应用数学和力学，第12卷第3期(1991年3月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数和力学编委会编
重庆出版社出版

# 活体大变形的能量原理*

陈 至 达

（中国矿业大学北京研究生部，1990年5月4日收到）

**摘 要**

活体是具有自组织和自调控能力的生命系统．讨论活体的能量原理包含有力学和热力学原理两大部分．经典的小变形力学和可逆平衡态热力学理论已不足于描述活体的运动．本文从大变形非对称应力理论力学描述活体宏观运动的力学能量原理．有关不可逆热力学问题将另文[9]讨论．

**关键词** 活体 能量原理 大变形 $S$-$R$分解定理 生物力学

## 一、引 言

活体力学是对近代科学的一个挑战，因活体有足够的灵活性来适应外界大范围的运动；再之，由食品通过化学反应成为力学能也是一个复杂过程，不可逆生物过程已超出可逆热力学的研究范围．

活体系统，或一个活体，按照Велькенштейн[3]的定义，是一个具有自组织自调控能力的开放系统．所谓开放系统是指一个系统不仅和外界有能量交换，并且有物质交换．至于活体力学，目的在于研究运动规律而罕涉及生命过程．因此，我们研究活体的运动，必须考虑能量的转换，然而在有限时间内，活体的质量是当作不变的．

应注意到所指的活体系统处于远离平衡状态，其意义是从热力学而言．一个活体由活细胞组成，为了维持生命，细胞组织要吸收营养并排出废料．运动的每一步均存在能量运动．没有运动，生命将终止．生命现象表现为能量的连续输运，永不处平衡状态．当能量输运停止，生命也就结束；此时和外界处于平衡状态，自组织和自调控作用也永远消失．

强调生命科学和固体力学的能量原理之差别是十分重要的．固体力学的能量原理遵守Newton定律和Hamilton原理，而生命科学的能量原理包含有复杂化学反应、生物与心理作用，它是主观的动力学变化率问题而不是客观的纯静态问题．

在本文中，我们仅就活体运动的表观行为用数学方法加以描述．有关热力学与化学动力学问题将另文讨论．

---

* 创刊十周年暨一百期纪念特刊(Ⅱ)论文．(Ⅺ U.S. National Congress of AppliedMechanics, May21—25. 1990 Arizona, 会议宣读论文的第一部份)

## 二、描述活体运动的数学方法

从总体看，活体是可变形柔软体．对刚体有六个自由度，而对于一个柔软体单元有12个自由度，增加了六个描述应变状态的分量．对整个活体，有无穷多个自由度．

为了描述活体的空间运动，我们选择二个参考系：1)、一个空间固定标架 $X^i(i=1, 2, 3)$；2)、一个嵌含在运动体内的参考系$x^i(i=1, 2, 3)$．在实际计算中，我们常选择另一参考系$\mathring{x}^i(i=1, 2, 3)$，此系初始时和$x^i$系同胚并固定在空间．当活体运动拖带系$x^i$和形体一起运动，一点的拖带是该点的指定物质坐标，在运动过程中是不变的，但点与点之间的尺规改变．对一般情况，在初始时刻，$x^i$是选作直线或曲线正交系，形变后成为任意的斜交系．此种运动描述法早先由Schouten、Brillouin，Synge-Chien（钱伟长）曾用过（参见[1]论述）．

