

应变空间中的岩土屈服准则与本构关系*

陈长安 郑颖人

(空军工程学院, 1984年4月21日收到)

摘 要

本文从 Ильюшин 公设出发评述了在应变空间中研究岩土弹塑性问题的必要性和特点, 建立了应力不变量与弹性应变不变量之间的关系式, 实现了应力屈服面到应变屈服面的转换, 导出和讨论了十二个以应力表达的屈服准则的应变表达式, 应用正交法则导出了十二个与上述应变屈服准则相联系的理想塑性材料的本构关系, 本文工作的结果可供实际应用, 并有助于应变空间塑性理论的进一步研究。

主要符号表

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \varepsilon_{23} \ \varepsilon_{31} \ \varepsilon_{12}]^T$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12}]^T$$

\mathbf{D} 弹性矩阵

I_1 、 I_3 应力张量第一和第三不变量

J_2 应力偏张量第二不变量

θ_σ 、 θ_ε 应力空间和弹性应变空间 Lode 角

K_α 不可逆内变量

I'_{1e} 弹性应变张量第一不变量

J'_{2e} 、 J'_{3e} 弹性应变偏张量第二和第三不变量

c 粘聚力

$$\nu_c = 2(1+\mu)c/E$$

e'_{ij} 弹性应变偏张量分量

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 塑性应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p \text{ 弹性应变}$$

一、引 言

岩土类材料的弹塑性问题的传统研究方法是在应力空间中进行的。但是, Dafflias、Zienkiewicz、殷有泉和曲圣年等人的一系列工作表明^[1,2,3]。合理的岩土本构关系应该在应变空间中表述。岩土塑性理论的应变空间表述比应力空间表述有着明显的优越性^[2,4,5]。

(一) 以 Drucker 公设为出发点的应力空间表述的塑性理论只适用于稳定材料。在岩土工程中, 为了考虑到材料的非稳定性质, 应该以 Ильюшин 公设为出发点建立应变空间表述的弹塑性理论。应变空间表述的塑性理论具有广泛的统一性, 可用时适用于材料的稳定和非稳定阶段; (二) 非线性问题有限元分析中, 使用位移法是与应变空间表述相一致的; (三) 实验技术中直接测量的量一般为应变或位移, 应变空间表述减少了实验数据处理 的困难。

* 薛大为、潘立宙推荐。

二、应变空间中的屈服准则

一般认为屈服面存在一条对称中心轴, 应力屈服面对称中心轴与等倾线重合. 称过中心轴的平面与屈服面的交线为子午线, 垂直于中心轴的平面叫 π 平面, π 平面与屈服线的截线叫屈服线. 屈服线一般沿中心轴作几何相似的变化, 大多数屈服面可写成如下形式^[6]:

$$f(I_1, J_2, \theta_\sigma) = f_1(I_1) + f_2(\bar{\sigma}_+) = 0 \quad (2.1)$$

其中 $\bar{\sigma}_+ = \sqrt{J_2}/g(\theta_\sigma)$, 且有 $g(\pi/6) = 1$. θ_σ 为常数时式 (2.1) 确定了子午线的形状, $f_2(\bar{\sigma}_+)$ 确定屈服线形状.

利用广义虎克定律 $\sigma = D\epsilon^e = D(\epsilon - \epsilon^p)$

可求得应力不变量与弹性应变不变量之间的转换公式:

$$I_1 = \frac{E}{1-2\mu} I'_{1e}; \quad (2.2)$$

$$J_2 = \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^2 J'_{2e} \quad (2.3)$$

$$\theta_\sigma = \theta'_e; \quad (2.4)$$

$$I_3 = \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^3 J'_{3e} - \frac{1}{3} \frac{E}{1-2\mu} \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^2 I'_{1e} J'_{2e} + \frac{1}{27} \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^3 I'_{1e}{}^3 \quad (2.5)$$

从不变量之间的转换式 (2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5) 出发, 将应力屈服面 (2.1) 转换为应变屈服面:

$$F(I'_{1e}, J'_{2e}, \theta'_e) = f\left(\frac{E}{1-2\mu} I'_{1e}, \left(\frac{E}{1+\mu}\right)^2 J'_{2e}, \theta'_e\right) = f_1\left(\frac{E}{1-2\mu} I'_{1e}\right) + f_2(\bar{\sigma}_+) = 0 \quad (2.6)$$

