应用数学和力学，第8卷第12期（1987年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线性流型上的变换函数Φ及广义的勾股定理*

谷 安 海

（郑州铝厂，1987年8月10日收到）**

摘 要

本文目的在于论述变换函数Φ[1]，外延勾股定理用于运算任意三角形边的平方长并研究其几何特征的实际应用问题.

一、引言及记号

由Volterra′s第二类积分方程可知子序列是

$$f_n=u+Kf_{n-1}=u+Ku+,\cdots,+K^{n-1}u+K^nf_0 \tag{1.1}$$

式中K是算子，f_0是初始函数，则$\{f_n\}$是一个序列空间.

若矢量空间是$g=\bigcap(f_i:i\in I)$并满足以下公理：

（1） g的一切元素运算满足加法交换律及乘法结合律.

（2） g中存在唯一的元e，则其逆元e^{-1}仍在g中.

那么就把g叫做一个代数. 在此意义上我们引用以下的记号和定义.

（3） 设$F(R$或$C)$是一个域. F^n表示一切n元组$(x_i:\forall x\in F,i\in I)$的集合并且满足

$$\left.\begin{array}{l} x(x_i)=x(x_i) \\ (x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)=X+Y \end{array}\right\} i\in I \tag{1.2}$$

其中$X+Y$(或$X-Y$）表示一切x_i+y_i的和集（或x_i-y_i的差集）. 则F^n就认为是F自身上的一个矢量空间.

（4） 若x_0是固定矢量而子空间是$Y\subset F^n$，则一切x_0+y_i(y_i跑遍Y）的和集就是一个变换子空间$x_0+Y\subset F^n$.

（5） 若一个流型是一个代数偶(W,σ)并简记$(\cdot,\cdot)$，其中W是矢量空间，而σ是W上的F^n双型并且有四种情形：

（a） 若$\sigma(a,b)=\sigma(b,a)$，$a,b\in W$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做对称流型.

（b） 若$\sigma(a,b)=-\sigma(b,a)$，$a,b\in W$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做斜对称流型.

（c） 若$\sigma(a,a)=0$，$a\in W$（亦即σ是交错型），则$(\cdot,\cdot)$就叫做辛流型.

（d） 最一般情况，若$\sigma(a,a)\neq0$或$|\sigma(a,b)|\neq|\sigma(b,a)|$不失双线型或一个半线型[3]的一般意义$a,b\in W$，则$(\cdot,\cdot)$就叫做非对称流型[4].

---

* 钱伟长推荐.

** 1984年4月18日第一次收到.

二、主 要 结 果

定义1 设V及V'是同一域F上的矢量空间．若V到V'的映射f满足

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad (\sum a_i)f=\sum(a_if)\\&(2)\quad (xa_i)f=x(a_if)\qquad i\in I\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中$\forall a_i\in V$，$x\in F$而$\forall a_if\in V'$，那么f就叫做线性同构．

引理1 设R是F上的矢量空间而U，V是R的子空间．若$f:F\to R$是一个线性同构，则下列二式成立：

$$f(x+y)=U,\ f(x-y)=V\tag{2.2}$$

证 由(1.1)知，F可以认为是F自身上的一维矢量空间．若$f(x)=p$及$f(y)=q(x,y\in F)$，则p，$q\in R$．因$p+q$及$p-q$在R中，就知$U\subset R$及$V\subset R$．证毕．

定义2 设R,R'是同一域F上的矢量空间，f是R到R'的映射而$\mathscr{L}(R,R')$表示一切R到R'线性映射的集合．若$R'=F$，则$\mathscr{L}(R,R')=\mathscr{L}(R,F)$就是$R$的对偶．

定义3 令$f\in\mathscr{L}(R,R')$而$g\in\mathscr{L}(R'R'')$，则映射的积就是$gf\in\mathscr{L}(R,R'')$．

若$R=R''$，则$\mathscr{L}(R,R)$就表示R上一切自同构的集合而gf就叫做变换函数Φ[1],[2],[4]．

定理1 设R,R'及R''是同一域F上的矢量空间，Φ是R到R''的满射而f,g分别是R到R'及R'到R''的映射．当且仅当$R''=R$，则知

$$\Phi=1/2\tag{2.3}$$

证 若$\mathscr{L}(F,R)\ni g:x,y\to u,v$是单射的，由(2.2)得

$$g:\ x+y\to g(x+y)=u,\ x-y\to g(x-y)=v\qquad (x,y\in F,\ u,v\in R)\tag{2.4}$$

在另一方面，若$\mathscr{L}(R,F)\ni f:u,v\Rightarrow x,y$是双射的，则$f$一定有逆．由$R''=R$及$\dim u+\dim v=\dim x+\dim y$则当$f$的广义逆是$2g$时，有

