应用数学和力学　第6卷第7期（1985年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

最小多项式矩阵与线性多变量系统(Ⅰ)*

黄　琳　　于年才

（北京大学力学系，1984年5月2日收到）

摘　要

本文分为两部分：（Ⅰ）为关于最小多项式矩阵的理论；（Ⅱ）为最小多项式矩阵理论在线性多变量系统中的应用。

在（Ⅰ）中，我们给出了线性变换在向量组的消失多项式矩阵与最小多项式矩阵的概念，给出了不变子空间的生成组与最小生成组的概念。在讨论了这些概念的基本性质之后，我们研究了它们与线性变换在任何不变子空间上诱导算子对应的特征矩阵之间的关系，给出了向量组的最小多项式矩阵类的特征，并给出了有相同生成空间的生成组之间的充分必要条件。利用这些结果，对于给定的矩阵A，给出了能使系统$\dot{x}=Ax+Bu$完全可控的矩阵B的全体的集合的表达式。

在线性代数理论中，从来把空间相对线性算子所作的空间分解（互质分解与循环分解）视为线性代数，特别是线性变换理论的核心。在空间分解的几何理论中，线性变换在一向量及其在一子空间的最小多项式的概念在分析与论证中起到了重要的作用[1,2,3]。

对于一个子空间说来，线性变换在其上的最小多项式所起的消失作用不是针对子空间中的不同向量，而是针对子空间整体而言。因此一线性变换在一子空间的最小多项式本身并不能提供此变换在此子空间的具体结构的全部信息。在本文的（Ⅰ）中，利用一个线性算子在一向量组的最小多项式矩阵的概念和性质及不变子空间相对于线性算子的最小生成组的概念和性质，我们得到了线性代数中关于线性变换的一些有趣的结论，这些结果对于现今的线性系统理论无疑是有益的。

近年来，对于由常系数线性微分方程描述的受控系统，其描述方法分为两大类，即状态空间型和多项式矩阵型[4,5]。前者便于进行理论分析，特别是可以有效地利用几何方法。利用这种方法，我们可以得到大量有益的结果，诸如可控性与可观测性；干扰的解耦和输出的镇定；跟踪和调节理论；鲁棒控制与二次型最优等。而后者由于其与经典控制理论有着某种密切的联系，故其对工程分析和设计是很方便的，而且我们可以把经典调节理论的方法有效地应用到线性多变量控制系统中。对于这两种描述方法的等价性，已经有了不少工作，例如[5,6]。在本文（Ⅱ）中，我们利用生成组与最小多项式矩阵的概念，建立了这两种描述方法之间的等价关系与严格等价关系，从而为研究线性系统提供了理论上的方便。

在下面的行文中，我们将用$\mathbf{C}^n(\mathbf{R}^n)$表示$n$维复（实）向量空间，用$\mathbf{C}^{m\times n}(\mathbf{R}^{m\times n})$表示所有$m\times n$复（实）矩阵的集合。复（实）数域上的多项式环用$\mathbf{C}[\lambda]$（$\mathbf{R}[\lambda]$）表示；类似地，所有

* 朱照宣推荐.
本文的主要结果曾在系统与控制会议（1984年5月，北京）上报告

$m\times n$复（实）多项式矩阵的集合用$\mathbf{C}[\lambda]^{m\times n}(\mathbf{R}[\lambda]^{m\times n})$表示．如果复(实)矩阵$A\in\mathbf{C}^{m\times n}(\mathbf{R}^{m\times n})$，且其秩为$r$，则表示为$A\in\mathbf{C}_r^{m\times n}(\mathbf{R}^{m\times n})$．

对于$A\in\mathbf{C}^{m\times n}$，$\mathbf{R}(A)$表示$A$的列空间，即$\mathbf{R}(A)=\{y\,|\,y=Ax,\ \forall x\in\mathbf{C}^n\}$；$\mathbf{N}(A)$表$A$的核或化零空间，即$\mathbf{N}(A)=\{x\,|\,Ax=0\}$．

对于多项式$\varphi(\lambda)$，符号$\deg\varphi(\lambda)$表示$\varphi(\lambda)$的次数．对于矩阵A．$\det A$表示A的行列式．

一、关于最小多项式矩阵

首先，对给定的线性变换$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$和向量$f\in\mathbf{C}^n$，我们采用$f\sigma$来表示$Af$，即

$$f\sigma\triangleq Af \tag{1.1}$$

于是，对任意$\varphi(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]$，我们有

$$f\varphi(\sigma)=\varphi(A)f \tag{1.2}$$

由此可知，对任意向量组$(f_1,f_2,\cdots,f_s)$，符号

$$(f_1,f_2,\cdots,f_s)P(\sigma) \tag{1.3}$$

将有明确的意义，其中$P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times m}$为任一多项式矩阵．显然，等式

$$(f_1,f_2,\cdots,f_s)P(\sigma)=0 \tag{1.4}$$

将等价于

$$P^T(A)(f_1,f_2,\cdots,f_s)^T=0 \tag{1.5}$$

其中T表示矩阵的转置．

定义1.1 对给定的向量组$f_1,f_2,\cdots,f_s\in\mathbf{C}^n$和矩阵$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$；非奇异多项式矩阵$Q(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$称为$A$在向量组$f_1,f_2,\cdots,f_s$的消失多项式矩阵（简记为a.p.m.）系指其满足等式

$$(f_1,f_2,\cdots,f_s)Q(\sigma)=0 \tag{1.6}$$

如果$P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$满足(1.6)式，且对任一满足(1.6)式的$Q(\lambda)$均有

$$\deg(\det P(\lambda))\leqslant\deg(\det Q(\lambda)) \tag{1.7}$$

则称$P(\lambda)$是A在$f_1,f_2,\cdots,f_s$的最小多项式矩阵（简记为m.p.m.）．

以下在讨论矩阵A在向量组的消失多项式矩阵或最小多项式矩阵时，总假定其非奇异．

定义1.2 $P(\lambda),Q(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{m\times n}$称为等价的，系指存在两个单模态矩阵$M(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{m\times m}$及$N(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{n\times n}$，使得

$$P(\lambda)=M(\lambda)Q(\lambda)N(\lambda) \tag{1.8}$$

如果$N(\lambda)=I_n$，则称$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$是行等价的．类似地，如果$M(\lambda)=I_m$，则称$P(\lambda)$，$Q(\lambda)$是列等价的．

