$\beta$为可变参数）和任选机动可能的位移速度场$v_i^\circ$　(但$\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon^\circ_{ij}>0$)，则在对$\beta$变分后，由定理1(2.7)式所决定的载荷乘子$\nu$不小于由$\tilde{\sigma}_{ij}$通过下限定理给出的下限值，也不大于由$v_i^\circ$通过上限定理给出的上限值。

---

①：这一情况虽然与极限分析的概念不符，但在近似计算中，在塑性区内部却是可能出现的。

证明：以$\sigma_{ij}=\beta\tilde{\sigma}_{ij}$，$v_i^\circ$ 代入定理1(2.7)式，得：

$$\nu_{(\beta)}=\frac{\int_V \beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV-\int_{V_p(\beta)}\frac{\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}(\beta^2\bar{f}_2+\beta\bar{f}_1-\sigma_T^2)dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ\,dS}$$

刚塑性区域的分界一般依赖于β。变分后取定$\beta(\beta>0)$使$\nu_{(\beta)}$为极大，并由$f(\beta\tilde{\sigma}_{ij})-\sigma_T^2=0$确定刚塑性分界面，再代入上式，改写为：

$$\nu_{(\beta)}=\frac{\int_V\frac{2\sigma_T^2-\beta\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_T(\beta)}\frac{\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}(\beta^2\bar{f}_2+\beta\bar{f}_1-\sigma_T^2)dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ\,dS} \tag{2.20a}$$

$$=\frac{\int_{V_r(\beta)}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_p(\beta)}\frac{2\sigma_T^2-\beta\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ\,dS} \tag{2.20b}$$

设$\sigma_{ij}^*=\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}$为下限解，则有，

$$\frac{2\sigma_T^2-\nu_l\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\nu_l^2\bar{f}_2}\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.21}$$

注意到$\beta(>0)$是使ν为极大，从而由(2.20b)及(2.21)式有：

$$\nu\geqslant\frac{\int_{V_r(\beta)}\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_p(\beta)}\frac{2\sigma_T^2-\nu_l\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\nu_l^2\bar{f}_2}\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ\,dS}$$

$$\geqslant\frac{\int_{V_r(\beta)}\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_p(\beta)}\nu_l\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ\,dS}=\nu_l$$

现在证明$\nu\leqslant\nu_u$。

刚塑性区域的分界面由$f(\beta\tilde{\sigma}_{ij})-\sigma_T^2=0$确定，则在刚性区$V_r$中：

$$f(\beta\tilde{\sigma}_{ij})-\sigma_T^2=\beta^2\bar{f}_2+\beta\bar{f}_1-\sigma_T^2\leqslant 0 \tag{2.22}$$

当$\bar{f}_2>0$时，$\dfrac{\sqrt{4\beta^2\bar{f}_2\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_1^2}-\beta\bar{f}_1}{2\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}$恰好能满足屈服条件，但不一定满足流动定律。由定理2证明中所述，有：

$$\sigma_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\frac{\sqrt{4\beta^2\bar{f}_2\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_1^2}-\beta\bar{f}_1}{2\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.23}$$

注意到$\sigma_T^2>0$，$\beta^2\bar{f}_2>0$，有：

$$\frac{\sqrt{4\beta^2\bar{f}_2\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_1^2}-\beta\bar{f}_1}{2\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\frac{2\sigma_T^2-\beta\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.24}$$

所以 $$\sigma_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\frac{2\sigma_T^2-\beta\bar{f}_1}{\sigma_T^2+\beta^2\bar{f}_2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.25}$$

由不等式(2.22)、(2.25)及$\beta>0$比较(2.10)式和(2.20a)式立即得：$\nu\leqslant\nu_u$。

当$\bar{f}_2=0$，$\bar{f}_1>0$时，(2.20a)式和(2.22)式为：

$$\nu=\frac{\int_V \frac{2\sigma_T^2-\beta f_1}{\sigma_T^2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ dV+\int_{V_r(\beta)}\frac{\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ}{\sigma_T^2}(\beta\hat{f}_1-\sigma_T^2)dV}{\int_{S_T}T_i v_i^\circ dS} \tag{2.26}$$

$$f(\beta\tilde{\sigma}_{ij})-\sigma_T^2=\beta\hat{f}_1-\sigma_T^2\leqslant 0 \tag{2.27}$$