其中 $\bar{\sigma}_+ = E\sqrt{J'_{2e}}/(1+\mu)g(\theta'_e)$, $g(\pi/6) = 1$

应力空间等向强化屈服面中心为 $\sigma = 0$ 处, 转换到应变空间后中心为 $D(\epsilon - \epsilon^p) = 0$, 即 $\epsilon = \epsilon^p$ 处. 后继应变屈服面将以塑性应变状态点为中心作平动, 这一点可由下列事实解释: 材料产生不可逆塑性变形后完全卸载其应变状态必然是 $\epsilon = \epsilon^p$. 应力空间理想塑性屈服面在应变空间中表现为形状、大小不变, 但总是随塑性变形发展而平动的随动“强化”屈服面.

各种屈服线与子午线的组合可构成各种屈服面. 下面将常用的十二种应力屈服面 $f=0$ 转换为应变屈服面 $F=0$. 为简便计, 只就其初始屈服面讨论几何意义.

(一) Mises 型

$$f = \sqrt{J_2} - c = 0, \quad F = \sqrt{J'_{2e}} - \gamma_e/2 = 0 \quad (2.7)$$

式 (2.7) 表示一个以等倾线为轴的圆柱面, 屈服现象与 I'_{1e} 无关.

(二) 广义 Mises 型

$$f = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0, \quad F = \frac{aE}{1-2\mu} I'_{1e} + \frac{E}{1+\mu} \sqrt{J'_{2e}} - k = 0 \quad (2.8)$$

式 (2.8) 表示以等倾线为轴的圆锥面, 屈服时 $\sqrt{J'_{2e}}$ 与 I'_{1e} 成线性关系. 选取不同的 a 、 k 值可得到对 Mohor-Coulomb 型屈服面的三种不同的逼近;

1) 外角圆锥

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} = 0 \\ F &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} I'_{1e} + \sqrt{J'_{2e}} - \frac{3\gamma_c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

2) 内角圆锥

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} = 0 \\ F &= \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} I'_{1e} + \sqrt{J'_{2e}} - \frac{3\gamma_c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

3) 内切圆锥

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} I_1 + \sqrt{J_2} - \frac{3c \cos \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} = 0 \\ F &= \frac{\sin \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} I'_{1e} + \sqrt{J'_{2e}} - \frac{3}{2} \gamma_c \frac{\cos \phi}{\sqrt{9 + 3 \sin^2 \phi}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

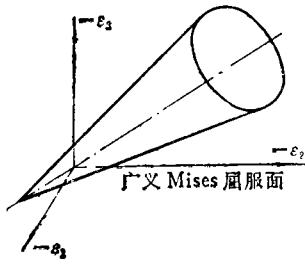


图 1

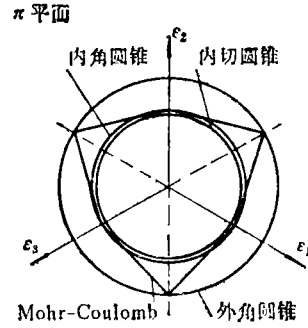


图 2

(三) Tresca 型

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \sqrt{J_2} \cos(\theta_\sigma - (i-1)\pi/3) - c = 0 \\ F_i &= \sqrt{J'_{2e}} \cos(\theta'_\sigma - (i-1)\pi/3) - \gamma_c/2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

其中 $|\theta_\sigma - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$, $|\theta'_\sigma - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 式 (2.12) 表示以等倾线为轴的正六角柱面, 屈服现象与 I'_{1e} 无关。

(四) 广义 Tresca 型

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \sqrt{J_2} \cos(\theta_\sigma - (i-1)\pi/3) + f_1 I_1 - c = 0 \\ F_i &= \sqrt{J'_{2e}} \cos\left(\theta'_\sigma - \frac{i-1}{3} \pi\right) + f_1 \frac{1 + \mu}{1 - 2\mu} I'_{1e} - \frac{1}{2} \gamma_c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

其中 $|\theta_\sigma - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$, $|\theta'_\sigma - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$), 式 (2.13) 表示以等倾线为轴的正六角棱锥面, 屈服时 I'_{1e} 与 $\sqrt{J'_{2e}}$ 成线性关系。