多项式矩阵称为单模态矩阵系指其行列式的非零常数．

引理1.1 设$M(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$是单模态矩阵，则对任意$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，矩阵$M(A)\in\mathbf{C}^{sn\times sn}$是非奇异的，且其行列式为与$A$无关的非零常数．

设$F=(f_1,f_2,\cdots,f_s)\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$s\leqslant n$，$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，我们用符号

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{R}(F,AF,\cdots,A^{n-1}F) \tag{1.9}$$

表示$\mathbf{R}(F)$经A循环作用生成的子空间．显然，它是A的不变子空间，即

$$A(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)\subset\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle \tag{1.10}$$

事实上，正如我们在线性多变量系统理论中所见到的那样，$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$就是系统$\dot{x}=Ax+Fu$的可控子空间．

如果我们取向量组

$$(f_1,f_2,\cdots,\ f_s,Af_1,\cdots,Af_s,\cdots,A^{n-1}f_1,\cdots,A^{n-1}f_s) \tag{1.11}$$

则子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$由其张成。我们可以选取一组非负整数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和由它决定的(1.11)的部分组，加以重新排列得到一新的向量组：

$$(f_1,Af_1,\cdots,A^{\alpha_1-1}f_1,\ f_2,\cdots A^{\alpha_2-1}f_2,\cdots,f_s,\cdots,A^{\alpha_s-1}f_s) \tag{1.12}$$

使得

1° $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s=m=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)$ (1.13)

2° 向量组(1.12)是线性无关的。

显然，这意味着向量组(1.12)是$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的一组基。

现在让我们考虑向量组（它可以包含对应$\alpha_i=0$的向量f_i）

$$A^{\alpha_1}f_1,A^{\alpha_2}f_2,\cdots,A^{\alpha_s}f_s \tag{1.14}$$

显然，它们可经向量组(1.12)线性表出，易知，这等价于这样一个事实：存在多项式$\varphi_{ij}(\lambda)$ $(i,j=1,2,\cdots,s)$使得

$$A^{\alpha_i}f_i=\varphi_{1i}(A)f_1+\varphi_{2i}(A)f_2+\cdots+\varphi_{si}(A)f_s \tag{1.15}$$

其中

$$\deg(\varphi_{ij}(\lambda))\leqslant\alpha_i-1 \qquad (i,j=1,2,\cdots,s) \tag{1.16}$$

并且如果$\deg(\varphi_{ij}(\lambda))<0$,则意味着$\varphi_{ij}(\lambda)\equiv0$。

由记号(1.3)，我们可以把(1.15)式写成

$$(f_1,f_2,\cdots,f_s)(\mathrm{diag}(\sigma^{\alpha_1},\sigma^{\alpha_2},\cdots,\sigma^{\alpha_s})-\Phi(\sigma))=0 \tag{1.17}$$

其中

$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(\lambda) & \varphi_{12}(\lambda) & \cdots & \varphi_{1s}(\lambda)\\ \varphi_{21}(\lambda) & \varphi_{22}(\lambda) & \cdots & \varphi_{2s}(\lambda)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_{s1}(\lambda) & \varphi_{s2}(\lambda) & \cdots & \varphi_{ss}(\lambda)\end{pmatrix}$$

令

$$P(\lambda)=\mathrm{diag}(\lambda^{\alpha_1},\lambda^{\alpha_2},\cdots,\lambda^{\alpha_s})-\Phi(\lambda)$$

易知，$P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$是非奇异多项式矩阵，并且其同一行元素中，非对角元的次数都不超过对角元的次数减1。

因为(1.17)式可以写成

$$(f_1,f_2,\cdots,f_s)P(\sigma)=0$$

我们可以得出结论，$P(\lambda)$是A在向量组$(f_1,f_2,\cdots,f_s)$的消失多项式矩阵。

对于非负整数α_j可能有两种情况。如果$\alpha_j=0$，则(1.15)式可以写成

$$f_j=\varphi_{1j}(A)f_1+\varphi_{2j}(A)f_2+\cdots+\varphi_{sj}(A)f_s$$

其中多项式$\varphi_{1j}(\lambda)$，$\varphi_{2j}(\lambda)$，…，$\varphi_{sj}(\lambda)$是常数（零或非零），则$P(\lambda)$的第j列中，对角元是1，其余元是常数，而在$P(\lambda)$的第j行中，除了对角元外全为零。如果$\alpha_j\neq0$，既然$\deg(\varphi_{ij}(\lambda))\leqslant\alpha_i-1$，我们可以把$\varphi_{ij}(\lambda)$表示成

$$\varphi_{ij}(\lambda)=a_{ij}{}^{(\alpha_i-1)}\lambda^{\alpha_i-1}+\cdots+a_{ij}{}^{(1)}\lambda+a_{ij}{}^{(0)} \tag{1.18}$$

其中$a_{ij}^{(k)}$是复常数。

下面我们把根据上述法则构成的多项式矩阵$P(\lambda)$称为A在向量组$f_1,f_2,\cdots,f_s$(简记为F)的自然多项式矩阵（简记为n.p.m.)。