注意到$\frac{\sigma_T}{\beta\hat{f}_1}\beta\tilde{\sigma}_{ij}$恰好能满足屈服条件，但不一定满足流动定律，故有：

$$\sigma_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\frac{\sigma_T^2}{\beta\hat{f}_1}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.28}$$

由不等式$\frac{\sigma_T^2}{\beta\hat{f}_1}\geqslant\frac{2\sigma_T^2-\beta\hat{f}_1}{\sigma_T^2}$可得：

$$\sigma_{ij}^\circ\varepsilon_{ij}^\circ\geqslant\frac{2\sigma_T^2-\beta\hat{f}_1}{\sigma_T^2}\beta\tilde{\sigma}_{ij}\varepsilon_{ij}^\circ \tag{2.29}$$

由不等式(2.27)、(2.29)及$\beta>0$比较(2.10)式和(2.26)式立即得$\nu\leqslant\nu_u$.

所以 $\nu_l\leqslant\nu\leqslant\nu_u$. 定理 3 证毕.

从理论上来讲，极限分析的主要任务是在不破坏屈服条件的前提下求解结构的极限载荷. 除了极简单的情况，一般很难得到完全解. 在近似计算中，所选应力场σ_{ij}往往不能保证在塑性区域V_P内处处都有$f(\sigma_{ij})=\sigma_T^2$，屈服条件有可能遭到破坏. 这时广义变分的结果只能使屈服条件在塑性区中得到近似满足，并获得近似的极限载荷. 定理 3 的建立，提供了一个较实用的计算方法，并能确定所得到的近似结果介于相应的上、下限值之间，这就具有较大实际意义. 不难证明，对于刚塑性交界面不依赖于β而变的情况，定理 3 也能成立.

本文定理 1 的建立，系采用Lagrange乘子法.事实上，在所有满足(2.2)、(2.5)、(2.6)式的σ_{ij}，v_i，ε_{ij}中，使泛函

$$\Pi_1=\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV-\int_V X_i v_i dV-\int_{S_T}\nu T_i v_i dS$$

为极值的σ_{ij}，v_i，ε_{ij}必使ν为极值[11]

$$\nu=\frac{\int_V\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV-\int_V X_i v_i dV}{\int_{S_T}T_i v_i dS}$$

用Lagrange乘子α_{ij}，η_i，μ乘在(2.2)、(2.5)、(2.6)式上，将泛函Π_1变为无条件变分的泛函Π_1^*

$$\Pi_1^*=\int_V\left\{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}-X_i v_i+\alpha_{ij}\left[\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\right\}dV+\int_{V_P}\mu(f-\sigma_T^2)dV$$
$$-\int_{S_T}\nu T_i v_i dS+\int_{S_V}\eta_i v_i dS \tag{2.30}$$

将(2.30)式变分，整理得：

$$\delta\Pi_1^*=-\int_V(\alpha_{ij,j}+X_i)\delta v_i dV+\int_V\left[\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})-\varepsilon_{ij}\right]\delta\alpha_{ij}dV$$
$$+\int_V(\sigma_{ij}-\alpha_{ij})\delta\varepsilon_{ij}dV+\int_V\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}dV+\int_{V_P}\left(\varepsilon_{ij}+\mu\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}\right)\delta\sigma_{ij}dV$$
$$+\int_{S_T}(\alpha_{ij}n_j-\nu T_i)\delta v_i dS+\int_{S_V}(\alpha_{ij}n_j+\eta_i)\delta v_i dS+\int_{S_V}v_i\delta\eta_i dS$$

