

求弹性半平面问题基本解的 一个直接方法*

黄玉盈 尹雷方

(华中工学院) (洛阳工学院)

(钱伟长推荐, 1984年6月2日收到)

摘 要

本文利用镜像法^[2]和直接积分导出了弹性半平面问题的基本解。这个推导方法比 Gladwell^[6]用镜像法和富氏变换要直观。这个基本解对于用边界元法分析半平面域具有任意外形孔洞的应力集中问题将起着十分重要的作用。

一、引 言

分析弹性半平面域具有孔洞的应力集中问题是一个很有实际意义的问题。由于孔形和载荷的任意性, 它们的解, 采用经典的弹性力学方法是无法得到的。分析这类问题一个有效的数值方法是边界积分方程—边界元法。同有限单元法和有限差分法相比, 它有两点突出的优点: 第一, 由于边界元法仅限于域的边界进行离散, 待求的物理量只是边界位移或内力, 故未知数大大减少。特别是对于短边界大区域问题, 效果尤其显著。第二, 它引入了对应场算子方程的基本解, 故具有比较高的精度。

正如下面将要指出的, 边界积分方程中所含的核就是对应场方程的奇异解(或称基本解)。因此使用边界元法的先决条件就是事先要知道这个基本解。对于半平面问题, 由于它具有两条边界: 一条是无限长的直线边, 另一条是域内的孔边。如果现在仍采用全平面的基本解^[1], 那么这条无限长的直线边也需要剖分, 这就给计算增添了不少麻烦。但是若改用半平面对应场方程的基本解, 这时, 由于直线边的边界条件已得到满足, 故进行离散的仍然只是一条孔边边界。

我们现在取弹性半平面作为辅助场, 内部不带有任意孔洞, 在域内任一点沿 x 和 y 方向分别作用一个单位集中力(图4), 由此产生的位移场和应力场就是前面指出的基本解。Gladwell 在他的著作^[6]中, 用镜像法和富氏变换虽然已经求出了位移基本解, 但不直观,

* 1982年12月7日第一次收到。

而且没有给出应力解。Telles 和 Brebbia 在最近的一篇文章^[5]中给出了应力和位移的基本解，但没有任何推导过程。为此，本文想采用一种简便的方法——镜像法和直接积分，导出全部基本解。推导过程中，运用了简单的复变函数变换，巧妙地确定了几种不同类型的广义积分。

二、半平面问题的边界积分方程

关于边界元法的基本原理和方法，文献[1]中已有详尽的论述。这里为了能突出本文导出的基本解在边界元法中所起的作用，还是花一点篇幅，用 Betti 互易定理扼要说明一下半平面问题的边界积分方程。

让我们考虑一个各向同性的弹性半平面问题，域内有一个任意外形的孔洞，其边界线为 Γ ，其上作用着分布力 $P_1(s)$ 和 $P_2(s)$ (图 1)。为了确定域 Ω 内任一点 m 沿 x 方向和 y 方向的位移 u_1^m 和 u_2^m ，可以分别借助于两个辅助场：一个是在 m 点作用一单位竖力 (图 2(a))；另一个是在 m 点作用一单位水平力 (图 2(b))。如果它们的位移和内力能够求得的话，那么在相应位置挖去一块和

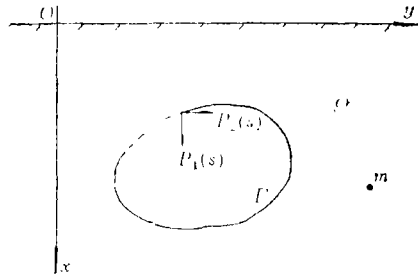
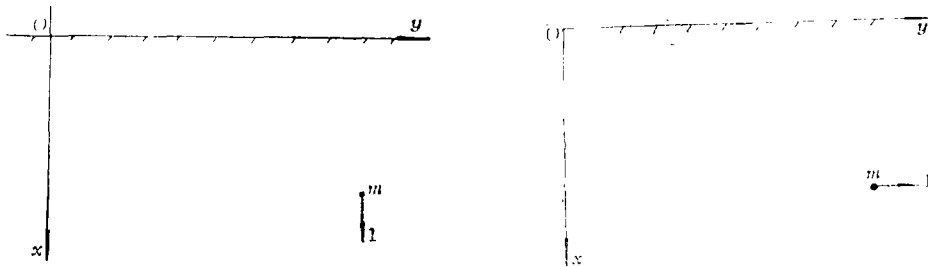