$$f:\ u+v\Rightarrow f(u+v)=x,\ u-v\Rightarrow f(u-v)=y\tag{2.5}$$

因此，$gf=\Phi=1/2$就是所要求的．证毕．

讨论

(a) 当$f=1$而$g=1/2$，则由(2.4)及(2.5)知

$$u_i=(x_i+y_i)/2=u_{i+1}/2,\ v_i=(x_i-y_i)/2=v_{i+1}/2\qquad i\in I\tag{2.6}$$

$$x_i=u_i+v_i,\ y_i=u_i-v_i\qquad i\in I\tag{2.7}$$

其几何意义就是：若原像x_i,y_i为一组斜交基，则像u_i,v_i就是一组仿射基（见图1）．

(b) 当$f=1/2$而$g=1$，由(2.4)，(2.5)就知：

$$x_i=(u_i+v_i)/2=x_{i+1}/2,\ y_i=(u_i-v_i)/2=y_{i+1}/2\qquad i\in I\tag{2.8}$$

$$u_i=x_i+y_i,\ v_i=x_i-y_i\qquad i\in I\tag{2.9}$$

其几何意义就是：若像集u_i，v_i为一组仿射坐标基，则存在一组斜交坐标基就是u_i,v_i的反演像（见图2）．

(c) 对于特别情况，若$f=g=1/\sqrt{2}$时，再由(2.4)、(2.5)知

$$x_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_i+v_i)=\frac{1}{\sqrt{2}}x_{i+1},\ y_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(u_i-v_i)=\frac{1}{\sqrt{2}}y_{i+1}\qquad i\in I\tag{2.10}$$

$$u_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i+y_i)=\frac{1}{\sqrt{2}}u_{i+1},\ v_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_i-y_i)=\frac{1}{\sqrt{2}}v_{i+1}\qquad i\in I\tag{2.11}$$

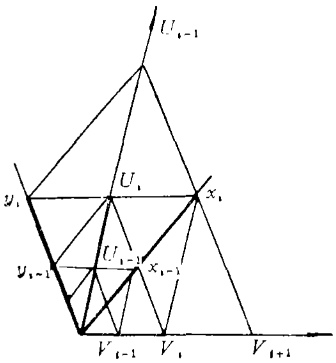

图 1

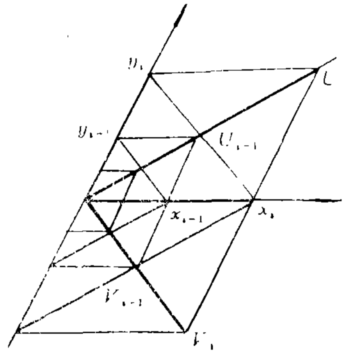

图 2

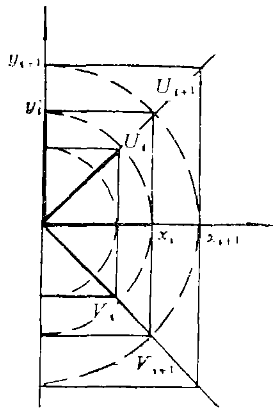

图 3

于是显然可知：$fg^{-1}=gf^{-1}=1$满足可逆变换的条件[5]。因此(2.10)，(2.11)仅仅给出u_i, v_i及x_i, y_i的正交变换关系，其几何描述可见图 3 所示。

定义4 设R是矢量空间而U，V为R的子空间。若关于U，V的范数比值记为：

$$e=\|u\|/\|v\| \qquad (u\in U, v\in V) \tag{2.12}$$

则称 e 为R上的形角函数（或系数）[1]。

定义5 若W是F上的矢量空间，σ是广义的F^n双型，则(W,σ)就是广义线性流型。

定理2 设代数偶(W,σ)是广义线性流型，Φ是$(\cdot,\cdot)$上的变换函数而U, V为 W 的子空间。若任意给定$x, y(x, y\in F)$及范数比值e，则$(\cdot,\cdot)$上的代数式是可解的：

$$V^2=\varphi(x^2+y^2),\ \varphi=2/(e^2+1);U^2=\psi(x^2+y^2),\psi=2e^2/(e^2+1) \tag{2.13}$$

证 设$x+y=u$，$x-y=v$，则由von Neumann's几何特征知

$$\{\|u\|^2+\|v\|^2\}/2=\|x\|^2+\|y\|^2 \tag{2.14}$$

若引用$e^2=\|u\|^2/\|v\|^2$，且令$\varphi=2/(e^2+1)$，$\psi=2e^2/(e^2+1)$，则定理显然。证毕。

讨论之一 由$U, V\subset W$，知$(U,\cdot)$，$(V,\cdot)\subset(W,\cdot)$，所以本定理的解释仅需讨论$\sigma$：

（a） 若σ是对称型，则$\sigma(a,b)=\sigma(b,a)$，$a, b\in W$，所以知$x^2+y^2=u^2=v^2$。因此定理满足对称流型$(\cdot,\cdot)$。

（b） 若σ是斜对称型，则$\sigma(a,b)=-\sigma(b,a), a, b\in W$，所以又知$x^2+y^2=u^2=v^2$。因此满足斜对称流型$(\cdot,\cdot)$。

