应用数学和力学，第6卷第7期（1985年7月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

# 非线性扩散方程的一个新的近似解*

袁镒吾

（中南矿冶学院，1983年8月31日收到）

**摘　要**

本文研究了文献[1]中的同样问题．本文作者的解近似地满足全部基本方程(1.1)和(1.2)和全部边界条件(1.3)～(1.5)．而刘氏的解[1]却不满足连续性方程(1.2)．

## 一、问题的提法

从井中以定流量将水注入到干的孔隙地层中，从而形成有自由面的潜水饱和带和无水带。其分界面 $r_f(t)$ 从井区向外径向扩展运动。问题是求潜水位在不同时刻的分布和分界面（动边界面）的运动规律以及潜水渗流流速。

文献[1]在假定潜水渗流流量沿程变化规律的基础上得到了问题的近似解。其解不满足连续性方程，只是满足其平均方程。

本文引入平均潜水位的概念。假定它为常数，而与时间无关。并设整个流场中各处的潜水位均和此平均潜水位相差很少。略去二阶微量，得到了问题的近似解。和奇异摄动解相比较[1]，本文的结果和文献[1]的结果具有相同的精确度。本文的近似解近似地满足了全部基本方程（包括连续性方程）和全部边界条件。

根据文献[1]，上述问题的基本方程为

潜水径向渗流定律

$$v=-h^n\partial h/\partial r \qquad (n>0) \tag{1.1}$$

连续性方程

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v)=\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1.2}$$

边值条件

$$h(r,\ 0)=0,\ r_f(0)=0 \tag{1.3}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(2\pi r h^n\frac{\partial h}{\partial r}\right)=-Q_0 \tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐．

$$h(r_f,\ t)=0,\quad \frac{\partial h}{\partial r}(r_f,\ t)=0 \tag{1.5}$$

式中：$h(r,\ t)$——无因次潜水位，含水率，温度等；$t$——无因次时间，$r$——无因次径向坐标；$Q_0$——常注入量；$r_f(t)$——待求的无因次动边界位置函数。

## 二、近 似 解

从零到$r_f(t)$求式(1.2)的面积积分，考虑到条件(1.3)～(1.5)，得积分关系式

$$\int_0^{r_f} h(r,\ t)rdr=\frac{Q_0}{2\pi}t \tag{2.1}$$

式(2.1)表示在0——$r_f$范围内平均质量守恒方程。我们称$h_1=2\pi\int_0^{r_f} hrdr/(\pi r_f^2)$为平均潜水位。估计到式(2.1)，我们假设

$$h_1=\frac{Q_0 t}{\pi r_f^2}=\text{常数} \tag{2.2}$$

令

$$h=h_1+\Delta h \tag{2.3}$$

并假设在0——$r_f$范围内处处有

$$\Delta h\sim\varepsilon \text{ 及 } \partial\Delta h/\partial r\sim\varepsilon$$

式中符号"～"表示数量级相同。$\varepsilon$为小量。将式(2.3)代入式(1.1)，略去二阶微量得

$$v=-h_1^n\partial h/\partial r \tag{2.4}$$

将式(2.4)代入式(1.2)，注意到$h_1$为常数，化简得

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{1}{r}h_1^n\left(\frac{\partial h}{\partial r}+r\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}\right) \tag{2.5}$$

设式(2.5)有相似解，即令

$$h=F(r/r_f)$$

则有

$$\frac{\partial h}{\partial t}=F'r(-1)r_f^{-2}\frac{dr_f}{dt},\quad \frac{\partial h}{\partial r}=F'\frac{1}{r_f},\quad \frac{\partial^2 h}{\partial r^2}=\frac{F''}{r_f^2}$$

式(2.5)则变为

$$-F'r\frac{dr_f}{dt}=h_1^n\left(F'\frac{r_f}{r}+F''\right) \tag{2.6}$$

如果式(2.6)有相似解，则必有$rdr_f/dt=f(r/r_f)$或$r\cdot dr_f/dt=$常数。由式(2.2)得

$$r_f^2=Q_0t/(\pi h_1)$$

于是得

$$2r_f\cdot\frac{dr_f}{dt}=\frac{Q_0}{\pi h_1}=\text{常数} \tag{2.7}$$

即 $$r\cdot\frac{dr_f}{dt}=\frac{Q_0}{2\pi k_1}\cdot\frac{r}{r_f}$$

可见，式(2.6)确实有相似解。将式(2.7)代入式(2.6)得

$$xF''+F'(1+Bx^2)=0 \tag{2.8}$$

式中 $x=r/r_f$ 及

$$B=\frac{Q_0}{2\pi}\cdot h_1^{-(n+1)} \tag{2.9}$$

将式(2.8)积分一次得

$$F'=Cx^{-1}\exp[-Bx^2/2] \tag{2.10}$$

由式(2.10)知，当$r=r_f$，即$x=1$时，$h=F=0$。将式(2.10)再积分一次得

$$F=C\int_1^x x^{-1}\cdot\exp[-Bx^2/2]dx \tag{2.11}$$

求式(2.11)的准确积分很困难；而且，为了满足边界条件 $\frac{\partial h}{\partial r}(r_f,\ t)=0$，由式(2.10)会得到$C=0$或$B=\infty$，这均是不合理的。因此，我们只是求式(2.11)的近似积分。

我们用级数表示 $\exp[-Bx^2/2]$：

$$\exp[-Bx^2/2]=1-\frac{1}{2}Bx^2+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}Bx^2\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}Bx^2\right)^3+\cdots\cdots \tag{2.12}$$

