

# 计算由源或偶极子多边形诱导的势函数的新方法\*

方 钟 圣

(中国船舶科学研究中心, 1984年3月24日收到)

### 摘 要

Hess 和 Smith<sup>[1]</sup> 在用源汇法解三维无升力势流问题时导得了源四边形的法向导速度的解析表达式, 其结果用设在该四边形上的局部坐标表示. 本文导出的源或偶极子多边形诱导势函数及法向导速度采用几何量表示, 是对他们的结果的替代和推广, 在实际计算时无需再作坐标变换和对  $\iint \frac{1}{r} dS$  等进行数值积分.

设在三维空间中的多边形  $\pi$  (例图 1 的  $ABCD$ ) 上布有等密度的源系, 其诱导的基本势函数为

$$\phi_{\pi}(P) = \iint_{\pi} \frac{1}{r(P, M)} dS_M \quad (1)$$

它沿某一方向  $l$  的导数 (速度) 是

$$\frac{\partial \phi_{\pi}(P)}{\partial l} = \iint_{\pi} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r(P, M)} \right) dS_M \quad (2)$$

其中  $l$  可与  $\pi$  无关或有关. 式 (2) 也可认为是方向为负  $l$  的偶极子多边形  $\pi$  所诱导的势函数. 下面如无混淆, 省写足标  $\pi$  或参考点  $P$  等.

对于  $l$  是  $\pi$  的单位负法向  $n_-( -n_1, -n_2, -n_3 )$  时,  $\frac{\partial \phi}{\partial n_-}$  可视为当点  $P$  不动, 而  $\pi$  上的  $M$  点沿正法向  $n_+( n_1, n_2, n_3 )$  运动时的  $\phi$  的方向导数, 亦即是习用的偶极子多边形所诱导的势.

令  $\overline{PQ}$  垂直于  $\pi$  所在的平面,  $Q$  是垂足, 构造三角形  $QAB, QBC, \dots, QDA$  并使  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$  的绕向是逆钟向 (图 1), 于是有

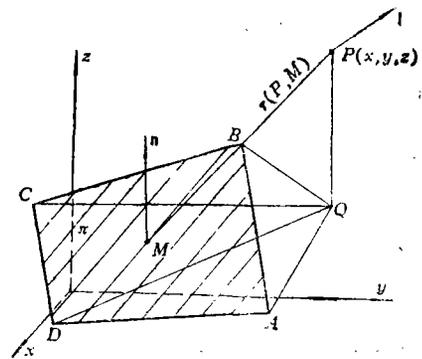


图 1

\* 何友声推荐.



其中  $a, b, h, d$  和  $\theta_0$  的含义与求法同前 (以下亦同)。

类似地,对三角形  $QBC, \dots, QDA$  上的积分也可求得相应的结果。当汇总代入至式 (3) 并对所有的  $\theta_0$  求和时,注意到当点  $Q$  落在凸多边形  $\pi$  之内时,每个三角形上积分贡献均为正,于是  $\sum_i (\theta_0)_i = 2\pi$  (图3情形),如点  $Q$  落在其某一边上则  $\sum_i (\theta_0)_i = \pi = 3.14159$ ,而当  $Q$  在多边形之外时则  $\sum_i (\theta_0)_i = 0$  (图1情形)。

而点  $Q$  是否落在  $\pi$  之内也可藉乘积

$$\prod_i [n \cdot (PP_i \wedge PP_{i+1})]$$

的符号来判定,其中点  $P_i$  是多边形  $\pi$  的第  $i$  个顶点,例如  $P_1 = A, P_2 = B, \dots, P_6 = A$ 。

(I) 其次,为求沿任意(单位)矢量  $l(l_1, l_2, l_3)$  的导数  $\frac{\partial \phi}{\partial l}$ ,把  $l$  分解为垂直于和平行于多边形  $\pi$  的分量  $l_n$  和  $l_{T_i}$  (图3)。于是

$$\frac{\partial \phi}{\partial l} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos(l, n) + \frac{\partial \phi}{\partial T_i} \cos(l, T_i) \quad (9)$$