图 1



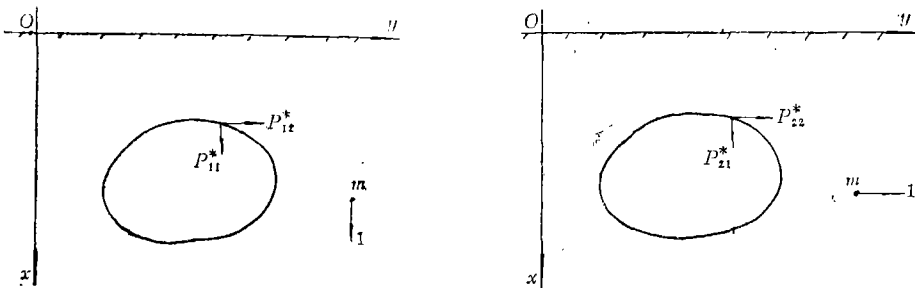
(a)

(b)

图 2

孔洞 Γ 外形完全一样的一部分以后，切割边界 Γ 上作用的外力和位移就能已知。设这些值分别为 P_{ij}^* 和 u_{ij}^* ($i, j=1, 2$) (图 3(a) 和 (b))。对于图 1 和图 3(a) 两个系统，利用 Betti 互易定理可得

$$u_1^m + \int_{\Gamma} P_{1k}^* \cdot u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k \cdot u_{1k}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{1k}^* d\Omega \quad (2.1a)$$



(a)

(b)

图 3

对于图 1 和图 3(b)两个系统, 同样可得

$$u_i^m + \int_{\Gamma} P_{ik}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega \quad (2.1b)$$

式中采用了 Einstein 求和约定; $b_k (k=1, 2)$ 表示图 1 中实际结构域 Ω 内作用的面分布力。对于现在给出的情况, $b_k=0$, 因此右端最后一项可以去掉。

(2.1) 式表明了域 Ω 内一点的位移和边界 Γ 上的位移值有着一定的关系。只要 u_k, P_k 的边界值一旦求出, 那么域内的位移场, 就可迎刃而解。

为了求出位移的边界值, 可将 m 点移至边界 Γ 上, 这样 (2.1) 式变为

$$c^l u_l^m + \int_{\Gamma} P_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} P_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega \quad (l=1, 2) \quad (2.2)$$

式中 c^l 是一个系数。如果 Γ 是光滑边界, $c^l=1/2$; 对于非光滑边界, c^l 值可参阅文献 [1] 介绍的方法确定。

(2.2) 式就是弹性半平面问题对应的边界积分方程。很明显, 只要给出弹性半平面问题的基本解, 那么上式中全部带 ‘*’ 号的物理量就为已知。另外, 由于待求函数 $u_k (k=1, 2)$ 是包含在边界积分号内, 因此, 如果通过对边界 Γ 的离散求弱解, (2.2) 式最后可化为一个线性代数方程组, 这时待求的就是离散点的位移边界值, 这就是边界元法的基本思想。

上述是对于在边界 Γ 上给定力值这一类边值问题而言的, 这完全是为了叙述上的方便。对于在边界 Γ 上给定位移或者一段边界给出力另一段边界给出位移等其它类型的边值问题, 运用方程 (2.2) 同样可以解决。

三、确定基本解的一个直接方法

我们置 Ox 轴通过单位力的作用点 $m(a, 0)$, 并设图 4(a) 情况下的应力和位移分别是 $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}, \sigma_{12}^{(1)}$ 和 $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$; 图 4(b) 情况下的应力和位移分别是 $\sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{22}^{(2)}, \sigma_{12}^{(2)}, u_1^{(2)}$ 和 $u_2^{(2)}$ 。下面针对平面应变问题导出这两种情况的这些分量。