(五) Mohr-Coulomb 型

Mohr-Coulomb 型屈服面由六个平面围成: $f_i = 0$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$f_i = \frac{1}{3} \sin \phi I_1 + \left[\cos\left(\theta_\sigma - \frac{i-1}{3} \pi\right) - \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin\left(\theta_\sigma - \frac{i-1}{3} \pi\right) \right] \sqrt{J_2} - c \cos \phi = 0$$

$$F_1 = \frac{1}{3} \sin \phi \frac{1+\mu}{1-2\mu} I'_{1e} + \left[\cos \left(\theta'_i - \frac{i-1}{3} \pi \right) - \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{3}} \sin \phi \sin \left(\theta'_i - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right] \sqrt{J'_{1e}} - \frac{1}{2} \gamma_0 \cos \phi = 0 \quad (2.14)$$

其中 $|\theta_0 - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$, $|\theta'_i - (i-1)\pi/3| \leq \pi/6$.

Mohr-Coulomb 屈服面经实验证明在低围压时较好地符合实际情况。式(2.14)表示以等倾线为轴的不等角六角棱锥面, 料料屈服时最大剪应变与球应变成线性关系。在形式上, 对 $F_1=0$ 而言有:

1) $\phi=0$ 且 $\theta'_i=0$ 时, 成为 Mises 型(2.7);

2) $\theta'_i=$ 常数时, 成为广义 Mises 型。 $\theta'_i=\pi/6$, $-\pi/6$ 和 $-\arctg(\sin \phi/\sqrt{3})$ 时, 成为外角、内角和内切圆锥型(2.9)、(2.10)、(2.11);

3) $\phi \neq 0$ 时, 成为 Tresca 型(2.12)。

(六) Zienkiewicz 型^[6,7]

对 Mohr-Coulomb 屈服面进行两方面的改造, 一方面将有奇异点的屈服线换成光滑曲线, 另一方面将子午线由直线换为二次曲线。

对屈服线进行改造, 在式(2.1)、(2.6)中要求:

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=1, \quad g\left(-\frac{\pi}{6}\right)=K = \frac{3-\sin \phi}{3+\sin \phi}, \quad \frac{dg(\theta)}{d\theta} \Big|_{\theta=\pm \frac{\pi}{6}}=0$$

可得过 Mohr-Coulomb 屈服线六个顶点的光滑曲线。本文在 Gudehus 和 Argyris 工作的基础上建议取

$$g(\theta) = 2K/[1+K-(1-K)\sin 3\theta + \alpha \cos^2 3\theta]$$

其中 α 在 0.2~0.4 间取值。

对子午线的改造按子午线形状分为三种情况:

1) 双曲型

$$\left. \begin{aligned} f &= -\text{tg}^2 \phi I_1^2/9 + 2c \text{tg} \phi I_1/3 + (a^2 \text{tg}^2 \phi - c^2) + \bar{\sigma}_z^2 = 0 \\ F &= -\frac{1}{9} \left(\frac{E}{1-2\mu} \right)^2 \text{tg}^2 \phi I'_{1e}{}^2 + \frac{2c}{3} \text{tg} \phi \frac{E}{1-2\mu} I'_{1e} + (a^2 \text{tg}^2 \phi - c^2) + \bar{\epsilon}_z^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

2) 抛物型

$$f = \frac{1}{3a} I_1 - \frac{d}{a} + \bar{\sigma}_z^2 = 0, \quad F = \frac{1}{3a} \left(\frac{E}{1-2\mu} \right) I'_{1e} - \frac{d}{a} + \bar{\epsilon}_z^2 = 0 \quad (2.16)$$

3) 椭圆型

$$\left. \begin{aligned} f &= \text{tg}^2 \phi [I_1^2/9 + 2(c \text{ctg} \phi - a) I_1/3 + c \text{ctg} \phi (c \text{ctg} \phi - 2a)] + \bar{\sigma}_z^2 = 0 \\ F &= \text{tg}^2 \phi \left[\frac{1}{9} \left(\frac{E}{1-2\mu} \right)^2 I'_{1e}{}^2 + \frac{2}{3} (c \text{ctg} \phi - a) \frac{E}{1-2\mu} I'_{1e} \right. \\ &\quad \left. + c \text{ctg} \phi (c \text{ctg} \phi - 2a) \right] + \bar{\epsilon}_z^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