由于在积分区间[1，0]的绝大部分分点处，$x$均取值很小，所以我们有理由认为

$$x^2\sim\varepsilon$$

直到现在，我们还没有对式(2.2)中的常数$h_1$做过任何限制。现在假设$B$值与2很接近，使得

$$Bx^2/2\sim\varepsilon$$

于是，略去二阶微量，式(2.12)变为

$$\exp[-Bx^2/2]=1-Bx^2/2$$

代入式(2.11)得

$$F=C\int_1^x x^{-1}\left(1-\frac{B}{2}x^2\right)dx$$

积分得

$$F=C\left(\ln x-\frac{B}{4}x^2+\frac{B}{4}\right) \tag{2.13}$$

现决定常数$B$：由式(2.13)得

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{dF}{dx}\cdot\frac{1}{r_f}=C\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{r_f}-\frac{B}{2}\cdot\frac{x}{r_f}\right)$$

代入边界条件(1.5)得

$$\left.\frac{\partial h}{\partial r}\right|_{r=r_f}=C\left.\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{r_f}-\frac{B}{2}x\cdot r_f^{-1}\right)\right|_{x=1}=0$$

即

$$\frac{1}{r_f}-\frac{B}{2r_f}=0$$

故得

$$B=2 \tag{2.14}$$

它与我们前面对$B$值所做的限制不相矛盾。

将式(2.14)代入式(2.9)得

$$h_1=\left(\frac{Q_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{n+1}} \tag{2.15}$$

再决定积分常数$C$：由式(2.13)及(1.4)得

$$\lim_{r\to 0}\left(2\pi r h_1^n\frac{\partial h}{\partial r}\right)=\lim_{r\to 0}\left[2\pi h_1^n C\left(\frac{1}{x}\frac{r}{r_f}-\frac{B}{2}x\frac{r}{r_f}\right)\right]=Q_0$$

即

$$2\pi h_1^n C=-Q_0$$

故

$$C=-Q_0/(2\pi h_1^n)$$

将式(2.15)代入上式得

$$C=-\left(\frac{Q_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{n+1}}\cdot 2^{\frac{n-1}{n+1}} \tag{2.16}$$

将式(2.14)代入式(2.13)最后得潜水位为

$$h=C\left[\ln\frac{r}{r_f}-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{r_f^2}-1\right)\right] \tag{2.17}$$

式中$C$由式(2.16)决定。

现求$r_f$：将式(2.15)代入式(2.2)得

$$\frac{Q_0 t}{\pi r_f^2}=\left(\frac{Q_0}{4\pi}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

于是得

$$r_f^2=2^{-\frac{2}{n+1}}\left(\frac{Q_0}{\pi}\right)^{\frac{n}{n+1}}\cdot t \tag{2.18}$$

式(2.18)用以确定自由面的潜水饱和带和无水带的分界面随时间的变化规律。

现求$v(r,\ t)$：将式(2.17)代入式(2.4)得潜水径向速度为

$$v=-h_1^n\cdot C\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{r_f^2}\right)$$

将式(2.15)及(2.16)代入得

$$v=\frac{Q_0}{2\pi}\left(\frac{1}{r}-\frac{r}{r_f^2}\right) \tag{2.19}$$

潜水渗流流量沿程变化的规律为

$$Q=2\pi r v=Q_0(1-r^2/r_f^2) \tag{2.20}$$

它和文[1]献中的公式(2.2)完全一致。

为了检验本文所得结果的准确程度，我们取$Q_0=50$，$r_f=15$，$n=1$。由式(2.18)得

$$t=\frac{r_f^2}{2}\left(\frac{\pi}{Q_0}\right)^{\frac{1}{2}}=28.2$$

已有的奇异摄动解（以下简称准确值）为$t=25.4$[1]，和此准确值相比较，本文的误差为11%。

而文献[1]的相应的$t$值为22.5，和准确值相比较，其误差为11.4%。

可见，本文具有和文献[1]相同的精确度。

最后，值得指出，本文求得的潜水位的计算式(2.16)满足了全部基本方程的一级近似方

程及全部边界条件(1.3)～(1.5)。而文献[1]中的相应公式(8)则不满足连续性方程(1.2)，只是满足其平均方程(2.1)。

## 三、结　论

本文在假设平均潜水位为常数及流场中各处的潜水位均和此平均潜水位相差很小的前提下，得到了计算潜水位及潜水径向流速的公式(2.17)及(2.19)以及自由面的潜水饱和带和无水带的分界面的运动规律式(2.18)。本文所得结果和文献[1]的相应结果具有相同的精确度。文献[1]中没有本文中所作的任何一个假设。但文献[1]对潜水渗流流量的沿程变化规律是人为的预先假定的。本文则是做为理论推导的自然地结论；且二者又正好完全相同。此外，文献[1]的潜水位的计算公式不满足连续性方程（只是满足其平均方程），本文的相应公式则近似地满足全部基本方程。

## 参 考 文 献

[1] 刘慈群，非线性扩散方程的近似解，水利学报，11(1982)，39—41.

# A New Approximate Solution of Nonlinear Diffusion Equation

Yuan Yi-wu

*(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)*

**Abstract**

In this paper, the same problem in ref. [1] is studied. The author's solution approximately satisfies the whole fundamental equations (1.1) and (1.2) and the whole bound values conditions (1.3)～(1.5). But the Liu's solution[1] did not satisfy the equation of continuity (1.2).