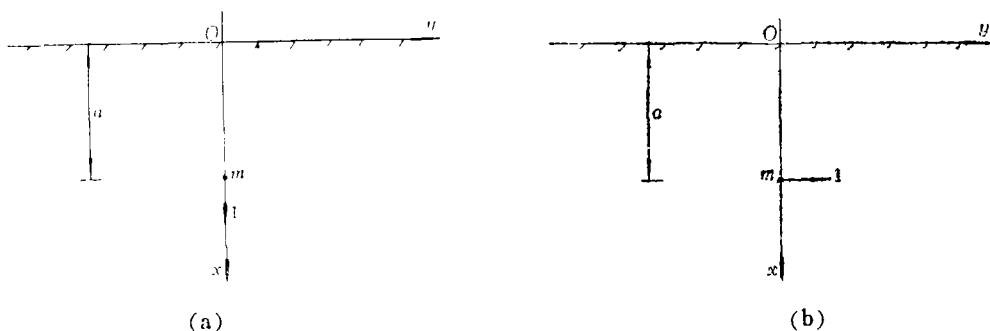


图 4

1. 应力基本解

对于图 4(a) 情况, 我们在 m 点的对称位置 m' 点加上一个同向的竖直单位力^[6] (图 5)。利用全平面的基本解, 这对竖直力在 $x \geq 0$ 域内引起的应力为^[1]

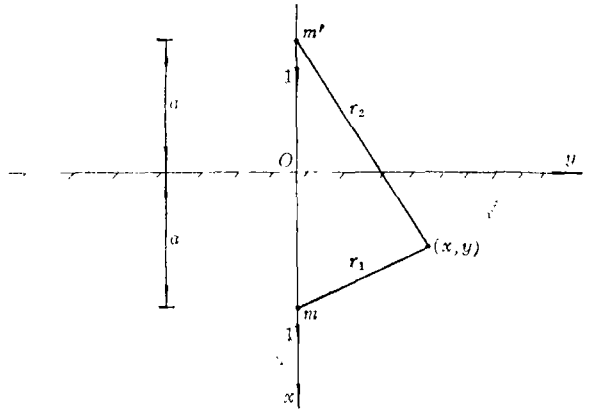


图 5

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(3)} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{x-a}{r_1^3} + \frac{x+a}{r_2^3} \right) + \frac{2(x-a)^3}{r_1^4} + \frac{2(x+a)^3}{r_2^4} \right] \\ \sigma_{22}^{(3)} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1+2\nu) \left(\frac{x-a}{r_1^3} + \frac{x+a}{r_2^3} \right) - \frac{2(x-a)^3}{r_1^4} - \frac{2(x+a)^3}{r_2^4} \right] \\ \sigma_{12}^{(3)} &= -\frac{y}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right) + \frac{2(x-a)^2}{r_1^4} + \frac{2(x+a)^2}{r_2^4} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中, $r_1 = [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$, $r_2 = [(x+a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}$.

根据载荷的反对称性, 显然在 $x=0$ 边界上有

$$\sigma_{11}^{(3)} = 0$$

和
$$\sigma_{12}^{(3)} = -\frac{y}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{a^2+y^2} + \frac{2a^2}{(a^2+y^2)^2} \right] \quad (3.2)$$

为了保证原来 $x=0$ 边界上的零应力条件, 必须迭加图 6 所示的应力场, 其中 $p(y)$ 和 (3.2) 式的 $\sigma_{12}^{(3)}$ 同值反向, 即

$$p(y) = -\frac{y}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{a^2+y^2} + \frac{2a^2}{(a^2+y^2)^2} \right]^{1)}$$

根据 Flamant 解答⁽³⁾, 图 7 所示的半平面问题, 对应的应力函数为

$$\phi_0(x, y) = \frac{x}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

因此, 图 6 情况的应力函数可写成

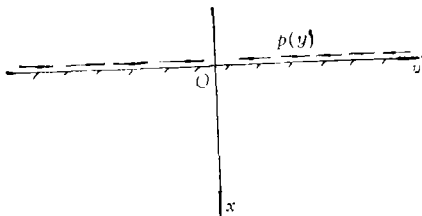


图 6

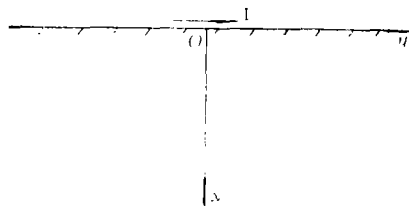


图 7

¹⁾ 这里注意 $\sigma_{12}^{(3)}$ 的正向和 $p(y)$ 的正向规定恰恰相反。

$$\phi(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{x}{\pi} \frac{\eta}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{1}{a^2 + \eta^2} + \frac{2a^2}{(a^2 + \eta^2)^2} \right] \arctg\left(\frac{y-\eta}{x}\right) d\eta \quad (3.3)$$

