应用数学和力学，第8卷第12期（1987年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇异摄动问题的一类非完全指数拟合差分格式*

林鹏程　　孙光甫

（福州大学，1986年10月6日收到）

摘　　要

本文分析奇异摄动问题 $\varepsilon u''+a(x)u'-b(x)u=f(x)$，$0<x<1$，$u(0)$，$u(1)$ 给定，$\varepsilon\in(0,1]$，$a(x)>\alpha>0$，$b(x)\geqslant0$的一类非完全指数拟合差分格式一致收敛阶的充分条件，由此构造出二阶一致收敛的非完全指数拟合差分格式，最后给出数值结果。

一、引　　言

在研究奇异摄动问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u_\varepsilon(x)\equiv\varepsilon u''+a(x)u'-b(x)u=f(x), & 0<x<1 \\ u(0)=\beta_0, \qquad u(1)=\beta_1 \end{cases} \tag{1.1}$$

其中小参数 $\varepsilon\in(0,1]$，$a(x)>\alpha>0$，$b(x)\geqslant0$，$x\in[0,1]$ 的差分格式时，人们有时借助于问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon^1 u_\varepsilon(x)\equiv\varepsilon u''+a(x)u'=g(x), & 0<x<1 \\ u(0)=\beta_0, \qquad u(1)=\beta_1 \end{cases}$$

的指数拟合差分格式

$$R^h u_j=Q^h g_j, \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$
$$u_0=\beta_0, \qquad u_N=\beta_1$$

构造问题(1.1)相应的差分格式

$$\begin{cases} R^h u_j-Q^h(bu)_j=Q^h f_j & 1\leqslant j\leqslant N-1 \\ u_0=\beta_0, \qquad u_N=\beta_1 \end{cases}$$

我们称之为问题（1.1）的非完全指数拟合差分格式。近几年来，人们对这种类型的高阶一致收敛差分格式进行了初步的研究。Lorenz[1] 设计出一种非完全指数拟合差分格式，并对 $a(x)$ 为非零常数的情形，证明了格式的二阶一致收敛性，但当 $a(x)$ 为非常数时，未能得到理想的结论。我们将对$a(x)$为非常数时给出更细致的估计。Doolan，Miller和Schilders[2]曾

* 林宗池推荐。

推测另一差分格式为二阶一致收敛，我们将给予否定。然而，本文的主要目的在于分析包括上述两个差分格式在内的一类非完全指数拟合差分格式一致收敛阶的充分条件，从而构造出二阶一致收敛的差分格式。

为方便起见，我们认为$a(x)$，$b(x)$，$f(x)$为充分光滑函数。文章中凡与ε，h，x_j无关的正常数，不加说明时，一律用C表示。

二、极值原理

考察差分格式

$$\begin{cases} L^h u_j \equiv R^h u_j - Q^h(bu)_j = Q^h f_j, & 1\leqslant j\leqslant N-1 \\ u_0=\beta_0, \quad u_N=\beta_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

其中

$$R^h v_j \equiv \varepsilon h^{-2}(r_j^- v_{j-1} + r_j^c v_j + r_j^+ v_{j+1})$$

$$Q^h v_j \equiv q_j^- v_{j-1} + q_j^c v_j + q_j^+ v_{j+1}$$

$$r_j^- = r_j^-(\rho_j^-),\quad r_j^+ = r_j^+(\rho_j^+),\quad r_j^c = -r_j^- - r_j^+$$

$$q_j^- = q_j^-(\rho_j^-),\quad q_j^+ = q_j^+(\rho_j^+),\quad q_j^c = q_j^c(\rho_j^-,\ \rho_j^+)$$

$$\rho_j^- = h(\theta a_{j-1} + (1-\theta)a_j)/\varepsilon,\quad \rho_j^+ = h(\theta a_{j+1} + (1-\theta)a_j)/\varepsilon,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

$$r^-(\rho) = \frac{\rho\exp[-\rho]}{1-\exp[-\rho]},\quad r^-(0)=1;\quad r^+(\rho) = \frac{\rho}{1-\exp[-\rho]},\quad r^+(0)=1$$