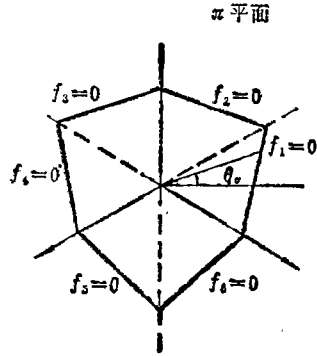


图 3

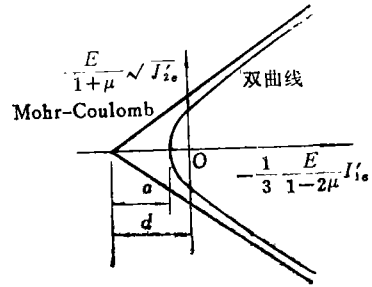


图 4

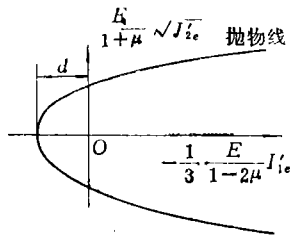


图 5

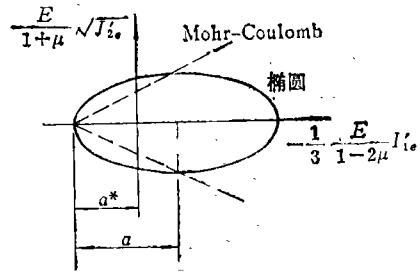


图 6

(七) Lade-Duncan 型

Lade 和 Duncan 通过实验提出一个无粘结力土的屈服准:

$$f = I_1^3 - kI_3 = 0$$

通过转换得

$$F = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{27}\right) \left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\right)^3 I'_{1e}{}^3 + \frac{1}{3} \frac{1+\mu}{1-2\mu} I'_{1e} J'_{2e} - J'_{3e} = 0 \quad (2.18)$$

式(2.18)是三次齐次式, 表示一个与图 7 相似的锥面.

(八) 指数型

为更好地反映土在高围压时的性态, 提出子午线为以 Mises 线为极限的指数曲线, 这里屈服线仍采用圆. 需要的话, 也可很方便地采用由 \$g(\theta)\$ 决定的屈服线.

$$\left. \begin{aligned} f &= \sqrt{J_2} - C + A \exp(BI_1) = 0 \\ F &= \frac{E}{1+\mu} \sqrt{J'_{2e}} - C + A \exp\left(\frac{E}{1-2\mu} BI'_{1e}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

其中 \$A, B, C\$ 为材料常数.

三、应变空间表述的弹塑性本构关系

本文采用由 Ильюшин 公设导出的加载准则^[1]:

$$L_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial \epsilon}\right)^T d\epsilon$$

\$L_2 > 0, L_2 = 0, L_2 < 0\$ 分别表示加载、中性卸载和卸载.

假定材料弹塑性不耦合, 屈服面上光滑点 (奇异点处本构关系见参考文献 [4]) 的弹塑性本构关系为:

$$d\sigma = \left[\mathbf{D} - \frac{H(L_2)}{A^2} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \right] d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

其中 $A_2 = - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial F}{\partial K_a} \left(\frac{\partial K_a}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right]$, $H(L) = \begin{cases} 1 & \text{当 } L > 0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } L \leq 0 \text{ 时} \end{cases}$

这里认为 F 为显含 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ 和 K_a 的函数, 即

$$F = F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, K_a) = 0$$

对于理想塑性材料, 将 $\frac{\partial F}{\partial K_a} = 0$ 和 $\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = - \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ 代入(3.1)得

$$d\sigma = \left[\mathbf{D} - \frac{H(L_2)}{A'_1} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \right] d\boldsymbol{\varepsilon}, \quad A'_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \mathbf{C} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.2)$$