例1.1 考虑向量组(1.11)，依次去掉可经其前面的向量线性表出的那些向量，并重新排列，我们可以得到一非负整数组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s=m=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)$$

及向量组

$$f_1,Af_1,\cdots,A^{\beta_1-1}f_1,f_2,\cdots,A^{\beta_2-1}f_2,\cdots,f_s,\cdots,A^{\beta_s-1}f_s$$

它们组成$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的一组基。由此，我们可以构成$A$在$F$的n.p.m.$P_1(\lambda)$，它可以表示为

$$P_1(\lambda)=\operatorname{diag}(\lambda^{\beta_1},\lambda^{\beta_2},\cdots,\lambda^{\beta_s})-\Phi_1(\lambda)$$

如果我们用$\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda)$表示$\Phi_1(\lambda)$的元素，我们可以断定这些多项式的次数满足下列不等式

$$\deg(\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda))\leqslant\beta_j \qquad (i<j)$$
$$\deg(\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda))\leqslant\beta_j-1 \qquad (i\geqslant j)$$
$$\deg(\tilde{\varphi}_{ij}(\lambda))\leqslant\beta_i-1 \qquad (\forall i,j=1,2,\cdots,s)$$

例1.2 让我们考虑向量组

$$f_1,Af_1,\cdots,A^{n-1}f_1,f_2,Af_2,\cdots,A^{n-1}f_2,\cdots,f_s,Af_s,\cdots,A^{n-1}f_s \tag{1.19}$$

依次去掉能够经其前面的向量线性表示出的那些向量，保留下来的向量

$$f_1,Af_1,\cdots,A^{\gamma_1-1}f_1,f_2,\cdots,A^{\gamma_2-1}f_2,\cdots,f_s,\cdots,A^{\gamma_s-1}f_s$$

可以组成$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的一组基，并且容易证明

$$\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_s=m=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)$$

由此，我们也可以构成A在F的一个n.p.m. $P_2(\lambda)$，

$$P_2(\lambda)=\operatorname{diag}(\lambda^{\gamma_1},\lambda^{\gamma_2},\cdots,\lambda^{\gamma_s})-\Phi_2(\lambda)$$

并且可以得到关于$\Phi_2(\lambda)$的元素的次数所满足的不等式。

一般说来，对给定的$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$及$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$A$在$F$的n.p.m.由于构造方式的不同而不同。于是，$A$在$F$的所有n.p.m.的全体构成一个多项式矩阵的集合。由于方程

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_s=m$$

仅有有限组非负整数解，可知A在F的n.p.m.集合是一有限集。

定理1.1 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n},F\in\mathbf{C}^{n\times s}$

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n \tag{1.20}$$

$P(\lambda)$是A在F的任一n.p.m.，则有

$$(\lambda I_n-A)\leftrightarrow\begin{pmatrix}I_{n-s} & 0\\ 0 & P(\lambda)\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

其中符号$\leftrightarrow$表示两多项式矩阵等价。

证明 假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中有$s-l$个为零，用$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_l$，依次表示其中非零的数，令

$$T=(T_1,T_2,\cdots,T_l)$$

其中$T_j=(f_j,Af_j,\cdots,A^{\beta_j-1}f_j)$。显然，$T$是非奇异矩阵。如果我们对$A$用$T$作相似变换，则有

$$AT=T\tilde{A}$$

其中$\tilde{A}$可以写成块状形式

$$
\left.\begin{array}{l}
\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1l}\\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tilde{A}_{l1} & \tilde{A}_{l2} & \cdots & \tilde{A}_{ll}\end{pmatrix},\tilde{A}_{ij}\in\mathbf{C}^{\beta_i\times\beta_j}\\
\tilde{A}_{ii}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii}^{(0)}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{ii}^{(1)}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{ii}^{(2)}\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{ij}^{(\beta_i-1)}\end{pmatrix}\\
\tilde{A}_{ij}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}^{(0)}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}^{(1)}\\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ij}^{(\beta_i-1)}\end{pmatrix}\qquad (j\neq i)
\end{array}\right\}\tag{1.22}
$$

容易看到，$a_{ij}^{(k)}$是(1.18)式中多项式的系数．由于A与$\tilde{A}$相似，我们有

$$
\lambda I_n-A\backsimeq\lambda I_n-\tilde{A}=\begin{pmatrix}\lambda I_{\beta_1}-\tilde{A}_{11} & -\tilde{A}_{12} & \cdots & -\tilde{A}_{1l}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\tilde{A}_{l1} & -\tilde{A}_{l2} & \cdots & \lambda I_{\beta_l}-\tilde{A}_{ll}\end{pmatrix}\tag{1.23}
$$

设$\tilde{M}(\lambda)=\mathrm{diag}(M_1(\lambda),M_2(\lambda),\cdots,M_l(\lambda))$，其中

$$
M_i(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -I_{\beta_i-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{\beta_i-1}\\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & \lambda^{\beta_i-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}
$$

$M_i(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{\beta_i\times\beta_i}$．显然$\tilde{M}(\lambda)$是单模态矩阵，且

$$
\left.\begin{array}{l}
M_i(\lambda)(\lambda I_{\beta_i}-\tilde{A}_{ii})=\begin{pmatrix}0 & \lambda^{\beta_i}-\varphi_{ii}(\lambda)\\ I_{\beta_i-1} & X\end{pmatrix}\\
M_i(\lambda)(-\tilde{A}_{ij})=\begin{pmatrix}0 & -\varphi_{ij}(\lambda)\\ 0 & X\end{pmatrix}\qquad (i\neq j)
\end{array}\right\}\tag{1.24}
$$