$q^-(\rho)$，$q^+(\rho)$，$q^c(\rho_1,\rho_2)$是与$b(x)$无关的函数。

在下面的论述中，为不引起混淆，我们略去r_j^-，r_j^+等的下标j。

我们知道[3]函数$r^-(\rho)$，$r^+(\rho)\in C^\infty(R')$有如下性质

i） $r^-(\rho) = 1 - \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{12}\rho^2 + O(\rho^4)$，$r^+(\rho) = 1 + \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{12}\rho^2 + O(\rho^4)$ （2.2）

ii） 当$\rho\geqslant P$时（$P>0$为常数）

$$|D_\rho^{(i)} r^-(\rho)| \leqslant C\rho\exp[-\rho] \leqslant C\exp[-\rho/2],\qquad i=0,1,2$$

$$|r^+(\rho)| \leqslant C\rho,\qquad |D_\rho r^+(\rho)| \leqslant C \tag{2.3}$$

在下面的讨论中，我们假定

$$\left.\begin{aligned} &\text{i)}\ \ q^-\geqslant 0,\ q^+\geqslant 0,\ C\geqslant q^c\geqslant C_1\geqslant q^- + q^+ \\ &\text{ii)}\ \ \varepsilon h^{-2} r^- - b_{j-1} q^- > 0,\ \varepsilon h^{-2} r^+ - b_{j+1} q^+ > 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

极值原理 若$\{v_j\}$为网格函数，满足$L^h v_j\geqslant 0, 1\leqslant j\leqslant N-1$，$v_0\leqslant 0$，$v_N\leqslant 0$则$v_j\leqslant 0$，$0\leqslant j\leqslant N$。

证明 因为

$$L^h v_j \equiv (\varepsilon h^{-2} r^- - b_{j-1} q^-) v_{j-1} + (\varepsilon h^{-2} r^c - b_j q^c) v_j + (\varepsilon h^{-2} r^+ - b_{j+1} q^+) v_{j+1}$$

而 $b(x)\geqslant 0$，$q^-, q^+, q^c\geqslant 0$，$r^c = -r^- - r^+$

故 $-(\varepsilon h^{-2} r^c - b_j q^c) \geqslant (\varepsilon h^{-2} r^- - b_{j-1} q^-) + (\varepsilon h^{-2} r^+ - b_{j+1} q^+)$

又 $\varepsilon h^{-2} r^- - b_{j-1} q^- > 0$，$\varepsilon h^{-2} r^+ - b_{j+1} q^+ > 0$

这表明$-L^h$所对应的系数矩阵为M阵[4]故极值原理成立。

由极值原理立即可以得到

比较定理 设$\{v_j\}$，$\{V_j\}$均为网格函数，且$|L^h v_j|\leqslant L^h V_j$，$1\leqslant j\leqslant N-1$，$|v_0|\leqslant -V_0$，$|v_N|\leqslant -V_N$，则$|v_j|\leqslant -V_j$，$0\leqslant j\leqslant N$。

下面我们引入两个比较函数

引理2.1 网格函数$\varphi_j=-2-x_j$，对$h\leqslant C_1$(C_1为与ε无关的正常数)，满足

$$L^h\varphi_j\geqslant C,\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

证明 显然

$$L^h\varphi_j=R^h\varphi_j-Q^h(b\varphi)_j\geqslant R^h\varphi_j,\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

由(2.3)

$$r^-(\rho^-)=r^-(\rho)+O(h^2/\varepsilon),\quad r^+(\rho^+)=r^+(\rho)+O(h^2/\varepsilon)$$

故 $R^h\varphi_j=\varepsilon h^{-1}[-r^-(\rho^-)+r^+(\rho^+)]=a_j+O(h)$

从而，当h适当小时（如$h\leqslant C_1$时）

$$L^h\varphi_j\geqslant a>0,\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

证毕

注意到$L^h\psi_j\geqslant R^h\psi_j$，类似[3]引理5.4的证明，可以得到

引理2.2 网格函数$\psi_j=-\exp[-\beta x_j/\varepsilon]$，对$h\leqslant C_1$，$0<\beta<C_2$（$C_1$，$C_2$为与$\varepsilon$无关的常数)，满足

$$L^h\psi_j\geqslant C\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp[-\beta x_j/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

三、一致收敛阶的充分条件

问题(1.1)的解$u_\varepsilon(x)$有渐近分解式[3]

$$u_\varepsilon(x)=\delta v_\varepsilon(x)+Z_\varepsilon(x)\tag{3.1}$$

$$u_\varepsilon(x)=A_\varepsilon(x)+C_0G_\varepsilon(x)+\varepsilon R_\varepsilon(x)\tag{3.2}$$