（c） 若σ是交错型，则$\sigma(a,a)=0$，所以至少有一个$0\equiv\sigma(u,u)=\sigma(x,x)+\sigma(x,y)+\sigma(y,x)+\sigma(y,y)$，其含义就是$|\sigma(a,b)|=|\sigma(b,a)|=0$。所以本定理两边变奇。因此本定理满足辛流型$(\cdot,\cdot)$条件。

（d） 若σ是R^n或C^n上的一般双型（即双线型或一个半线型），则$\sigma(a,a)\neq 0$，或$|\sigma(a,b)|\neq|\sigma(b,a)|$，所以我们有：

$$\sigma(u,u)=\sigma(x,x)+\sigma(x,y)+\sigma(y,x)+\sigma(y,y)$$

$$\sigma(v,v)=\sigma(x,x)-\sigma(x,y)-\sigma(y,x)+\sigma(y,y)$$

而上述二式的相加恰巧给出了(2.14)式，因此仍然成立。所以本定理又满足非对称流型$(\cdot,\cdot)$条件。

讨论之二

（e） 当$e\neq 1$则$\Phi(\varphi\vee\psi)\neq 1$．对于任意仿射空间变换，即使积$U\times V$不是交换群，本定理也严格正确．事实上对于仿射空间，恒有$UV+VU\neq 0$．

（f） 当$e=1$则$\Phi(\varphi\vee\psi)=1$，变换仅对正交空间是正确的．因为正交的积$U\times V$是交换群$UV+VU=0$．因此，本定理退变为著名的勾股定理．

从本定理包含了一切对称的、斜对称的、交错的及非对称的一般线性情况的观点上说，我们就把它叫做广义的勾股定理．

例题 设四面体(P_0,P_1,P_2,P_3)是实仿射空间A^3上的三维奇异单型．求其变换$\Phi(\varphi)$．

解 设$P_0P_1=a,P_0P_2=b,P_0P_3=c$而$P_1P_2=p,P_2P_3=q$，$P_3P_1=r$．由(2.8a)知：
$a^2=\varphi_{1,2}(p^2+q^2)$，$b^2=\varphi_{2,3}(q^2+r^2)$，$c^2=\varphi_{3,1}(r^2+p^2)$．于是可知

$$\frac{a^2}{\varphi_{1,2}}+\frac{b^2}{\varphi_{2,3}}+\frac{c^2}{\varphi_{3,1}}=2(p^2+q^2+r^2) \tag{2.15}$$

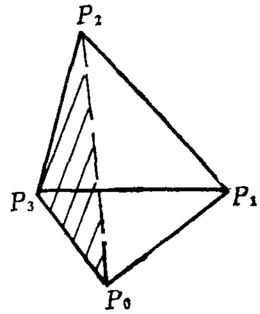

图 4

推论1 若$(P_0,\cdots,P_n)$是实仿射空间A^n上的n维奇异单形，其变换Φ就是

$$\frac{a^2}{\varphi_{1,2}}+\frac{b^2}{\varphi_{2,3}}+\frac{c^2}{\varphi_{3,4}}+,\cdots,+\frac{f^2}{\varphi_{n,1}}=2(p^2+q^2+r^2+,\cdots,+t^2) \tag{2.16}$$

特别，当$\varphi_{1,2}=\varphi_{2,3}=\cdots=\varphi_{n,1}=\varphi$时，则

$$a^2+b^2+c^2+,\cdots,+f^2=2\varphi(p^2+q^2+r^2+,\cdots,+t^2) \tag{2.17}$$

而当$\forall\varphi=1$，则对于正交空间有

$$a^2+b^2+c^2+,\cdots,+f^2=2(p^2+q^2+r^2+,\cdots,+t^2) \tag{2.18}$$

参 考 文 献

[1] 谷安海，关于"斜映射矩阵和Householder变换的推广"兼论变换函数Φ——与谭领同志商榷，东北工学院学报，3 (1983)，15—20.

[2] 谷安海，变换函数Φ及KUR空间存在固定点的条件，应用数学和力学，7,3 (1986)，273—277.

[3] Gruenberg, K. W. and A. J. Weir, *Linear Geometry*, Springer-Verlag, New York -Heiderberg-Berlin (1977), 2—121.

[4] 谷安海，结构的延拓及三斜结构系统的代数弹性运动的数学性质，应用数学和力学，8，10 (1987)，931—942.

[5] Deif, Assem S., *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers*, Abcus Press, Tubridge Wells and London, Halsted Press Division, John Wiley and Sons, New York and Toronto (1982), 158.

The Transformation Φ and General Pythagoras' Theorem on the Linear Manifold

Gu An-hai

(*Zhengzhou Aluminum Plant, Zhengzhou*)

Abstract

The primary aim of this paper is to describe the transformation function Φ[1], to extend the conclusion of Pythagoras' theorem for "squared length" of any triangle and to study some geometrical significance of its application.