其中X是无需写出的$(\beta_i-1)\times 1$多项式矩阵，$\lambda^{\beta_i}-\varphi_{ii}(\lambda)$，$-\varphi_{ij}(\lambda)$是n.p.m.$P(\lambda)$的相应的元素．于是用$\tilde{M}(\lambda)$左乘$(\lambda I_n-\tilde{A})$就得到

$$
\tilde{M}(\lambda)(\lambda I_n-\tilde{A})=\begin{pmatrix}M_1(\lambda)(\lambda I_{\beta_1}-\tilde{A}_{11}) & \cdots & -M_1(\lambda)\tilde{A}_{1l}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ -M_l(\lambda)\tilde{A}_{l1} & \cdots & M_l(\lambda)(\lambda I_{\beta_l}-\tilde{A}_{ll})\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{\beta_1}-\varphi_{11}(\lambda) & \cdots & 0 & -\varphi_{1l}(\lambda) \\ I_{\beta_1-1} & X & \cdots & 0 & X \\ & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & -\varphi_{l1}(\lambda) & \cdots & 0 & \lambda^{\beta_l}-\varphi_{ll}(\lambda) \\ 0 & X & \cdots & I_{\beta_l-1} & X \end{pmatrix} \tag{1.25}
$$

现在，我们把$\tilde{M}(\lambda)(\lambda I_n-\tilde{A})$的第1，$\beta_1+1$，$\cdots\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{l-1}+1$行依次换至第$n-l+1$，$n-l+2$，$\cdots$，$n$行，然后把其第$\beta_1$，$\beta_1+\beta_2$，$\cdots$，$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{l-1}$列依次换至第$n-l+1$，$n-l+2$，$\cdots$，$n-1$列，可得

$$
\tilde{M}(\lambda)(\lambda I_n-\tilde{A}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_{n-l} & \tilde{U}(\lambda) \\ 0 & P_1(\lambda) \end{pmatrix}
$$

即存在单模态矩阵$\tilde{M}_1(\lambda)$，$\tilde{N}_1(\lambda)$，使得

$$
\tilde{M}_1(\lambda)\tilde{M}(\lambda)(\lambda I_n-\tilde{A})\tilde{N}_1(\lambda)= \begin{pmatrix} I_{n-l} & \tilde{U}(\lambda) \\ 0 & P_1(\lambda) \end{pmatrix}
$$

又令 $\tilde{N}(\lambda)= \begin{pmatrix} I_{n-l} & -\tilde{U}(\lambda) \\ 0 & I_l \end{pmatrix}$

于是得
$$
\tilde{M}_1(\lambda)\tilde{M}(\lambda)(\lambda I_n-\tilde{A})\tilde{N}_1(\lambda)\tilde{N}(\lambda)= \begin{pmatrix} I_{n-l} & 0 \\ 0 & P_1(\lambda) \end{pmatrix}
$$

其中$n-l\geqslant n-s$，$P_1(\lambda)$是$P(\lambda)$去掉对角元为1的行和列而得到的。因此易知通过适当的行和列初等变换可得

$$
\begin{pmatrix} I_{n-l} & 0 \\ 0 & P_1(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}
$$

简言之，我们有

$$
(\lambda I_n-A) \leftrightarrow (\lambda I_n-\tilde{A}) \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_{n-l} & 0 \\ 0 & P_1(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}
$$

定理1.1得证。

推论1.1 在定理1.1的条件下，A在F的n.p.m. $P(\lambda)$与(λI_n-A)有相同的非零次不变因子和初等因子。

如果$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$是$\mathbf{C}^n$的真子空间，即$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle\neq\mathbf{C}^n$，我们有另一重要结果。

定理1.2 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，且$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$是$\mathbf{C}^n$的真子空间，$A_1$是$A$的诱导算子在$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的某一基下的矩阵，即有$G\in\mathbf{C}^{n\times m}_m$，使$AG=GA_1$且$\mathbf{R}(G)=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$，则$A$在$F$的任一n.p.m.$P(\lambda)$，总有关系式

$$
\begin{pmatrix} I_{m-s} & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda I_m-A_1
$$

其中$m=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)$

对给定的矩阵$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，在许多问题中，我们常常对把$\lambda I_n-A$化成Smith标准形感兴趣，但当$n$很大时，这通常需要冗长繁琐的计算。如果我们选取适当的$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$s<n$，$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^n$，由于$A$在$F$的n.p.m.$P(\lambda)$的阶数通常比$n$要小得多，利用$P(\lambda)$来求$\lambda I_n-A$的Smith标准形可使计算简化。举例如下。

例 1.3 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{pmatrix}$，$f_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$f_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$F=(f_1,f_2)$

则有
$$T=(f_1,Af_1,f_2,Af_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 15 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$
具 $\operatorname{rank} T=4$，从而 $\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^4$。

由于 $A^2f_1=(-3,8,-16,-32)^T$， $A^2f_2=(2,-8,8,21)^T$

我们有
$$A^2f_1=-\frac{3}{5}f_1-\frac{8}{5}Af_1+\frac{4}{5}f_2+\frac{4}{5}Af_2,\quad A^2f_2=-\frac{1}{5}f_1-\frac{1}{5}Af_1-\frac{7}{5}f_2-\frac{12}{5}Af_2$$
由此可得
$$\Phi(\lambda)=\begin{pmatrix} -\frac{8}{5}\lambda-\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\lambda-\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5}\lambda+\frac{4}{5} & -\frac{12}{5}\lambda-\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$
和
$$P(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2+\frac{8}{5}\lambda+\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\lambda+\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5}\lambda-\frac{4}{5} & \lambda^2+\frac{12}{5}\lambda+\frac{7}{5} \end{pmatrix}=(\lambda+1)\begin{pmatrix} \lambda+\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \lambda+\frac{7}{5} \end{pmatrix}$$
令
$$M_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{5\lambda+3}{4} \end{pmatrix}$$
有
$$M_1(\lambda)P(\lambda)=(\lambda+1)\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \lambda+\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{5(\lambda+1)^2}{4} \end{pmatrix}$$
又令
$$N_1(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & \frac{5\lambda+7}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad N_2(\lambda)=\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
则有
$$M_1(\lambda)P(\lambda)N_1(\lambda)N_2(\lambda)=(\lambda+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$$
于是得到 λI_4-A 的Smith标准形为
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{pmatrix}$$