其中

$$G_\varepsilon(x)=B(x)E_\varepsilon(x),\quad R_\varepsilon(x)=\delta v_\varepsilon(x)+Z_\varepsilon(x)$$

$$|C_0|,\ |\delta|\leqslant C,\ |A_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant C,\qquad i\geqslant 0$$

$$B(x)=\frac{1}{a(x)}\exp\left[-\int_0^x\frac{b(s)}{a(s)}ds\right]$$

$$E_\varepsilon(x)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(s)\,ds\right],\quad v_\varepsilon(x)=\exp[-a(0)h/\varepsilon]$$

$$|Z_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]\},\qquad i\geqslant 0$$

为建立格式(2.1)一致收敛阶的充分条件，我们先估计该格式的截断误差

$$\tau_j(u)=L^hu(x_j)-L^hu_j=R^hu(x_j)-Q^h[b(x_j)u(x_j)]-Q^h[Lu(x_j)]$$

$$=R^hu(x_j)-Q^h[\varepsilon u''(x_j)-a_ju'(x_j)]=\sum_{i=0}^{n}T^iu^{(i)}(x_j)+R_n^*(u)\tag{3.3}$$

其中

$$T^0=\varepsilon h^{-2}(r^-+r^c+r^+)$$

$$T^1=\varepsilon h^{-1}(-r^-+r^+)-(a_{j-1}q^-+a_jq^c+a_{j+1}q^+)$$

$$T^2=\frac{1}{2}\varepsilon(r^-+r^+)-\varepsilon(q^-+q^c+q^+)-h(-a_{j-1}q^-+a_{j+1}q^+)$$

$$T^i=\frac{1}{i!}\varepsilon h^{i-2}((-1)^i r^-+r^+)-\frac{1}{(i-2)!}\varepsilon h^{i-2}((-1)^{i-2}q^-+q^+)$$

$$-\frac{1}{(i-1)!}h^{i-1}((-1)^{i-1}a_{j-1}q^-+a_{j+1}q^+),\qquad i\geqslant 3$$

$$\begin{aligned}R_n^*(u)=&\varepsilon h^{-2}r^-R_n(x_j,x_{j-1},u)+\varepsilon h^{-2}r^+R_n(x_j,x_{j+1},u)\\&-\varepsilon q^-R_{n-2}(x_j,x_{j-1},u'')-\varepsilon q^+R_{n-2}(x_j,x_{j+1},u'')\\&-a_{j-1}q^-R_{n-1}(x_j,x_{j-1},u')-a_{j+1}q^+R_{n-1}(x_j,x_{j+1},u')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_n(a,b,g)&=g(b)-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}(b-a)^i g^{(i)}(a)\\&=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\xi)\qquad \xi\text{介于}a,b\text{之间}\\&=\frac{1}{n!}\int_a^b(b-s)^n g^{(n+1)}(s)ds\end{aligned}$$

我们假定

$$|q^-(\rho)|+|q^c(\rho_1,\rho_2)|+|q^+(\rho)|\leqslant C \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&|D_\rho q^-(\rho)|+|D_\rho q^+(\rho)|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho\leqslant P\\ C\rho^{-2}, & \rho\geqslant P\end{cases}\\&\left|\frac{\partial}{\partial\rho_1}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C & 0<\rho_1\leqslant P\\ C\rho_1^{-2}, & \rho_1\geqslant P\end{cases}\\&\left|\frac{\partial}{\partial\rho_2}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho_2\leqslant P\\ C\rho_2^{-2}, & \rho_2\geqslant P\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

不难证得：

引理3.1 截断误差表达式(3.1)中的$T^i(i=0,1,2,3)$满足

$$T^0\equiv 0$$

$$T^1=a_j(1-q^--q^c-q^+)+ha_j'[\theta(D_\rho r^-(\rho)+D_\rho r^+(\rho))-(q^+(\rho)-q^-(\rho))]+O(h^2)$$

$$T^2=\varepsilon\left[\frac{1}{2}(r^+(\rho)+r^-(\rho))-(q^-(\rho)+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho))-\rho(q^+(\rho)-q^-(\rho))\right]+O(h^2)$$

$$T^3=-\varepsilon h(g^+(\rho)-q^-(\rho))+O(h^2)$$

其中 $\rho=ha(x_j)/\varepsilon$。

引理3.2 若$\{A_j\}$为

$$\begin{cases}L^hA_j=Q^h(LA(x_j)), & 1\leqslant j\leqslant N-1\\ A_0=A(0),\ A_N=A(1)\end{cases}$$