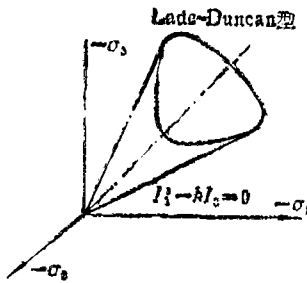


图 7

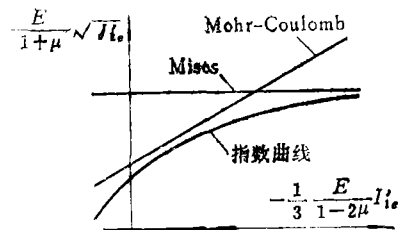


图 8

将应变屈服函数表为:

$$F = F(I'_{1e}, \sqrt{J'_{2e}}, J'_{3e})$$

对 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 求矢量导数, 得

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \beta_1 \frac{\partial I'_{1e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \beta_2 \frac{\partial \sqrt{J'_{2e}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} + \beta_3 \frac{\partial J'_{3e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.3)$$

其中 $\beta_1 = \frac{\partial F}{\partial I'_{1e}}$, $\beta_2 = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J'_{2e}}}$, $\beta_3 = \frac{\partial F}{\partial J'_{3e}}$

由 I'_{1e} 、 J'_{2e} 、 J'_{3e} 的定义可求得

$$\frac{\partial I'_{1e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]^T \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \sqrt{J'_{2e}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2\sqrt{J'_{2e}}} [e'_{11}, e'_{22}, e'_{33}, 2e'_{23}, 2e'_{31}, 2e'_{12}]^T \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial J'_{3e}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = [e'_{22}e'_{33} - (e'_{23})^2, e'_{33}e'_{11} - (e'_{31})^2, e'_{11}e'_{22} - (e'_{12})^2, 2(e'_{12}e'_{13} - e'_{11}e'_{23}), 2(e'_{21}e'_{23} - e'_{22}e'_{13}), 2(e'_{31}e'_{32} - e'_{33}e'_{12})]^T + J'_{2e}[1, 1, 1, 0, 0, 0]^T / 3 \quad (3.6)$$

有了系数 β_1 、 β_2 、 β_3 就可利用 (3.2) 和 (3.3) 求出本构关系具体形式。采用本文导出的十二种应变屈服准则, 求得结果见表 1。

对平面应变情形, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$, 我们约定将遇到的矩阵 (或矢量) 的第 3、4、5 行和 3、4、5 列去掉, 即可沿用上述理论和公式在简化的情况下进行计算。

表 1

	β_1	β_2	β_3
Mises 型	0	1	0
外角圆锥型	$\frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}} \frac{1+\mu}{(3-\sin \phi)} \frac{1+\mu}{1-2\mu}$	1	0
内角圆锥型	$\frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}} \frac{1+\mu}{(3+\sin \phi)} \frac{1+\mu}{1-2\mu}$	1	0
内切圆锥型	$\frac{\sin \phi}{\sqrt{9+3 \sin^2 \phi}} \frac{1+\mu}{1-2\mu}$	1	0
Tresca 型	0	$\cos \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \left[1 + \operatorname{tg} 3\theta_0^c \operatorname{tg} \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2J_2^c} \frac{\sin \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right)}{\cos 3\theta_0^c}$
广义 Tresca 型	$f_1 \frac{1+\mu}{1-2\mu}$	$\cos \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \left[1 + \operatorname{tg} 3\theta_0^c \operatorname{tg} \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right]$	$\frac{\sqrt{3}}{2J_2^c} \frac{\sin \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right)}{\cos 3\theta_0^c}$
Mohr-Coulomb 型	$\frac{1}{3} \sin \phi \frac{1+\mu}{1-2\mu}$	$\cos \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \left\{ 1 + \operatorname{tg} 3\theta_0^c \operatorname{tg} \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{3}} \sin \phi \left[\operatorname{tg} 3\theta_0^c - \operatorname{tg} \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right] \right\}$	$\frac{\sqrt{3}}{2J_2^c \cos 3\theta_0^c} \left[\sin \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{i-1}}{\sqrt{3}} \sin \phi \cos \left(\theta_0^c - \frac{i-1}{3} \pi \right) \right]$
双曲型	$\frac{-2 \operatorname{tg}^2 \phi}{9} \left(\frac{E}{1-2\mu} \right)^2 I_{1e} + \frac{2\sigma}{3} \operatorname{tg} \phi \frac{E}{1-2\mu}$	$\left(\frac{E}{1+\mu} \right)^2 \frac{\sqrt{J_2^c}}{K g(\theta_0^c)} \left[1 + K + 2(1-K) \sin 3\theta_0^c \right. \\ \left. + \alpha(1+5 \sin^2 3\theta_0^c) \right]$	$\left(\frac{E}{1+\mu} \right)^2 \frac{3\sqrt{3}}{2K g(\theta_0^c)} \frac{1}{\sqrt{J_2^c}} \left[1-K \right. \\ \left. + 2\alpha \sin 3\theta_0^c \right]$
抛物型	$\frac{1}{3a} \frac{E}{1-2\mu}$	同上	同上
椭圆型	$\operatorname{tg}^2 \phi \left[\frac{2}{9} \left(\frac{E}{1-2\mu} \right)^2 I_{1e} + \frac{2}{3} \frac{E}{1-2\mu} \right. \\ \left. \cdot (c \operatorname{ctg} \phi - a) \right]$	同上	同上
Lade-Duncan 型	$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2l} \right) \left(\frac{1+\mu}{1-2\mu} \right)^3 3I_1^2 + \frac{1}{3} \frac{1+\mu}{1-2\mu} J_2^2$	$\frac{2}{3} \frac{1+\mu}{1-2\mu} I_{1e} \sqrt{J_2^c}$	-1
指数型	$AB \frac{E}{1-2\mu} \exp \left[B \frac{E}{1-2\mu} I_{1e} \right]$	$\frac{E}{1+\mu}$	0