在下一节中，我们将说明，对给定的矩阵A，通过A在F的n.p.m.$P(\lambda)$可以得到A的不变子空间循环分解的生成元。

二、关于最小生成组

在这一节中，我们将用上述结果阐明线性变换在一向量组的最小多项式矩阵的存在性和唯一性，并讨论生成组和最小生成组的某些性质。容易看出，这些结果对于研究线性变换及将其应用于线性多变量系统的理论是有益的。

引理2.1 设$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$，则对任意可右乘$P(\lambda)$的多项式矩阵$R(\lambda)$，均有

$$FP(\sigma)=0\Rightarrow FP(\sigma)R(\sigma)=0 \tag{2.1}$$

定义2.1 $F,G\in\mathbf{C}^{n\times s}$称为在$A$的作用下等效系指存在单模态矩阵$M(\lambda)$，使得

$$F=GM(\sigma) \tag{2.2}$$

显然，向量组的等效关系是代数上的一个典型等价关系，因为它满足自反性，对称性和可传性。

定义2.2 $F\in\mathbf{C}^{n\times s}$称为子空间$\mathbf{S}$关于$A$的生成组(或简称为$\mathbf{S}$的生成组)系指$\mathbf{S}=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$具最小列数的生成组称为最小生成组。

定理2.1 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F$，$G\in\mathbf{C}^{n\times s}$，如果$F,G$在$A$的作用下等效，则

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle \tag{2.3}$$

证明 由定理的条件知，存在单模态矩阵$M(\lambda)$，使得$F=GM(\sigma)$，则

$$\mathbf{R}(F)\subset\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$$

但子空间$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$是$A$的下变子空间，于是有

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle\subset\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$$

同理有

$$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle\subset\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$$

于是(2.3)式成立。

定理2.2 设$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}^n$是子空间，则$\mathbf{S}$是$A$的不变子空间当且仅当存在$F$为$\mathbf{S}$的关于$A$的生成组。

引理2.2 设$M(\lambda)$是单模态矩阵，$P(\lambda)=Q(\lambda)M(\lambda)$（即$P(\lambda)$与$Q(\lambda)$是列等价的），则对任意$F$均有

$$FP(\sigma)=0\Leftrightarrow FQ(\sigma)=0 \tag{2.4}$$

引理2.3 如果$S(\lambda)=\mathrm{diag}(\psi_1(\lambda),\psi_2(\lambda),\cdots,\psi_s(\lambda))$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，满足以下条件：

$$1^\circ\quad \sum_{i=1}^{s}\deg\psi_i(\lambda)=\sum_{i=1}^{s}\pi_i=m=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle) \tag{2.5}$$

$$2^\circ\quad FS(\sigma)=0$$

则向量组f_1，Af_1，$\cdots,A^{\pi_1-1}f_1,f_2,\cdots,A^{\pi_2-1}f_2,\cdots,f_s,\cdots,A^{\pi_s-1}f_s$组成子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的一组基。如果有$\deg\psi_i(\lambda)=0$，则对应的$f_i$不出现在基向量组中。

证明 由条件2°，可有

$$0=f_i\psi_i(\sigma)\triangleq\psi_i(A)f_i\qquad(\forall i=1,2,\cdots,s)$$

即$\psi_i(\lambda)$是A在f_i的消失多项式。设$\varphi_i(\lambda)$是A在f_i的最小多项式，则

$$\alpha_i=\deg\varphi_i(\lambda)\leqslant\deg\psi_i(\lambda)=\pi_i$$

且 $$\varphi_i(A)f_i=0 \qquad (\forall i=1,2,\cdots,s)$$

在此情况下，我们可有

$$A^{\nu}f_i\in \operatorname{span}(f_i,Af_i,\cdots,A^{\alpha_i-1}f_i) \qquad (\forall i=1,2,\cdots,s;\nu\geqslant 0)$$

于是子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$将满足

$$\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)\leqslant\sum_{i=1}^{s}\alpha_i\leqslant\sum_{i=1}^{s}\pi_i$$

由此和条件1°，我们有

$$\pi_i=\alpha_i \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

且可断定向量组$f_1,Af_1,\cdots,A^{\pi_1-1}f_1,\cdots,f_s,\cdots,A^{\pi_s-1}f_s$组成子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的一组基。

引理2.4 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$S(\lambda)$具有引理2.3的条件，$Q(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$是非奇异的且$FQ(\sigma)=0$，则$S(\lambda)$必是$Q(\lambda)$的左因子。

证明 设$Q(\lambda)$的元素为$\kappa_{ij}(\lambda)$，由多项式的带余除法定理可有

$$\kappa_{ij}(\lambda)=\psi_i(\lambda)\eta_{ij}(\lambda)+\varphi_{ij}(\lambda) \qquad (i,j=1,2,\cdots,s)$$

其中$\varphi_{ij}(\lambda)=0$或$\varepsilon_{ij}=\deg\varphi_{ij}(\lambda)<\pi_i$。

记$H(\lambda)=(\eta_{ij}(\lambda))$，$\Phi(\lambda)=(\varphi_{ij}(\lambda))$，则有

$$Q(\lambda)=S(\lambda)H(\lambda)+\Phi(\lambda)$$

从而有

$$0=FQ(\sigma)=FS(\sigma)H(\sigma)+F\Phi(\sigma)=F\Phi(\sigma)$$

即

$$f_1\varphi_{1j}(\sigma)+f_2\varphi_{2j}(\sigma)+\cdots+f_s\varphi_{sj}(\sigma)=0 \qquad (\forall j=1,\cdots,s)$$