的解，则

$$|\tau_j(A)|\leqslant C(|T^1|+|T^2|+h),\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

或

$$|\tau_j(A)|\leqslant C(|T^1|+|T^2|+|T^3|+h^2),\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

类似[3]引理4.2，对(3.3)分别取$n=2$和$n=3$不难证得该引理的结论。

引理3.3 若$\{Z_j\}$为

$$\begin{cases} L^h Z_j = Q^h(LZ(x_j)), & 1\leqslant j\leqslant N-1 \\ Z_0=Z(0),\ Z_N=Z(1) \end{cases}$$

的解，则

$$|\tau_j(Z)|\leqslant C(|T^1|+|T^2|+h)\{1+\varepsilon^{-1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]\},\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, h\leqslant\varepsilon$$

$$|\tau_j(Z)|\leqslant C(|T^1|+|T^2|+|T^3|+h^2)\{1+\varepsilon^{-2}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]\},\quad 1\leqslant j\leqslant N-1, h\leqslant\varepsilon$$

$$|\tau_j(Z)|\leqslant C(|T^1|+|T^2|+h^2)\{1+\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]\},\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, h\geqslant\varepsilon$$

证明 因为

$$|Z^{(i)}(x_j)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]\},\qquad i\geqslant 0$$

类似[3]引理4.3，由截断误差表达式(3.3)及(2.2)，(3.4)便得该引理的结论。

引理3.4 若$\{v_j\}$为

$$\begin{cases} L^h v_j = Q^h(Lv(x_j)), & 1\leqslant j\leqslant N-1 \\ v_0=v(0),\ v_N=v(1) \end{cases}$$

的解，则

$$|\tau_j(v)|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1, h\geqslant\varepsilon$$

$$\tau_j(v)=\delta(x_j)[1-q^-(\rho)-q^c(\rho,\rho)-q^+(\rho)]v(x_j)$$
$$-[\delta(x_j)a(0)\varepsilon^{-1}h+h\delta'(x_j)](q^+(\rho)-q^-(\rho))v(x_j)+M,\quad 1\leqslant j\leqslant N-1,\ h\leqslant\varepsilon$$

其中 $\delta(x_j)=(a(0)-a(x_j))a(0)\varepsilon^{-1}$，$|M|\leqslant C\varepsilon^{-2}h^2\exp[-\alpha x_j/\varepsilon]$

证明 因为

$$\tau_j(v)=R^h v(x_j)-Q^h[\varepsilon v''(x_j)-a(x_j)v'(x_j)]=R^h v(x_j)-Q^h(\delta(x_j)v(x_j))$$

记 $\tau^r=R^h v(x_j)$，$\qquad \tau^q=Q^h(\delta_j v(x_j))$

则 $\tau^r=\varepsilon h^{-2}\{r^-[\exp[a(0)h/\varepsilon]-1]+r^+[\exp[-a(0)h/\varepsilon]-1]\}v(x_j)$

$$\tau^q=q^-\delta_{j-1}v(x_{j-1})+q^c\delta_j v(x_j)+q^+\delta_{j+1}v(x_{j+1})$$
$$=[q^-\delta_{j-1}\exp[a(0)h/\varepsilon]+q^c\delta_j+q^+\delta_{j+1}\exp[-a(0)h/\varepsilon]]v(x_j)$$

显然 $|\delta(x_j)|\leqslant C\varepsilon^{-1}x_j$，$|\delta'(x_j)|\leqslant C\varepsilon^{-1}$

$$|\delta(x_j)v(x_j)|\leqslant C\exp[-\alpha x_j/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

当$h\geqslant\varepsilon$时

$$\tau^r=\varepsilon h^{-2}r^+(\rho^+)[\exp[a(0)h/\varepsilon]-1]\left[\frac{r^-(\rho^-)}{r^+(\rho^+)}-\exp[-a(0)h/\varepsilon]\right]v(x_j)$$