四、结 语

对具有非稳定性质的岩土类材料而言, 应变空间表述的弹塑性理论是更为合适的, 因而具有广泛的前景. 在进一步的研究中, 如建立硬化、软化和弹塑性耦合性质材料的本构关系时, 将体现出更多的优越性.

本文将应力屈服面转换为应变屈服面, 从而得到了应变空间表述的十二种屈服面及其弹塑性本构关系, 对理想塑性材料可供实际应用. 为解决岩土弹塑性问题提供了一种更合理的新途径. 本文表明后继应变屈服面是随动“强化”的, 但这并没有增大计算难度. 本文对建立应变空间表述的塑性理论进行了初步尝试, 将有助于对应变空间的进一步研究.

本文承俞茂铨副教授和陆美宝讲师的热情帮助, 特此致以深切谢意.

参 考 文 献

- [1] Dafalls, Y., *Elasto-plastic Coupling with a Thermodynamic Strain Space Formulation of Plasticity*, *Int. J. Nonlinear Mech.*, 12 (1977), 327—337.
- [2] 曲圣年、殷有泉, 塑性力学的 Drucker 公设和 Ильюшин 公设, *力学学报*, 5(1981), 465—473.
- [3] 殷有泉、曲圣年, 弹塑性耦合和广义正交法则, *力学学报*, 1(1982), 63—70.
- [4] 殷有泉、曲圣年, 岩石和混凝土一类材料的结构的有限单元分析中的本构关系, *北京大学学报*, 1(1981)37—46.
- [5] 王仁、殷有泉, 工程岩石类介质的弹性本构关系, *力学学报*, 4(1981), 317—325
- [6] Zienkiewicz, O. C., G. N. Pande, *Finite Elements in Geomechanics*, ed. by Gudehus, G., ASME, (1978), 179—190.
- [7] Zienkiewicz, O. C., C. Humpheson, *Viscoplasticity: A Generalized Model for Description of soil Behavior*, in *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, Ed. by C. S. Desai and J. T. Christian, (1977), 116—147.

Geotechnical Yield Criteria and Constitutive Relations in Strain Space

Chen Chang-an Zheng Ying-ren

(The Air Force College of Engineering, Xi'an)

Abstract

Based on Ilyushin's postulate, this paper deals with the necessity and features of researching the geotechnical elastoplastic theory in strain space. In the paper, we established the relations between stress invariants and elastic strain invariants, brought about the transformation from the stress yield surfaces into the strain yield surfaces derived and discussed the strain expressions from 12 yield criteria expressed by stress. By normality rule, we also derived 12 constitutive relations for ideal plastic materials associated with the above expressions. The results presented here can be applied to practice and are helpful to the study of the plastic theory in strain space.