如果有一个$\varphi_{ij}(\lambda)\neq 0$，则向量组

$$f_1,Af_1,\cdots,A^{\varepsilon_{1j}-1}f_1,\cdots,f_s,\cdots,A^{\varepsilon_{sj}-1}f_s \tag{2.6}$$

是线性相关的。但由于$\varepsilon_{ij}<\pi_i$，可知向量组(2.6)是基向量组的部分组，它必是线性无关的。由此可断定$\varphi_{ij}(\lambda)=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,s)$或$\Phi(\lambda)=0$，即

$$Q(\lambda)=S(\lambda)H(\lambda)$$

定理2.3 对给定的$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，设$P(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$是$A$在$F$的n.p.m. 且假定$Q(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{s\times s}$满足

$$FQ(\sigma)=0 \tag{2.7}$$

则必存在多项式矩阵$H(\lambda)$，使得

$$Q(\lambda)=P(\lambda)H(\lambda)$$

证明 假定$P(\lambda)$的Smith标准形为$\tilde{S}(\lambda)$，即存在两个单模态矩阵$M(\lambda)$，$N(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)=M(\lambda)\tilde{S}(\lambda)N(\lambda) \tag{2.8}$$

其中 $\tilde{S}(\lambda)=\operatorname{diag}(I_\beta,\ S(\lambda))$，$S(\lambda)=\operatorname{diag}(\psi_1(\lambda),\psi_2(\lambda),\cdots,\psi_\tau(\lambda))$，$\deg\psi_i(\lambda)\geqslant 1$，$\psi_i(\lambda)|\psi_{i+1}(\lambda),i=1,2,\cdots,\tau-1$。

令$G=FM(\sigma)$，则$FP(\sigma)=0$与$FQ(\sigma)=0$分别等价于

$$G\tilde{S}(\sigma)N(\sigma)=0\text{与}GQ_1(\sigma)N(\sigma)=0 \tag{2.9}$$

其中 $Q_1(\lambda)=M^{-1}(\lambda)Q(\lambda)N^{-1}(\lambda)$。

显然，(2.9)式等价于

$$G\tilde{S}(\sigma)=0 \quad 与 GQ_1(\sigma)=0 \tag{2.10}$$

由于G和F在A的作用下等效，据定理2.1知

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$$

且$\deg(\det \tilde{S}(\lambda))=\deg(\det P(\lambda))=\dim(\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle)=\dim(\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle)$

易知，$\tilde{S}(\lambda)$，G，A及$Q_1(\lambda)$满足引理2.4的所有条件，因此存在$H_1(\lambda)$，使得

$$Q_1(\lambda)=\tilde{S}(\lambda)H_1(\lambda)$$

令 $H(\lambda)=N^{-1}(\lambda)H_1(\lambda)N(\lambda)$，则立即可得

$$Q(\lambda)=P(\lambda)H(\lambda) \tag{2.11}$$

定理2.3得证。

推论2.1 设$A,F,P(\lambda)$及$Q(\lambda)$由定理2.3给定，则

$$\det P(\lambda)\,|\,\det Q(\lambda) \tag{2.12}$$

$$\deg(\det P(\lambda))\leqslant\deg(\det Q(\lambda)) \tag{2.13}$$

由此可见A在F的n.p.m.是A在F的m.p.m..

推论2.2 A在F的最小多项式矩阵之间，允许只差一个右单模态矩阵因子。

这就是说，A在F的最小多项式矩阵是存在的，并且在只差一个右单模态矩阵因子的意义下也是唯一的。A在F的最小多项式矩阵的行列式的次数等于子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$的维数。

因为所有$s\times s$的单模态矩阵的集合是一无限集，因此，一般说来，对给定的$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$和$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$，$A$在$F$的所有最小多项式矩阵的集合也是无限集。一方面，$A$在$F$的所有n.p.m.是$A$在$F$的m.p.m.，但其逆命题不成立。而另一方面，对$A$在$F$的任一 m.p.m.$R(\lambda)$和$A$在$F$的任一n.p.m.$P(\lambda)$，我们总可以找到一个单模态矩阵$N(\lambda)$，使得$P(\lambda)=R(\lambda)N(\lambda)$。因此，一般在不特别说明的情况下，对$A$在$F$的n.p.m.的条件下成立的定理，均对$A$在$F$的m.p.m.的同样条件下也成立。

易知下面的引理成立。

引理2.5 如果$M(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{l\times s}$，$l<s$，有右逆多项式矩阵$N(\lambda)$，即$M(\lambda)N(\lambda)=I_l$，则存在多项式矩阵$\tilde{M}(\lambda)\in\mathbf{C}[\lambda]^{(s-l)\times s}$，使得 $\begin{pmatrix}M(\lambda)\\ \tilde{M}(\lambda)\end{pmatrix}$ 是单模态矩阵。同样，对任意具左逆多项式矩阵的$N(\lambda)$，存在多项式矩阵$\tilde{N}(\lambda)$，使得$(N(\lambda),\tilde{N}(\lambda))$是单模态矩阵。

定理2.4 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F\in\mathbf{C}^{n\times s}$及$A$在$F$的m.p.m.$P(\lambda)$，如果$P(\lambda)$的Smith标准形为$\tilde{S}(\lambda)=\operatorname{diag}(I_l,\ S(\lambda))$，其中$S(\lambda)=\operatorname{diag}(\psi_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda),\ \cdots,\ \psi_\tau(\lambda))$，$\psi_i(\lambda)|\psi_{i+1}(\lambda)$，$i=1,2,\cdots,\tau-1$，$\tau=s-l$，则存在矩阵$G=(0,G_2)$，它与$F$在$A$的作用下等效且$A$在$G$的n.p.m.是$\tilde{S}(\lambda)$，$\langle A|\mathbf{R}(G_2)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$，进而$G_2$是子空间$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$关于$A$的最小生成组。