可证

$$|\tau^r|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

又

$$|q^+\delta(x_{j+1})v(x_{j+1})|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_{j+1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$
$$|q^c\delta(x_j)v(x_j)|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_j/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$
$$|q^-\delta(x_{j-1})v(x_{j-1})|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 2\leqslant j\leqslant N-1$$
$$|q_1^-\delta(0)v(0)|=0$$

故 $|\tau^q|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$

从而

$$|\tau_j(v)|\leqslant C\varepsilon h^{-1}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

当$h\leqslant\varepsilon$时，由

$$\rho^+=\rho+\theta h\rho'+O(h^3/\varepsilon),\ \rho^-=\rho-\theta h\rho'+O(h^3/\varepsilon)$$

$$r^-(\rho^-)=r^-(\rho)+\frac{1}{2}\theta h\rho'+O(h^3/\varepsilon^2),\quad r^+(\rho^+)=r^+(\rho)+\frac{1}{2}\theta h\rho'+O(h^3/\varepsilon^2)$$

得 $$\tau^r=\varepsilon h^{-2}\{r^-(\rho)[\exp[a(0)h/\varepsilon]-1]+r^+(\rho)[\exp[-a(0)h/\varepsilon]-1]\}v(x_j)+M$$

由(2.2)

$$\tau^r=\varepsilon h^{-2}(\rho(0)^2-\rho\cdot\rho(0))v(x_j)+M=\delta(x_j)v(x_j)+M$$

又由(3.4)、(3.5)

$$q^-(\rho^-)=q^-(\rho)+O(h^2/\varepsilon),\quad q^+(\rho^+)=q^+(\rho)+O(h^2/\varepsilon)$$

$$q^c(\rho^-,\rho^+)=q^c(\rho,\rho)+O(h^2/\varepsilon)$$

故 $$\begin{aligned}\tau^q=&\delta(x_j)[q^-(\rho)\exp[a(0)h/\varepsilon]+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)\exp[-a(0)h/\varepsilon]]\\&+h\delta'(x_j)[q^+(\rho)-q^-(\rho)]v(x_j)+M\\=&\delta(x_j)[q^-(\rho)+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)]v(x_j)\\&+[\delta(x_j)a(0)h\varepsilon^{-1}+h\delta'(x_j)](q^+(\rho)-q^-(\rho))v(x_j)+M\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\tau_j(v)=&\delta(x_j)[1-q^-(\rho)-q^c(\rho,\rho)-q^+(\rho)]v(x_j)\\&-[\delta(x_j)a(0)h\varepsilon^{-1}+h\delta'(x_j)](q^+(\rho)-q^-(\rho))v(x_j)+M\end{aligned}$$

证毕

引理3.5 若$\{G_j\}$为

$$\begin{cases}L^hG_j=Q^h(LG(x_j)), & 1\leqslant j\leqslant N-1\\ G_0=G(0),\quad G_N=G(1)\end{cases}$$

的解，则当$\theta=1/2$时，对于$1\leqslant j\leqslant N-1$，

$$\begin{aligned}\tau_j(G)=&b_jw_j\exp[-\rho][1-q^-(\rho)\exp[\rho]-q^c(\rho,\rho)\\&-q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_{j-1})+M,\qquad \text{当}h\geqslant\varepsilon\text{时}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_j(G)=&(b_jw_j+\varepsilon w_j'')[1-q^-(\rho)\exp[\rho]-q^c(\rho,\rho)\\&-q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_j)+M,\qquad \text{当}h\leqslant\varepsilon\text{时}\end{aligned}$$

其中 $$|M|\leqslant Ch^2\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

证明 $\tau_j(G)=\tau^r-\tau_1^q-\tau_2^q$

其中

$$\tau^r=R^hG(x_j),\quad \tau_1^q=Q^h(b(x_j)G(x_j)),\quad \tau_2^q=Q^h(LG(x_j)),\quad LG(x)=\varepsilon w''E(x)$$

当$h\geqslant\varepsilon$时，显然

$$|\tau_2^q|\leqslant C\varepsilon\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon],\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