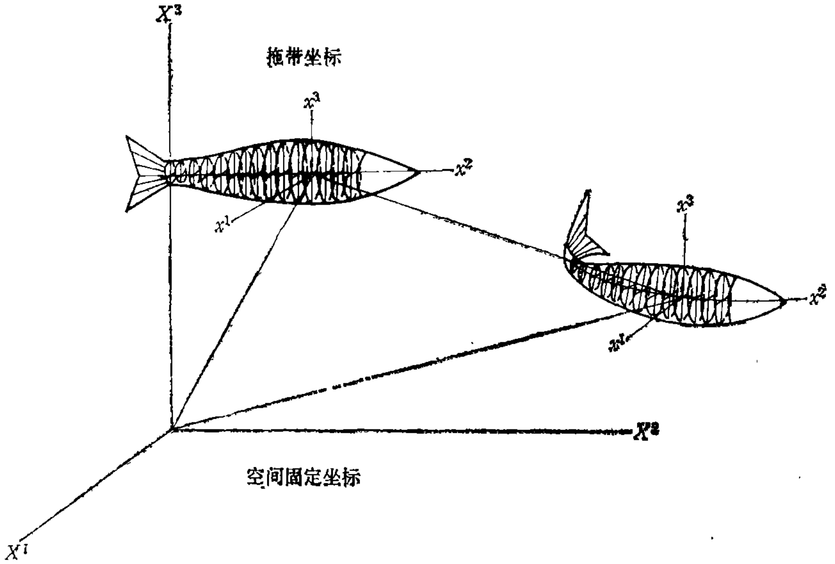


**图1　鱼运动的描述**

柔软体在空间运动的位形变化可以通过定义在体中一点的局部基标矢量（基矢）的变换情况来研究．兹令$\mathring{\mathbf{g}}_i$和$\mathbf{g}_i$表示标准态和形变后的基矢．因活体的运动是现实的变换，故总是存在着物理变换函数$F$将$\mathring{\mathbf{g}}_i$变为$\mathbf{g}$，即存在下列变换：

$$T: \quad g_i = F^j_i \mathring{g}_j, \quad F^j_i = \delta^j_i + u^j|_i \tag{2.1}$$

其中　$u^j|_i$指位移矢量$\mathbf{u}$在$\mathring{\mathbf{g}}_i$系中对拖带坐标$x^i$的协变导数．

应用$S$-$R$（应变-转动）分解定理：$F$函数可以分解为二个子变换：对称与正交变换，对称变换表现为应变张量，而正交变换表现为转动张量，详细证明见[1]，结果为：（以矩阵符号表示）

转动张量

$$R = I + \mathbf{L}\sin\theta + \mathbf{L}^2(1-\cos\theta) \tag{2.2}$$

应变张量

$$S = 1/2\ (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) - \mathbf{L}^2(1-\cos\theta) \tag{2.3}$$

平均整旋角$\theta$由下式决定，

$$1/2\ \mathrm{rot}\mathbf{u}=\mathbf{L}\sin\theta \tag{2.4}$$

$\mathrm{rot}\mathbf{u}$定义为

$$1/2|\mathrm{rot}\mathbf{u}|=|\sin\theta|=1/2|[(u^1|_2-u^1|^T_2)+(u^2|_3-u^2|^T_3)+(u^3|_1-u^3|^T_1)]^{1/2}| \tag{2.5}$$

$\mathbf{L}$是转轴单位矢量，

$$\mathbf{L}=L^i\mathbf{g}_i,\ L_{ij}=\epsilon_{ijk}L^k,\ L^i_j=g^{ir}L_{rj} \tag{2.6}$$

$$L^i_j=1/2(u^i|_j-u^i|^T_j)/\sin\theta \tag{2.7}$$

$\epsilon_{ijk}$是排列张量，$g^{ij}$是二阶逆变度规张量分量。

当$S=0$，转动张量等于刚体转动的Euler-Roarigues公式[4]。由公式（2.2）～(2.7)，我们可以完全决定在变形体中一点的应变和局部转动状态。

新的变形体力学理论已经成功地应用于固体力学，岩石力学，粘弹性力学，断裂力学、生物力学和其他许多领域，它也适用于研究柔软活体的大变形。活体与非活体运动的基本差别在于非活体的运动由初始和边界约束条件所确定，但是活体的运动是受控于主观能动性与遗传因素，还有个体的感觉。

## 三、动能、应变能

设自活体中取一微元体，称为物理单元考虑，单位形变后体积的外力功率以 $w$ 表之，$\mathbf{P}$为微元体上的表面力（力/单位形变后面积），体力为$\rho\mathbf{f}$（力/单位形变后体积），$\rho$指单位形变后体积之质量。由此某一组织体的总功率为

$$\int_\Omega \dot{w}\,d\Omega=\oint_s \mathbf{P}\cdot\mathbf{v}\,da+\int_\Omega \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,d\Omega \tag{3.1}$$

$\mathbf{v}$——质点速度；$da$，$d\Omega$——面元、体元。根据在（[1]，§7.4）的证明有

$$\dot{w}=\dot{k}+\sigma^i_j v^j\|_i \tag{3.2}$$

$\dot{k}$——微元体的动能增率，$\sigma^i_j$——二阶混合应力张量分量，$v^j\|_i$——在实时拖带系中，速度矢量逆变分量对拖带坐标的协变导数。