证明 因为$\tilde{S}(\lambda)$是$P(\lambda)$的Smith标准形，则存在单模态矩阵$M(\lambda)$和$N(\lambda)$，使得$P(\lambda)=M(\lambda)\tilde{S}(\lambda)N(\lambda)$。令$G=FM(\sigma)$，易证$G\tilde{S}(\sigma)=0$。(见(2.10)式) 因此$\tilde{S}(\lambda)$是$A$在$G$的n.p.m.，即

$$G\tilde{S}(\sigma)=(G_1,G_2)\begin{pmatrix}I_l & 0\\ 0 & S(\sigma)\end{pmatrix}=0$$

由此可得$G_1=0$，$G_2S(\sigma)=0$，于是

$$G=(0,G_2),\langle A|\mathbf{R}(G_2)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$$

由于G_2的列数等于$P(\lambda)$的非零次不变因子的个数，即等于A在$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$上的诱导算子

的循环指数，所以G_2必是$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$关于$A$的最小生成组.

推论2.3 设$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}^n$是$A$的不变子空间，则$\mathbf{S}$关于$A$的最小生成组可按下列步骤求得：

1° 选取$\mathbf{S}$的任一生成组F；

2° 计算A在F的n.p.m.$P(\lambda)$；

3° 求出$P(\lambda)$的Smith标准形；

4° 利用定理2.4的方法求出最小生成组.

例2.1 考虑例1.3.如果取

$$G=(f_1,f_2)M_1^{-1}(\sigma)=(f_1,f_2)\begin{pmatrix}-\dfrac{5\sigma+3}{4} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\left(-\frac{3}{4}f_1-\frac{5}{4}Af_1+f_2,f_1\right)=(g_1,g_2)$$

则我们有

$$0=FP(\sigma)=FM_1^{-1}(\sigma)M_1(\sigma)P(\sigma)=GM_1(\sigma)P(\sigma)$$

等价于

$$0=GS(\sigma)=G\begin{pmatrix}\sigma+1 & 0\\ 0 & (\sigma+1)^3\end{pmatrix}$$

即$G=(g_1,g_2)$是$\mathbf{C}^4$关于A的最小生成组，而由

$$(A+I)g_1=0,\ (A+I)^3g_2=0$$

也可得出结论g_1,g_2是$\mathbf{C}^4$关于A的不变子空间循环分解的生成元.

推论2.4 设$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}^n$是$A$的任一不变子空间，$A$在$\mathbf{S}$上的诱导算子的循环指数是$t$，则存在$B\in\mathbf{C}^{n\times t}$，使得受控系统

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

的可控子空间是$\mathbf{S}$，即$\langle A|\mathbf{R}(B)\rangle=\mathbf{S}$.

这就是说，对任意$\mathbf{S}\subset\mathbf{C}^n$及给定的系统$\dot{x}=Ax+Bu$，如果$\mathbf{S}$是$A$的不变子空间，则存在$B$，它具有最小列数且使得系统的可控子空间是$\mathbf{S}$.

推论2.5 设$P(\lambda)$是A在F的m.p.m.，$P(\lambda)$的Smith标准形是$\tilde{S}(\lambda)=\mathrm{diag}\ (I_l,\ S(\lambda))$，则存在具左逆多项式矩阵的$N_1(\lambda)\in\mathbf{C}^{s\times t}$，$t=s-l$，使得$G=FN_1(\sigma)$是$\langle A|\mathbf{R}\ (F)\rangle$的最小生成组，并且$A$在$G$的n.p.m.是$S(\lambda)$.反之，如果$S$是$A$的不变子空间，$G$是$\mathbf{S}$关于$A$的最小生成组，$S(\lambda)=\mathrm{diag}(\psi_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda),\ \cdots,\ \psi_t(\lambda))$，$\psi_i(\lambda)|\psi_{i+1}(\lambda)$，$i=1,\ 2,\cdots,t-1$，它是$A$在$G$的n.p.m.，则对任意给定的、等价于$\tilde{S}(\lambda)=\mathrm{diag}(I_l,S(\lambda))$的多项式矩阵$P(\lambda)$，必有具右逆多项式矩阵的$M_1(\lambda)$，使得$F=GM_1(\sigma)$是$\mathbf{S}$的一个生成组，且$A$在$F$的m.p.m.可以是$P(\lambda)$.

由[7]，我们知道，如果$A_1\in\mathbf{C}^{m\times m}$的循环指数为$t$，则随机地选取$b_1,\ b_2,\cdots,\ b_t\in\mathbf{C}^m$，使得$\dim(\langle A|\mathbf{R}(b_1,\ b_2,\cdots,b_t)\rangle)=m$的概率为1.因此我们可以断言，当$\mathbf{S}$是$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$的不变子空间，且$A$在$\mathbf{S}$上的诱导算子的循环指数是$t$，则在$\mathbf{S}$中随机地选取向量组$g_1,g_2,\cdots,g_t,g_1,g_2,\cdots,g_t$是$\mathbf{S}$的最小生成组的概率为1.