$$+\int_{V}(f-\sigma_{l}^{2})\delta\mu dV$$

令$\delta\Pi_{1}^{*}=0$，由$\delta\sigma_{ij}$，δv_{i}，$\delta\varepsilon_{ij}$，$\delta\alpha_{ij}$，$\delta\eta_{i}$及$\delta\mu$的任意性，有：

$$\alpha_{ij,j}+X_{i}=0 \quad \text{在}V\text{内} \tag{2.31a}$$

$$\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})=0 \quad \text{在}V\text{内} \tag{2.31b}$$

$$\sigma_{ij}-\alpha_{ij}=0 \quad \text{在}V\text{内} \tag{2.31c}$$

$$f-\sigma_{l}^{2}=0 \quad \text{在}V_{p}\text{内} \tag{2.31d}$$

$$\varepsilon_{ij}+\mu\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=0 \quad \text{在}V_{p}\text{内} \tag{2.31e}$$

$$\varepsilon_{ij}=0 \quad \text{在}V_{r}\text{内} \tag{2.31f}$$

$$v_{i}=0 \quad \text{在}S_{V}\text{上} \tag{2.31g}$$

$$\alpha_{ij}n_{j}-\nu T_{i}=0 \quad \text{在}S_{T}\text{上} \tag{2.31h}$$

$$\alpha_{ij}n_{j}+\eta_{i}=0 \quad \text{在}S_{V}\text{上} \tag{2.31i}$$

由(2.31c)、(2.31i)式可得：

$$\alpha_{ij}=\sigma_{ij},\quad \eta_{i}=-\sigma_{ij}n_{j}$$

在(2.31e)式两端乘以σ_{ij}，并注意到(2.31d)式，可得：

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\sigma_{T}^{2}+f_{2}}$$

将以上确定的诸乘子代入(2.30)式即得极限分析的广义变分原理.

以上阐述了定理1的建立. 在此，我们进一步指出，定理1 (2.7)式中的Lagrange 乘子μ在下列情况下可以有不同的形式：

1）当$f=f_{1}$时

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{f_{1}} \tag{2.32a}$$

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\sigma_{l}^{2}} \tag{2.32a$'$}$$

2）当$f=f_{2}$时

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2f_{2}} \tag{2.32b}$$

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{2\sigma_{T}^{2}} \tag{2.32b$'$}$$

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\sigma_{T}^{2}+f_{2}} \tag{2.32b$''$}$$

3）当$f=f_{1}+f_{2}$ ($f_{1}\neq0$，$f_{2}\neq0$)时

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{f_{1}+2f_{2}}=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{f+f_{2}} \tag{2.32c}$$

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\sigma_{T}^{2}+f_{2}} \tag{2.32c$'$}$$

定理1仍然成立。但应强调指出，上述各种表达形式上的不同并不是 Lagrange 乘子μ不唯一。事实上，μ唯一地由下式确定：

$$\mu=-\frac{\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{mk}}\sigma_{mk}}$$

其基本形式应为(2.32c)式．改写成相应的(2.32a)′、(2.32b)′、(2.32b)″、(2.32c)′各式时，实际上已经利用了（在塑性区域内）$f(\sigma_{ij})=\sigma_T^2$这一条件．在精确解的情况下，在$V_p$内$f(\sigma_{ij})=\sigma_T^2$这一条件处处成立，因此上述各种形式在理论上是完全一致的．但在近似解的情况下，在塑性区域V_p内不一定处处都有$f(\sigma_{ij})=\sigma_T^2$，因此，上述各种形式在近似计算中显然是有区别的(见例)．在建立定理1时，我们采取了(2.32c)′的形式，这样做的目的是为了建立具有实际意义的定理2和定理3．

三、举　例

以上证明了三个定理，并说明了定理1(2.7)式的建立．在证明过程中，对σ_T^2未加任何限制，σ_T^2可以是常数或坐标x_i的函数，即材料可以是均质的或者是非均质的．对于各向异性材料，只要屈服条件是用σ_{ij}的一次齐次函数，或者二次齐次函数，或者二次齐次函数与一次齐次函数的和来表达，这个变分原理都是适用的．今以具有完全解的问题为例说明定理1的正确性．