$$\text{记 } \phi_1(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{a^2 + \eta^2} \arctg \frac{y-\eta}{x} d\eta, \quad \phi_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{(a^2 + \eta^2)^2} \arctg \frac{y-\eta}{x} d\eta$$

这两个广义积分可求得如下:

$$\phi_1(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\eta}{a^2 + \eta^2} \left(\arctg \frac{y-\eta}{x} - \arctg \frac{y+\eta}{x} \right) d\eta$$

其中被积函数可看成是复变函数

$$\frac{\eta}{a^2 + \eta^2} [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)]$$

的虚部, 故有

$$\begin{aligned} V = \psi_1 + i\phi_1 &= \int_0^{\infty} \frac{\eta}{a^2 + \eta^2} [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)] d\eta \\ &= \int_0^{\infty} -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{a - i\eta} - \frac{1}{a + i\eta} \right) [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)] d\eta \end{aligned}$$

现考察 $V(z)$ 对 z 的导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \int_0^{\infty} -\frac{i}{2} \left(\frac{1}{a - i\eta} - \frac{1}{a + i\eta} \right) \left(\frac{1}{z - i\eta} - \frac{1}{z + i\eta} \right) d\eta \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{z-a} \left(\frac{i}{a-i\eta} - \frac{i}{z-i\eta} + \frac{i}{a+i\eta} - \frac{i}{z+i\eta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{z+a} \left(\frac{i}{a+i\eta} + \frac{i}{a-i\eta} + \frac{i}{z+i\eta} + \frac{i}{z-i\eta} \right) \right] d\eta \\ &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-a} \left(\ln \frac{a+i\eta}{a-i\eta} - \ln \frac{z+i\eta}{z-i\eta} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{z+a} \left(\ln \frac{a+i\eta}{a-i\eta} + \ln \frac{z+i\eta}{z-i\eta} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln \frac{a+i\eta}{a-i\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln \frac{z+i\eta}{z-i\eta} = \ln(-1) = i\pi$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{i\pi}{z+a}$$

则

$$V = i\pi \ln(z+a) = i\pi \left[\ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} + i \arctg \frac{y}{x+a} \right]$$

其虚部

$$\phi_1(x, y) = \pi \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \pi \ln r_2 \quad (3.4)$$

$$\text{其次 } \phi_2(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\eta}{(a^2 + \eta^2)^2} \left(\arctg \frac{y-\eta}{x} - \arctg \frac{y+\eta}{x} \right) d\eta$$

其中被积函数是复变函数

$$\frac{\eta}{(a^2 + \eta^2)^2} [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)]$$

的虚部。同理有

$$\begin{aligned} V' &= \phi_2 + i\phi_2 = \int_0^\infty \frac{\eta}{(a^2 + \eta^2)^2} [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)] d\eta \\ &= \int_0^\infty -\frac{i}{4a} \left[\frac{1}{(a - i\eta)^2} - \frac{1}{(a + i\eta)^2} \right] [\ln(z - i\eta) - \ln(z + i\eta)] d\eta \end{aligned}$$

通过同样的运算, 可得

$$\phi_2(x, y) = -\frac{\pi}{2a} \cdot \frac{(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} = -\frac{\pi}{2a} \cdot \frac{(x+a)}{r_2^2} \quad (3.5)$$

将(3.4)和(3.5)式代入(3.3)式, 得

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{ax(x+a)}{r_2^2} - (1-2\nu)x \ln r_2 \right]$$