为估计τ^r，τ_1^q，引入函数

$$S(k,\ m)=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{x_k}^{x_m}a(s)ds\right]$$

$$\begin{aligned}\tau^r=&\varepsilon h^{-2}\{r^-w_{j-1}-(r^-+r^+)w_jS(j-1,j)+r^+w_{j+1}S(j-1,j+1)\}E(x_{j-1})\\=&\varepsilon h^{-2}\Big\{-\frac{1}{2}h\rho'w_j[D_\rho r^-(\rho)-D_\rho r^+(\rho)\exp[-2\rho]]-hw_j'[r^-(\rho)-r^+(\rho)\exp[-2\rho]]\\&+\frac{1}{2}h\rho'w_j\exp[-\rho][D_\rho r^-(\rho)-D_\rho r^+(\rho)]-\frac{1}{2}h\rho'w_j\exp[-\rho][r^-(\rho)\\&+r^+(\rho)]\Big\}E(x_{j-1})+M\end{aligned}$$

因为 $$w_j'=-\left(\frac{a_j'}{a_j}+\frac{b_j}{a_j}\right)w_j$$

所以

$$\tau^r=\varepsilon h^{-2}\left[\frac{1}{2}h\rho'\rho^{-1}w_j p(\rho)+\frac{hb_j}{a_j}w_j(r^-(\rho)-r^+(\rho)\exp[-2\rho])\right]E(x_{j-1})+M$$

其中 $p(\rho)\equiv 0,\ r^-(\rho)-r^+(\rho)\exp[-2\rho]=\rho\exp[-\rho]$

故 $\tau^r=b_jw_j\exp[-\rho]E(x_{j-1})+M,\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$

又 $\tau_1^q=\{b_{j-1}q^-w_{j-1}+b_jq^cw_jS(j-1,j)+b_{j+1}q^+w_{j+1}S(j-1,j+1)\}E(x_{j-1})$

$$=b_jw_j\exp[-\rho][q^-(\rho)\exp[\rho]+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_{j-1})+M$$

于是

$$\tau_j(G)=b_jw_j\exp[-\rho][1-q^-(\rho)\exp[\rho]-q^c(\rho,\rho)-q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_{j-1})+M$$

当$h\leqslant\varepsilon$时，可以证明

$$\tau^r=(b_jw_j+\varepsilon w_j'')E(x_j)+M$$

$$\tau_1^q=b_jw_j[q^-(\rho)\exp[\rho]+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_j)+M$$

$$\tau_2^q=\varepsilon w_j''[q^-(\rho)\exp[\rho]+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_j)+M$$

故

$$\tau_j(G)=(b_jw_j+\varepsilon w_j'')[1-q^-(\rho)\exp[\rho]-q^c(\rho,\rho)-q^+(\rho)\exp[-\rho]]E(x_j)+M$$ 证毕

定理3.6 差分格式(2.1)为一阶一致收敛格式的充分条件为

i) $q^-\geqslant 0,\ q^+\geqslant 0,\ q^-+q^+\leqslant C_1\leqslant q^c\leqslant C$

$\varepsilon h^{-2}r^--b_{j-1}q^->0,\ \varepsilon h^{-2}r^+-b_{j+1}q^+>0$

ii) $|D_\rho q^-(\rho)|+|D_\rho q^+(\rho)|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho\leqslant P\\ C\rho^{-2}, & \rho\geqslant P\end{cases}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho_1}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho_1\leqslant P\\ C\rho_1^{-2}, & \rho_1\geqslant P\end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho_2}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho_2\leqslant P\\ C\rho_2^{-2}, & \rho_2\geqslant P\end{cases}$$

iii) $q^-(\rho)+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)=1+h\Delta(\rho)$

其中 $|\Delta(\rho)|\leqslant C$

证明 由解的渐近分解式(3.1)，引理3.1，3.3及3.4

$$|\tau_j(u)|\leqslant Ch\left\{1+\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon]\right\},\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

再由引理2.1，2.2及比较定理

$$|u(x_j)-u_j|\leqslant Ch(\varphi_j+\exp[\beta h/\varepsilon]\psi_j)\leqslant Ch\qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$ 证毕

类似可证

定理3.7 当$\theta=1/2$时，差分格式(2.1)为二阶一致收敛格式的充分条件为：

i) $q^-\geqslant 0,\ q^+\geqslant 0,\ q^++q^-\leqslant C_1\leqslant q^c\leqslant C$