例一、简支圆板承受均布载荷，在Tresca条件下的极限载荷、屈服条件为：

$$\max\{|\sigma_r|,\ |\sigma_\theta|,\ |\sigma_\theta-\sigma_r|\}=\sigma_T$$

$f(\sigma_{ij})$为σ_{ij}的一次齐次表达式，可改写为：

$$\max\{|M_r|,|M_\theta|,|M_\theta-M_r|\}=M_T$$

选：$M_r=\beta\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$，$M_\theta=\beta$，$w=1-\frac{r}{a}$．将所选场函数代入定理1(2.7)式，算得$p=\frac{6M_T}{a^2}$．所设应力场是Tresca条件下的完全解，代入定理1(2.7)式当然得到准确乘子．

例二、平面应变条件下，半无限体受刚模的无摩擦压入(图1)．在Tresca或Mises条件下，屈服条件中$f(\sigma_{ij})$均为σ_{ij}的二次齐次表达式．Hill完全解为：

扇形区域ABC中$\sigma_r=\sigma_\theta=-K-2K\theta$，$\tau_{r\theta}=-K$，$v_r=0$，$v_\theta=\sqrt{2}v$，$v$为刚模向下的速度．

$\triangle OAB$，$\triangle ACD$为均匀应力区，以大小为$\sqrt{2}v$的速度分别沿OB，CD方向作刚性滑动．

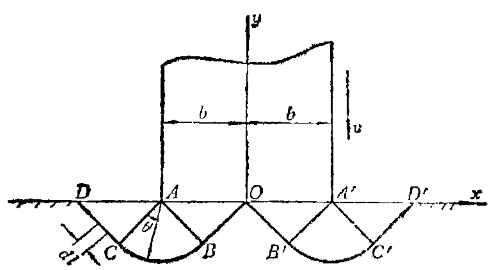

图 1

代入本文定理1(2.7)式或文献[8]定理1(7)式，并计入速度场间断线$OBCD$上的塑性功率，均得初始流动时刚模底部的压力的准确解答为：

$$p=\frac{2}{2vb}\left[\int_0^{b/\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}(-K)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}v}{r}\right)rdrd\theta+2\int_0^{b/\sqrt{2}}K\cdot\sqrt{2}vdl\right.$$

$$\left.+\int_0^{\pi/2}K\cdot\sqrt{2}v\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}d\theta\right]=K(\pi+2)\approx5.14K$$

现根据文献[8]，采用图2所示塑性机构，设刚模向下的速度为1．若选：$v_r=0$，$v_\theta=1$；$\sigma_r=\beta(2+\cos\theta)$，$\sigma_\theta=\beta(2+2\cos\theta)$，$\tau_{r\theta}=\beta\sin\theta$．这一选择显然远离实际，但代入本文定理1(2.7)式，算得变分近似解为$p=5.51K$；代入文献[8]定理1(7)式，算得变分

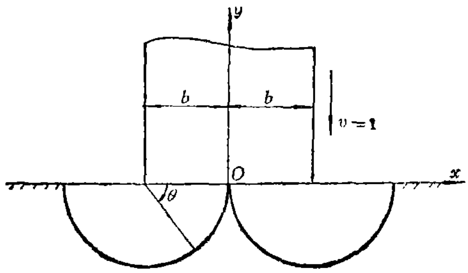

图 2

近似解为$p=5.45K$，与准确解$p=5.14K$均较符合。

例二说明，在$f(\sigma_{ij})$为σ_{ij}的二次齐次表达式的情况下，本文定理1(2.7)式与文献[8]定理1(7)式的正确性和理论上的一致性；在近似计算中所得结果也比较接近，但在进行具体计算时，文献[8]定理1(7)式较为简便。