这样就可确定图 6 的应力场

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(4)} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{x}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{2a(x+a)}{r_2^4} - \frac{8ay^2(x+a)}{r_2^6} + (1-2\nu) \frac{(x+a)^2 - y^2}{r_2^4} \right] \\ \sigma_{22}^{(4)} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[-\frac{2a}{r_2^2} + \frac{2a(5x+2a)(x+a)}{r_2^4} \right. \\ &\quad \left. - \frac{8ax(x+a)^3}{r_2^6} + (1-2\nu) \left(\frac{3x+2a}{r_2^2} - \frac{2x(x+a)^2}{r_2^4} \right) \right] \\ \sigma_{12}^{(4)} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2\pi(1-\nu)} \left[-\frac{4ax+2a^2}{r_2^4} + \frac{8ax(x+a)^2}{r_2^6} \right. \\ &\quad \left. - (1-2\nu) \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{2x^2+2ax}{r_2^4} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

很容易验证(3.6)式满足图 6 中 $x=0$ 边界上的应力边界条件。将(3.1)式和(3.6)式相加就得到了图 4(a) 情况下的应力基本解:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{x-a}{r_1^2} - \frac{x-a}{r_2^2} \right) + \frac{2(x-a)^3}{r_1^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x+a)[(3-4\nu)x^2 + 2(3-2\nu)ax + a^2] - 16axy^2(x+a)}{r_2^6} \right\} \\ \sigma_{22}^{(1)} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ (1+2\nu) \left(\frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right) - \frac{2(x-a)^3}{r_1^4} + \frac{6x(1-2\nu) - 8a\nu}{r_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x+a)[2ax(3+2\nu) - (3-4\nu)x^2 + 3a^2] - 16ax(x+a)^3}{r_2^6} \right\} \\ \sigma_{12}^{(1)} &= -\frac{y}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{2(x-a)^2}{r_1^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(3-4\nu)x^2 - 8\nu ax - 2a^2}{r_2^4} + \frac{16ax(x+a)^2}{r_2^6} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

对于图 4(b)情况, 我们在 m' 点加上一个反向的水平单位力 (图 8)。利用全平面的基本解和同样的步骤, 可以得到图 4(b)情况下的应力基本解:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(2)} &= -\frac{y}{4\pi(1-\nu)} \left[(1+2\nu) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) - \frac{2y^2}{r_1^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8x^2(1-\nu) + 4ax(3-2\nu) + 2y^2}{r_1^4} - \frac{16ax(x+a)^2}{r_2^4} \right] \\
 \sigma_{22}^{(2)} &= -\frac{y}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{2y^2}{r_1^4} + \frac{8(1-\nu)}{r_2^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8x^2(1-\nu) + 4ax(5-2\nu) + 8a^2 + 2y^2}{r_1^4} + \frac{16ax(x+a)^2}{r_2^4} \right] \\
 \sigma_{12}^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \left(\frac{x-a}{r_1^2} - \frac{x+a}{r_2^2} \right) + \frac{2y^2(x-a)}{r_1^4} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2xy^2(3-4\nu) + 4a(y^2+2ax)(1-\nu) + 2ax^2(3-2\nu) + 2a^3(1-2\nu)}{r_1^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16axy^2(x+a)}{r_2^4} \right]
 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

(3.7)和(3.8)式就是弹性半平面问题的应力基本解。

2. 位移基本解

对于图 4(a)情况求位移基本解, 为了分析方便, 在 m' 点加上一个反向的竖直单位力 (图9)。

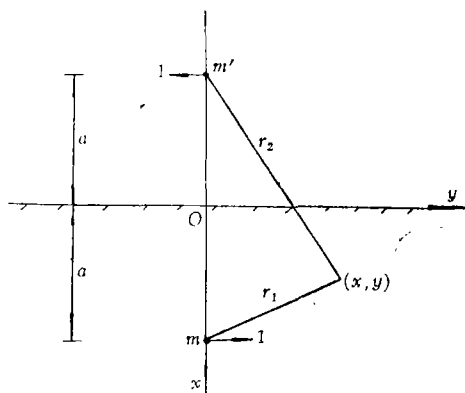


图 8

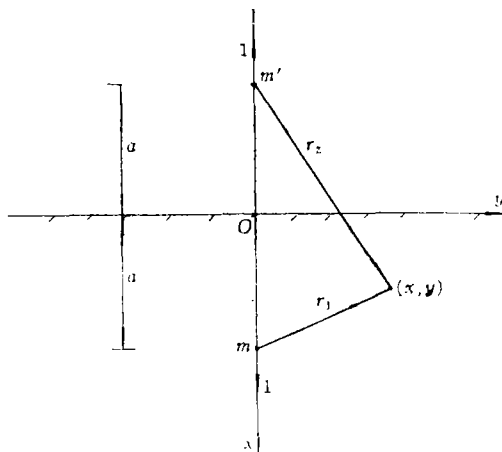


图 9

同理, 这时为了实现原直线边($x=0$)的零应力条件, 需要迭加上 $p(y)$ 的作用(图10)。其值为

$$p(y) = \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) \frac{a}{a^2+y^2} + \frac{2a^3}{(a^2+y^2)^2} \right]$$