$\varepsilon h^{-2}r^--b_{j-1}q^->0,\ \varepsilon h^{-2}r^+-b_{j+1}q^+>0$

ii) $|D_\rho q^-(\rho)|+|D_\rho q^+(\rho)|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho\leqslant P\\ C\rho^{-2}, & \rho\geqslant P\end{cases}$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho_1}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho_1\leqslant P\\ C\rho_1^{-2}, & \rho_1\geqslant P\end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial\rho_2}q^c(\rho_1,\rho_2)\right|\leqslant\begin{cases}C, & 0<\rho_2\leqslant P\\ C\rho_2^{-2}, & \rho_2\geqslant P\end{cases}$$

iii) $q^-(\rho)+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)=1+h\Delta_1(\rho)$

iv) $|q^+(\rho)-q^-(\rho)|\leqslant C\rho$

v) $a_j(1-q^- -q^c-q^+)+h\,a'_j\left[\frac{1}{2}(D_\rho r^-(\rho)+D_\rho r^+(\rho))-(q^+(\rho)-q^-(\rho))\right]=O(h^2)$

vi) $\varepsilon\left[\frac{1}{2}(r^+(\rho)+r^-(\rho))-1-\rho(q^+(\rho)-q^-(\rho))\right]=O(h^2)$

vii) $q^-(\rho)\exp[\rho]+q^c(\rho,\rho)+q^+(\rho)\exp[-\rho]=1+h\Delta_2(\rho)$

其中　$|\Delta_i(\rho)|\leqslant Ch\dfrac{1}{\max(h,\varepsilon)}$　　$(i=1,\ 2)$

四、格 式 举 例

（一） Il'in格式：$\theta=0$，$q^-=0$，$q^c=1$，$q^+=0$

显然该格式满足定理3.6的条件．众所周知，此格式为一阶一致收敛格式．

（二） Lorenz格式：$\theta=1/2$

$$q^-=\left(\frac{\rho^-}{2}\coth\frac{\rho^-}{2}-1\right)r^-(\rho^-)/(\rho^-)^2,\quad q^c=1-q^--q^+,$$

$$q^+=\left(\frac{\rho^+}{2}\coth\frac{\rho^+}{2}-1\right)r^+(\rho^+)/(\rho^+)^2$$

可以验证此格式满足定理3.7的条件i)～iv)，及vi)、vii)．

当$a'(x)\equiv0$时，条件v)亦满足，故为二阶一致收敛格式．

当$a'(x)\neq0$时，为一阶一致收敛格式．由于

$$a_j(1-q^--q^c-q^+)+ha'_j\left[\frac{1}{2}(D_\rho r^+(\rho)+D_\rho r^-(\rho))-(q^+(\rho)-q^-(\rho))\right]$$

$$=h\rho^{-1}a'_j\left(1-\frac{(\rho/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\rho/2)}\right)$$

所以，此格式实际上有误差估计

$|u(x_j)-u_j|\leqslant C(\varepsilon+h^2)$，　　$h\geqslant\varepsilon$时

$|u(x_j)-u_j|\leqslant Ch^2/\varepsilon$，　　$h\leqslant\varepsilon$时

（三） D.M.S.格式：$\theta=1/2$

$$q^-=(1-r^-(\rho^-))/2\rho^-,\quad q^c=q^-+q^+,\quad q^+=(r^+(\rho^+)-1)/2\rho^+$$

可以验证此格式满足定理3.7的条件ii)～vi)．

当$b(x)\equiv0$时，条件i)，vii)亦满足，此时为二阶一致收敛格式．

当$b(x)\neq0$时，Doolan等人曾推测，此时亦为二阶一致收敛格式．实际上

$$b_j[1-q^-(\rho)\exp[\rho]-q^c(\rho,\rho)-q^+(\rho)\exp[-\rho]]=b_j\exp[-\rho]\left(1-\frac{\mathrm{sh}\rho}{\rho}\right)$$

故

$$\tau_j(u)=b_jw_j\exp[-\rho]\left(1-\frac{\mathrm{sh}\rho}{\rho}\right)+M$$

其中 $|M|\leqslant Ch^2\left\{1+\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp[-\alpha x_{j-1}/\varepsilon]\right\}$

即 $\varepsilon h^{-2}[r^-(\rho^-)(u(x_{j-1})-u_{j-1})-(r^-(\rho^-)+r^+(\rho^+))(u(x_j)-u_j)+r^+(\rho^+)(u(x_{j+1})-u_{j+1})]$

$$=b_jw_j\exp[-\rho]\left(1-\frac{\mathrm{sh}\rho}{\rho}\right)+M \qquad 1\leqslant j\leqslant N-1$$

若格式为二阶一致收敛格式，令$h=\varepsilon$，$h\to 0$，则上式左边的极限为零，而右边非零.矛盾.