对于岩土力学中屈服条件由(1.2)式表达的极限分析问题，在直线型极限曲线即Coulomb条件下，例二有相应的完全解[12]：$p=c\,\mathrm{ctg}\phi\left[e^{\pi\,\mathrm{tg}\phi}\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)-1\right]$今选取图3所示的塑性机构，并设在扇形区域内：$v_r=0$，$v_\theta=v_0e^{3\phi\theta}$，$\sigma_r=\sigma_\theta=\beta(1+2\theta)$，$\tau_{r\theta}=\beta$这一选择远离实际，但代入本文定理1(2.7)式，计算结果与准确解仍较接近(见表1)。

表1

p \ ϕ	10°	20°	30°	40°
准确解	$8.3c$	$14.8c$	$30.1c$	$75.2c$
变分解	$7.6c$	$13.9c$	$30.0c$	$73.3c$

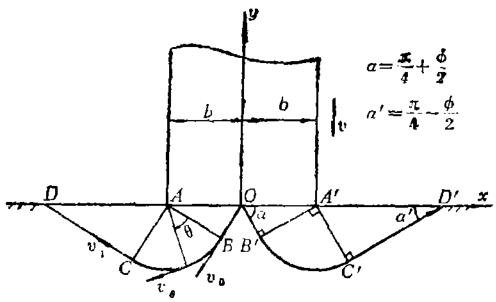

图 3

对于双曲线型和二次抛物线型极限曲线的极限条件，目前还未见到相应的完全解或者较好的数值解，不能进行比较，举例从略。但应指出，基于莫尔强度理论的极限条件(1.2)，目前已被用于岩体力学平面应变问题的弹塑性分析，以此为基础来研究岩体力学平面应变问题的极限分析，无论在理论上或者在工程设计上（例如考虑大型水坝下岩石地基的极限承载能力）都是必要的。对于极限条件(1.2)，现有的塑性平面应变滑移线场理论是不适用的，上、下限定理的运用也有较大困难。本文定理建立的意义即在于为此提供了一个理论分析的方法，同时，它也包含了刚理想塑性体极限分析理论中已经研究过的一些比较成熟的情况。

参 考 文 献

[1] 胡海昌，论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理，物理学报，10，3（1954）。
[2] Reissner, E., On the variational theorem in elasticity, *Jour Math Phys.*, 29, (1950).
[3] 解伯民，关于弹塑性混合体的变分原理及其运用，力学学报，1，3(1957)。
[4] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，1—2(1979)。
[5] 钱令希等，论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理，力学学报，6，4（1963）。
[6] Mura, T. and S. L. Lee, Application of variational principles to limit analysis, *Quart. Appl. Math.* 21, 3 (1963).
[7] 王仁、黄文彬、曲圣年、赵祖武、梅占馨、王长兴等，对"论固体力学中的极限分析并建议一个一般变分原理"一文的讨论，力学学报，8，1（1965）。
[8] 薛大为，建议一组关于极限分析的定理，科学通报，20，4（1975）。
[9] 薛大为，一个关于大变形的极限分析定理，科学通报（1980年数学物理化学专辑），25（1980）。
[10] 赵彭年，三种型式极限曲线的极限平衡条件的统一表达式，地下工程，(1981)。

[11] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社，(1980).
[12] Chen Wai-fah, *Limit Analysis and Soil Plasticity*, (1975).

Theorems on the Limit Analysis Dealing with the Yield Condition Expressed by the Sum of the Homogeneous Linear Form of Stress Tensor and the Homogeneous Quadratic Form of Stress Tensor

Zhao Jia-yi Hsueh Dah-wei

(Peking Institute of Technology, Beijing)

Abstract

In this paper, a generalized variational principle on the limit analysis dealing with the yield condition expressed by the sum of the homogeneous linear form of stress tensor and the homogeneous quadratic form of stress tensor is suggested. This variational principle can be applied to the limit analysis in rock mechanics and it takes the situation, in which the yield condition is expressed by the homogeneous linear form of stress tensor or the homogeneous quadratic form of stress tensor, as its special case.