根据 Flamant 解答, 图11所示半平面问题的位移场为

$$u_1 = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2} \right]$$

$$u_2 = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2(1-\nu)} \cdot \frac{xy}{x^2+y^2} \right]$$

因此图10情况的位移场可写成

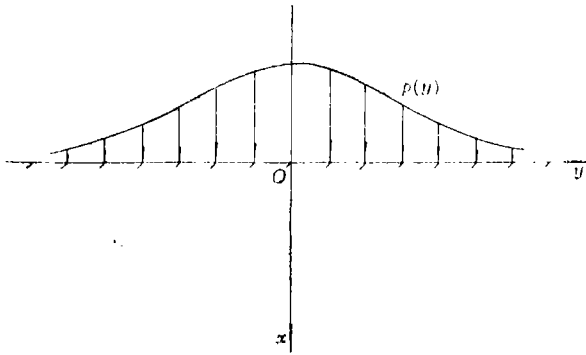


图 10

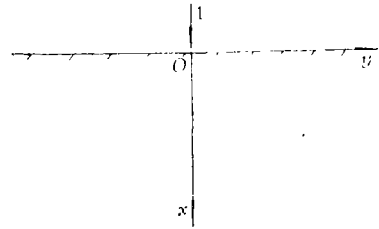


图 11

$$\left. \begin{aligned}
 u_1^{(6)} &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[\ln \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \right. \\
 &\quad \cdot \frac{(y-\eta)^2}{x^2 + (y-\eta)^2} \left. \right] \left[(1-2\nu) \frac{a}{a^2 + \eta^2} + \frac{2a^3}{(a^2 + \eta^2)^2} \right] d\eta \\
 u_2^{(6)} &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \cdot \frac{1}{2\pi(1-\nu)} \left[\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{arctg} \frac{y-\eta}{x} - \frac{1}{2(1-\nu)} \right. \\
 &\quad \cdot \frac{x(y-\eta)}{x^2 + (y-\eta)^2} \left. \right] \left[(1-2\nu) \frac{a}{a^2 + \eta^2} + \frac{2a^3}{(a^2 + \eta^2)^2} \right] d\eta
 \end{aligned} \right\} (3.9)$$

这里遇到的两个不同类型的广义积分 ϕ_1' , ϕ_2' 是

$$\begin{aligned}
 \phi_1'(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \eta^2} \ln \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} d\eta \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + \eta^2} \left[\ln \sqrt{x^2 + (y-\eta)^2} + \ln \sqrt{x^2 + (y+\eta)^2} \right] d\eta \\
 \phi_2'(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + \eta^2} \frac{(y-\eta)^2}{x^2 + (y-\eta)^2} d\eta \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + \eta^2} \left[\frac{(y-\eta)^2}{x^2 + (y-\eta)^2} + \frac{(y+\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2} \right] d\eta
 \end{aligned}$$

其中 ϕ_1' 的被积函数是复变函数

$$\frac{a}{a^2 + \eta^2} [\ln(z-i\eta) + \ln(z+i\eta)]$$

的实部, 则

$$\begin{aligned}
 V'' &= \phi_1' + i\phi_2' = \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + \eta^2} [\ln(z-i\eta) + \ln(z+i\eta)] d\eta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{a-i\eta} - \frac{1}{a+i\eta} \right) [\ln(z-i\eta) + \ln(z+i\eta)] d\eta = \pi \ln(z+a)
 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_1'(x, y) = \pi \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \pi \ln r_2$$

$$\phi_2'(x, y) = \pi - \frac{x}{2} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{a-i\eta} + \frac{1}{a+i\eta} \right) \left(\frac{1}{z-i\eta} + \frac{1}{z+i\eta} \right) \right] d\eta$$

$$= \pi \left[1 - \frac{x(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} \right]$$