（四） 二阶一致收敛格式：$\theta=1/2$

$$q^-=\left(\frac{\rho^-}{2}\coth\frac{\rho^-}{2}-1\right)r^-(\rho^-)/(\rho^-)^2,\quad q^c=1-q^--q^++\varepsilon\frac{a_j'}{a_j^2}\left[1-\frac{(\rho/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\rho/2)}\right],$$

$$q^+=\left(\frac{\rho^+}{2}\coth\frac{\rho^+}{2}-1\right)r^+(\rho^+)/(\rho^+)^2$$

可以验证，此格式满足定理3.7的条件，故为二阶一致收敛格式.

五、数 值 实 验

本节我们给出本文讨论的各格式的若干数值结果．在下面各表中，

$$E_\infty^{(i)}=\max_{(\varepsilon)}\max_{0\leqslant j\leqslant N}|u(x_j)-u_j^{(i)}|$$

其中$u(x_j)$为问题(1.1)的精确解，$u_j^{(i)}$ ($i=1,2,3,4$) 分别为本文构造的二阶格式（四）Lorenz格式，D.M.S.格式和Il'in格式的数值解．我们取$h=1/16$，$1/32$，$1/64$分别对$\varepsilon=h^0$，$h^{0.5}$，h^1，$h^{1.5}$，h^2进行计算.

例1 $a(x)=8-\exp[x]$，$b(x)=\exp[x]$

$f(x)=-4(x^2+4x+3)\exp[x]+64(x+1)+8\varepsilon$

$\beta_0=5$，$\beta_1=\exp[-(9-e)/\varepsilon]+16$

	$E_\infty^{(1)}$	$E_\infty^{(2)}$	$E_\infty^{(3)}$	$E_\infty^{(4)}$
$h=1/16$	1.74$E-03$	2.72$E-02$	1.93$E-03$	2.06$E-01$
$h=1/32$	4.47$E-04$	1.41$E-02$	5.30$E-04$	1.07$E-01$
$h=1/64$	1.35$E-04$	7.20$E-03$	1.30$E-04$	5.49$E-02$

例2 $a(x)=5-2x-\sin x$，$b(x)=2+\cos x$

$f(x)=-(2x-1)\cos x-2\sin x-8x+12$

$\beta_0=1$，$\beta_1=2\exp[-(3+\cos(1))/\varepsilon]+1$

	$E_\infty^{(1)}$	$E_\infty^{(2)}$	$E_\infty^{(3)}$	$E_\infty^{(4)}$
$h=1/16$	1.24$E-04$	1.15$E-02$	7.34$E-03$	2.91$E-03$
$h=1/32$	3.14$E-05$	5.84$E-03$	3.58$E-03$	1.04$E-03$
$h=1/64$	8.10$E-06$	2.94$E-03$	1.77$E-03$	3.33$E-04$

数值计算结果表明，各格式的收敛速度与理论分析基本相符．本文构造的二阶非完全指数拟合差分格式（四）的数值结果尤其令人满意.

参 考 文 献

[1] Lorenz, J., Stability and consistency analysis of difference methods for singular perturbation problems, *Proc. Conf. on Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, June (1980), 9—13, University of Nijmegen, The Netherlands (O. Axelsson, L. Frank and A. Van der Sluis eds.) North-Holland, Amsterdam (1981).

[2] Doolan, E. P., J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[3] 林鹏程、孙光甫，奇异摄动问题的完全指数拟合差分格式.（待发表）

[4] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1962).

A Class of Incompletely Exponentially Fitted Difference Schemes for a Singular Perturbation Problem

Lin Peng-cheng Sun Guang-fu

(*Fuzhou University, Fuzhou*)

Abstract

Some sufficient conditions are considered, under which the solutions of a class of incompletely exponentially fitted difference schemes converge uniformly in ε, with orders one and two, to the solution of the singular perturbation problem: $\varepsilon u''+a(x)u'-b(x)u=f(x)$, for $0<x<1$, $u(0)$, $u(1)$ given, $\varepsilon\in(0,1]$, $a(x)>\alpha>0$, $b(x)\geqslant 0$. From these conditions, an incompletely exponentially fitted second-order scheme is derived. Finally, the results of some numerical experiments are given.