这里  $T_i$  指  $l_{T_i}$  方向的单位矢量。

利用  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$  和上面就  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  导得的结果即得式 (9) 右端第一项。对其第二项,现假定点  $P$  沿方向  $T_i$  移动至  $P'$ ,同时令多边形  $\pi$  同步地平移至多边形  $\pi' (=A'B'C'D')$ ,易见  $\phi_\pi(P) = \phi_{\pi'}(P')$ ,即

$$\begin{aligned} \phi_{ABOD}(P) &= \phi_{A'B'O'D'}(P') \\ &= \phi_{ABOD}(P') + \phi_{A'B'BA}(P') + \phi_{BB'O'O}(P') - \phi_{DD'O'O'}(P') - \phi_{DAAD'}(P') \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_i} \approx \frac{\phi_{ABOD}(P') - \phi_{ABOD}(P)}{|\overline{PP'}|} = \frac{\phi_{DD'O'O'}(P') + \phi_{AA'D'D}(P') - \phi_{A'B'BA}(P') - \phi_{BB'O'O}(P')}{|\overline{PP'}|} \quad (10)$$

当  $|\overline{PP'}| \rightarrow 0$  时,式(10)右端的每一项有一极限。例如,

$$\frac{\phi_{A'B'BA}(P')}{|\overline{PP'}|} = \frac{\iint_{A'B'BA} \frac{dS_{M'}}{r(P',M')}}{|\overline{PP'}|} \rightarrow \frac{1}{r(P,M')} \times |\overline{AB}| \cos(T_i, n_{AB})$$

从而

$$\frac{\partial \phi}{\partial T_i} = - \sum_i \frac{1}{r(P, L_i)} |L_i| \cos(T_i, n_{L_i}) \quad (11)$$

其中  $\frac{1}{r(P, L_i)}$  或  $\frac{1}{r(P, M')}$  表示当点  $M'$  沿  $L_i$  移动时量  $\frac{1}{r(P, M')}$  的平均值,  $n_{L_i}$  是线段  $L_i$  的外

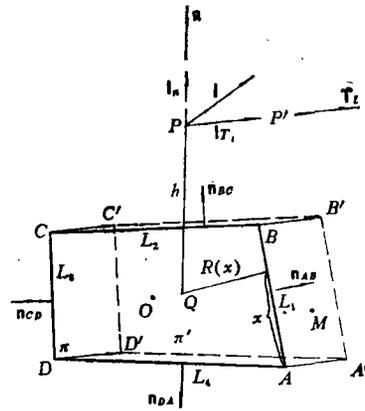


图 3

法线。例如,

$$L_1 = \overline{AB}$$

$$\begin{aligned} r(P, \overline{AB}) &= \frac{1}{|\overline{AB}|} \int_0^{|\overline{AB}|} \frac{dx}{\sqrt{h^2 + (R(x))^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{|\overline{AB}|} \ln \frac{(|\overline{AB}| + |\overline{BP}|)^2 - |\overline{AP}|^2}{|\overline{BP}|^2 - (|\overline{AB}| - |\overline{AP}|)^2} & \text{当 } |\overline{AB}| \neq ||\overline{AP}| - |\overline{BP}|| \\ \frac{1}{|\overline{AB}|} \left| \ln \frac{|\overline{AP}|}{|\overline{BP}|} \right| & \text{当 } |\overline{AB}| = ||\overline{AP}| - |\overline{BP}|| \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\cos(\mathbf{T}_l, \mathbf{n}_{AB}) = \frac{\mathbf{T}_l \cdot (\mathbf{AB} \wedge \mathbf{n})}{|\mathbf{T}_l| \cdot |\mathbf{AB} \wedge \mathbf{n}|} = \frac{\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix}}{\{[1 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})^2][|\overline{AB}|^2 - (\mathbf{AB} \cdot \mathbf{n})^2]\}^{1/2}} \quad (13)$$

在实际计算时, 有一个简单的规则以确定  $\frac{\partial \phi}{\partial T_l}$  的符号:

$$\text{如 } \cos(\mathbf{OP}, \mathbf{T}_l) \geq 0 \text{ 则 } \frac{\partial \phi}{\partial T_l} < 0, \text{ 反之 } \frac{\partial \phi}{\partial T_l} > 0 \quad (14)$$

其中  $O$  是多边形  $\pi$  的中心。

(II) 为求偶极子多边形诱导的法向速度, 需考虑下列表达式:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial \phi_\pi(P)}{\partial l} \right) = \frac{\partial}{\partial m} \left( \iint_\pi \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r(P, M)} \right) dS_M \right) \quad (15)$$

其中  $\mathbf{l}$  通常是  $\pi$  的法向  $\mathbf{n}$  (或严格地说是  $\mathbf{n}_\perp$ ),  $\mathbf{m}$  是点  $P$  所在面元的外法向 (单位矢量), 但下面仍按一般的  $\mathbf{l}$  来推导。