将上述结果代入(3.9)式, 得

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(6)} &= -\frac{(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)E} \left\{ 4(1-\nu)^2 \ln r_2 + 2(1-\nu) \frac{y^2}{r_2^2} - \frac{ax[(x+a)^2 - y^2]}{r_1^2} \right\} \\ u_2^{(6)} &= -\frac{(1+\nu)}{2\pi(1-\nu)E} \left[2(1-\nu)(1-2\nu) \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} + (1-2\nu) \frac{ay}{r_1^2} \right. \\ &\quad \left. - 2(1-\nu) \frac{xy}{r_2^2} - \frac{2axy(x+a)}{r_1^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

再利用迭加原理, 就可得到图 4(a)情况的位移基本解,

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(1)} &= \frac{1+\nu}{\pi E} \left\{ 2(1-\nu) \ln \frac{1}{r_2} - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_2} + \frac{(x+a)^2}{r_1^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y^2}{4(1-\nu)} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) + \frac{ax}{2(1-\nu)} \left[\frac{2(x+a)^2}{r_1^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \right\} \\ u_2^{(1)} &= -\frac{1+\nu}{\pi E} \left\{ (1-2\nu) \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} + \frac{y}{r_2^2} \left[\frac{a(1-2\nu)}{2(1-\nu)} - x \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{axy(x+a)}{(1-\nu)r_1^2} - \frac{y}{4(1-\nu)} \left(\frac{x-a}{r_1^2} - \frac{x+a}{r_2^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

对于图 4(b)情况, 可以在 m' 点加上一个同向的水平单位力. 用完全相同的步骤, 可得到该情况下的位移基本解:

$$\left. \begin{aligned} u_1^{(2)} &= \frac{1+\nu}{\pi E} \left\{ \frac{y}{4(1-\nu)} \left(\frac{x-a}{r_1^2} + \frac{x+a}{r_2^2} \right) + (1-2\nu) \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y}{r_1^2} \left[a - \frac{(1-2\nu)x}{2(1-\nu)} \right] - \frac{axy(x+a)}{(1-\nu)r_1^2} \right\} \\ u_2^{(2)} &= -\frac{1+\nu}{\pi E} \left\{ \frac{(3-4\nu)}{4(1-\nu)} \ln r_1 r_2 - \frac{y^2}{4(1-\nu)} \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-2\nu)^2}{2(1-\nu)} \ln r_2 + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \frac{(x+a)^2}{r_1^2} - \frac{ax}{2(1-\nu)} \left[\frac{2(x+a)^2}{r_1^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

(3.11)和(3.12)式就是弹性半平面问题的位移基本解.

上述结果和文献[5]相比, 完全一样. 以上推导方法和 Gladwell 方法比较, 显然步骤直观, 概念清晰.

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press (1978), 139—145.
- [2] Brebbia, C. A., et al., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths (1980), 102—110.
- [3] Rekach, V. G., *Manual of the Theory of Elasticity*, Mir Publishers, Moscow (1979), 165—168.
- [4] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, 上海交通书店影印 (1951), 416—419.
- [5] Telles, J. C. F. and C. A. Brebbia, Boundary element solution for half-plane problem, *Int. J. of Solids and Structures*, 12 (1981).
- [6] Gladwell, G. M. L., *Contact Problem in the Classical Theory of Elasticity*, Germantown, Sijthoff and Noordhoff (1980), 230.

A Direct Method for Deriving Fundamental Solution of Half-Plane Problem

Huang Yu-ying

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Yin Lei-fang

(*Luoyang Institute of Technology, Luoyang*)

Abstract

A fundamental solution for half-plane problems which will play a key role in calculation of the stress concentration around a hole embedded in half-plane is derived by a method combining images with direct integrations. It is more intuitive than the Fourier transform method used by Gladwell^[6]. In addition, the principle and procedure of boundary element method to solve the half-plane problems are also presented by means of Betti's reciprocal theorem in this paper.

It is shown that the computing procedure for half-plane problems is much more convenient using the fundamental solution presented here than the one adopted by C. A. Brebbia^[1].