现在，我们假定F，G都是同一不变子空间关于A的最小生成组.因为$\mathbf{R}(F)\subset\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$且$\mathbf{R}(G)\subset\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$，所以我们可找到两个多项式矩阵$M(\lambda)$与$N(\lambda)$，使得

$$F=GM(\sigma),\ G=FN(\sigma) \tag{2.14}$$

由此可有

$$F(I-N(\sigma)M(\sigma))=G(I-M(\sigma)N(\sigma))=0$$

如果$P(\lambda)$是A在F和G的m.p.m.，则存在两个多项式矩阵$H_1(\lambda)$，$H_2(\lambda)$，使得

$$I-N(\lambda)M(\lambda)=P(\lambda)H_1(\lambda),\ I-M(\lambda)N(\lambda)=P(\lambda)H_2(\lambda) \tag{2.15}$$

由此可得：

引理2.6 如果F和G同是A的不变子空间**S**的最小生成组，$P(\lambda)$是A在F和G的m.p.m. 则对(2.14)式中的$M(\lambda)$与$N(\lambda)$，两个矩阵对$P(\lambda)$与$M(\lambda)$，$P(\lambda)$与$N(\lambda)$是左互质的。

由于(2.15)式可以写成

$$P(\lambda)H_1(\lambda)+N(\lambda)M(\lambda)=I,\ P(\lambda)H_2(\lambda)+M(\lambda)N(\lambda)=I \tag{2.16}$$

引理2.6立即得到证明。

下面有趣的例子说明，即使$\mathbf{S}=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$，$F=GM(\sigma)$，但仍可表明$M(\lambda)$不是单模态的。

例2.2 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$F=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$G=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

容易验证

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle=\mathbf{C}^3=\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$$

$$F(\sigma+1)=AF+F=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=G$$

但不可能有$G=F\mu$，其中$0\neq\mu\in\mathbf{C}$，即从$G=FM(\sigma)$，不能够认定$M(\lambda)$是单模态矩阵。

（注 在$\mathbf{C}[\lambda]$中，单模态矩阵是非零复数.）

定理2.5 设$A\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$F$，$G\in\mathbf{C}^{n\times e}$，$G=FN(\sigma)$，$P(\lambda)$是$A$在$F$的m.p.m.，则

$$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle \tag{2.3}$$

当且仅当$N(\lambda)$与$P(\lambda)$左互质。

证明 仅当：由引理2.6知，这是显然的。

当：因为$P(\lambda)$与$N(\lambda)$左互质，则存在两多项式矩阵$X(\lambda)$，$Y(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)X(\lambda)+N(\lambda)Y(\lambda)=I$$

用F左乘等式两边得

$$FP(\sigma)X(\sigma)+FN(\sigma)Y(\sigma)=F$$

即 $F=GY(\sigma)$.从而知$\mathbf{R}(F)\subset\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$，既然$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle$是$A$的不变子空间，则有

$$\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle\subset\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle \tag{2.17}$$

又因为$G=FN(\sigma)$，同理可知，

$$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle\subset\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle \tag{2.18}$$

综合(2.17)、(2.18)式，可知

$$\langle A|\mathbf{R}(G)\rangle=\langle A|\mathbf{R}(F)\rangle$$

这个定理对线性多变量系统理论是有意义的。

定理2.6 如果控制系统

$$\dot{x}=Ax+B_1u,\ A\in\mathbf{C}^{n\times n},\ B_1\in\mathbf{C}^{n\times m} \tag{2.19}$$

是完全可控的，则使系统完全可控的所有矩阵B的集合可以表示为

$$\mathbf{B}=\{X\,|\,X=B_1M(\sigma),\ M(\lambda)\text{与}P(\lambda)\text{左互质}\} \tag{2.20}$$

其中$P(\lambda)$是A在B_1的m.p.m..

定理2.7 对于系统(2.19)，如果A的循环指数为k，$B_1\in\mathbf{C}^{n\times k}$使得$(A,B_1)$完全可控，则使$(A,B)$完全可控的所有矩阵$B$的集合可以表示为

$$\mathbf{B}=\{X\,|\,X\in\mathbf{C}^{n\times s},s\geqslant k,X=B_1M(\sigma),M(\lambda)\text{与}P(\lambda)\text{左互质}\}$$

其中$P(\lambda)$是A在B_1的m.p.m..

致谢 我们感谢系统科学所韩京清同志，他在1982年曾同本文第一作者一起谈到过关于最小多项式矩阵的设想。

参 考 文 献

[1] Гантмахер Ф.Р., *Теория Матриц*, Изд. «Наука», Москва(1966).
[2] 黄琳，《系统与控制理论中的线性代数》，科学出版社，北京(1983).
[3] Hoffman, K. and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall Inc.,Englewood Cliffs, N. J., U.S. A. (1971).
[4] Wonham,W.M.,*Linear Multivariable Control, A Geometric Approach*, Springer-Verlag, New York(1979).
[5] Rosenbrock,H.H.,*State-Space and Multivariable Theory*,Nelson.London(1970).
[6] 许可康、韩京清，线性时不变系统两种描述的等价性，系统科学与数学,3,3(1983).
[7] Hwang Ling, Generating element and controllability,*Proceeding of the Bilateral Meeting on Control Systems*,P.R.C.and U.S.A.Scientific Press,Beijing(1981).

Minimal Polynomial Matrix and Linear Multivariable System(Ⅰ)

Hwang Ling　　Yu Nian-cai

(*Department of Mechanics, Peking University, Beijing*)

Abstract

Part (Ⅰ) of this work is on the theory of minimal polynomial matrix and Part(II) on the applications of this theory to linear multivariable systems.

In Part(Ⅰ),concepts of annihilating polynomial matrix and the minimal polynomial matrix of a given linear transformation in a vector group are given and the concepts of the generating system and minimal generating system of an invariant subspace for a given linear transformation are given as well. After discussing the basic properties of these concepts the relations between them and the characteristic matrix corresponding to an induced operator of a given linear transformation in any of its invariant subspace are studied in detail. The characteristics of the minimal polynomial matrix for a given vector group and the necessary and sufficient condition for the two generating systems to have the same generating subspace is given. Using these results we can give the expression for the set of all B which makes the system $\dot{x}=Ax+Bu$ a complete controllable system for a given A.