仿照在 (I) 中求算  $\frac{\partial \phi}{\partial l}$  的做法, 我们把  $\mathbf{m}$  也分解为平行于和垂直于多边形  $\pi$  的两个分量, 并记此时类似于  $\mathbf{T}_l$  的平行于  $\pi$  的单位矢量为  $\mathbf{T}_m$ , 即

$$\mathbf{T}_m = [\mathbf{m} - \mathbf{n} \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n})] / |\mathbf{m} - \mathbf{n} \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n})| \quad (16)$$

(图4), 同时对式(9)作类似的微导, 于是有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial l} \right) &= \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) + \frac{\partial \phi}{\partial T_l} \cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_l) \right] \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial T_m} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) + \frac{\partial \phi}{\partial T_l} \cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_l) \right] \cos(\mathbf{m}, \mathbf{T}_m) \\ &= \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n}) + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi}{\partial T_l} \right) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_l) \cos(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial T_m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) \cos(\mathbf{m}, \mathbf{T}_m) + \frac{\partial}{\partial T_m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial T_l} \right) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_l) \cos(\mathbf{m}, \mathbf{T}_m) \end{aligned} \quad (17)$$

藉助于式(3)、(11)以及  $\frac{\partial}{\partial T_m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial \phi}{\partial T_m} \right)$ , 上式右端四个二阶偏导数的计算可归结为

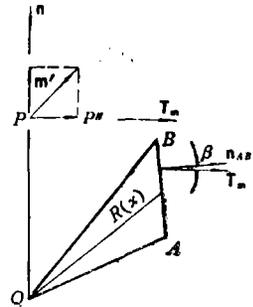


图 4

求算诸如  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial G}{\partial n} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(P, AB)} \right)$  和  $\frac{\partial}{\partial T_m} \left( \frac{1}{r(P, AB)} \right)$  三种基本量, 现分别列出其导算结果:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{\partial G}{\partial n} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left( \int_0^{\theta_0} d\theta \int_0^{a(\theta)} \frac{r dr}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right) \\ &= \frac{2d|AB|}{(|AP| + |BP|)^2 - |AB|^2} \left( \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|BP|} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(P, AB)} \right) &= \frac{1}{|AB|} \frac{\partial}{\partial h} \left( \ln \frac{|AP| + |BP| + |AB|}{|AP| + |BP| - |AB|} \right) \\ &= \frac{-2h}{(|AP| + |BP|)^2 - |AB|^2} \left( \frac{1}{|AP|} + \frac{1}{|BP|} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\partial}{\partial T_m} \left( \frac{1}{r(P, AB)} \right) = \frac{-2}{(|AP| + |BP|)^2 - |AB|^2} [\cos(\mathbf{AP}, \mathbf{T}_m) + \cos(\mathbf{BP}, \mathbf{T}_m)] \quad (20)$$

事实上, 由结果②和③可推得下列更一般的对任意方向  $\mathbf{m}$  成立的表达式:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{1}{r(P, AB)} \right) = \frac{-2}{(|AP| + |BP|)^2 - |AB|^2} [\cos(\mathbf{AP}, \mathbf{m}) + \cos(\mathbf{BP}, \mathbf{m})] \quad (21)$$

因此, 可利用式(11)和(21)直接计算  $\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial \phi}{\partial T_i} \right) \cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_i)$  而毋需分开计算式(17)中的二、四两项. 特别地, 对于通常的偶极子多边形势, 式(15)中的  $\mathbf{l}$  被取为  $\pi$  的法向  $\mathbf{n}_\perp$ , 故  $\cos(\mathbf{l}, \mathbf{T}_i) = 0$ , 从而求算其诱导速度的式(17)只需考虑其右端的一、三两项, 所涉及的二阶偏导数可藉式(18)和(19)算得, 而计算第三项时的另一因子  $\cos(\mathbf{T}_m, \mathbf{n}_{AB})$  (图4) 则可仿式(13)得到.

利用本文方法可进一步对多极子多边形的诱导势导出相应的结果.

感谢何友声教授有益的讨论, 使工作引向深入.

### 参 考 文 献

[1] Hess, J. L. and A. M. O. Smith, Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies, *Jour. Ship Research*, **8**, (1964)

## A New Method for Calculating the Fundamental Potential Functions Induced by a Source/Dipole Polygon

Fang Zhong-sheng

*(China Ship Scientific Research Center, Shanghai)*

### Abstract

In dealing with calculation of the normal polygon velocity induced by a source polygon there was a known result derived by Hess and Smith in terms of local coordinates of the polygon's corners and the point to be considered under a coordinate axis system located in the polygon. The present method in terms of their global coordinates is an alternative and extension to it. Hence, there is no need to transform coordinates of points and integrate  $\iint \frac{1}{r} dS$ , etc. numerically in the calculation.