式（3.2）表明下列事实：

$$\text{外力功率}=\text{动能增率}+\text{体内应力功率} \tag{3.3}$$

实际上，活体肌肉在正常情况作负功，以上表述可改为

$$\text{肌肉功率}=\text{动能增率}+\text{完成外功的功率} \tag{3.3$'$}$$

当不完成外功，机体的动能由肌肉功供给。

因为活体组织结构很复杂与精细，是高度非均匀而有序，经典的应力张量对称性的概念在活体组织并不常真实。今将应力张量分解为

$$\sigma^i_j=\underset{s}{\sigma}{}^i_j+\underset{a}{\sigma}{}^i_j=\text{symmetrical part}+\text{anti-symmetrical part} \tag{3.4}$$

$$\underset{s}{\sigma}{}^i_j\equiv\frac{1}{2}(\sigma^i_{\cdot j}+\sigma^{\cdot i}_j),\quad \underset{a}{\sigma}{}^i_j\equiv\frac{1}{2}(\sigma^i_{\cdot j}-\sigma^{\cdot i}_j) \tag{3.5}$$

另一方面，我们熟知在刚体运动时，其中一点的速度梯度是决定于角速度；对变形体而言，还要依赖于形变速率。应用文[1]中§5.1的结果，知广义Euler运动学公式：

$$v^i\|_j=L^i_j\dot{\theta}+\dot{S}^i_j \tag{3.6}$$

$L^i_j$——转轴$\mathbf{L}$的方向参数，$\theta$——平均整旋角，$\dot{S}^i_j$——应变速率。

将式（3.4），（3.6）代入式（3.2），得到

$$\dot{w}=\dot{k}+\underset{s}{\sigma}{}^{i}_{j}\dot{S}^{j}_{i}+\underset{a}{\sigma}{}^{i}_{j}L^{j}_{i}\dot{\theta} \tag{3.7}$$

根据角动量定理（参见[1]，§3.9），

$$\underset{a}{\sigma}{}^{i}_{j}\equiv\frac{1}{2}(\sigma_{\cdot}{}^{i}_{j}{}^{\cdot}-\sigma^{\cdot}{}^{i}_{j}{}_{\cdot})=-\frac{1}{2}\rho m_{\cdot}{}^{i}_{j} \tag{3.8}$$

$m^{i}_{\cdot j}$——二阶混合体矩（力偶矩/单位质量）张量的分量．按此得到下列结果，

$$\dot{w}=\dot{k}+\underset{s}{\sigma}{}^{i}_{j}\dot{S}^{j}_{i}-\frac{1}{2}\rho m_{\cdot}{}^{i}_{j}L^{\cdot}{}^{j}_{i}\dot{\theta} \tag{3.9}$$

如$\dot{S}^{i}_{j}=\dot{m}^{i}_{j}=0$，可以证明

$$\int\dot{w}d\Omega=\int\dot{k}d\Omega=\frac{d}{dt}\int 1/2\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\Omega=\frac{d}{dt}\left[(1/2)M\mathbf{v}_c^2+(1/2)I_c\theta^2\right] \tag{3.10}$$

上式中$M$是总质量，$I_c$是活体刚性运动时绕通过质心平行于转轴的轴之转动惯量，$\mathbf{v}_c$是质心的速度．

因设$\mathbf{v}_0$为某一选定参考点$P_0$的速度，角速度为$\mathbf{L}\dot{\theta}$，则任一点$P$的速度可表示为

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{L}\dot{\theta}\times\mathbf{r} \tag{3.11}$$

$\mathbf{r}$是一点相对于$P_0$的矢径，我们有

$$\frac{1}{2}\int\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}d\Omega=\frac{1}{2}\int\rho\mathbf{v}_0^2d\Omega+\int\rho\mathbf{v}_0\cdot(\mathbf{L}\dot{\theta}\times\mathbf{r})d\Omega+\frac{1}{2}\int\rho(\mathbf{L}\dot{\theta}\times\mathbf{r})^2d\Omega \tag{3.12}$$

如果选质心作为参考点，上式第二个在左边的积分等于零，最后得到公式（3.10）．

## 四、形变体中转动能量的非局部性质

刚体的转动能量比例于刚体本身的转动惯量．然而转动惯量之值和质量离开转轴的分布有关，由此可见转动的力学效果不是局部一点性质的．对于柔软体，这种情况更有趣，在体内各点的平均整旋角和转轴方位是改变的，形变体转动能量的概念有特别意义，需要细心处理．

由于活体的肌肉作负功，即功率输出，我们由公式（3.9）有

$$\dot{J}\equiv-\sigma^{i}_{j}\dot{S}^{j}_{i}=\left(\dot{k}-\frac{1}{2}\rho m^{i}_{j}L^{j}_{i}\dot{\theta}\right)-\dot{w}=\text{strain power of muscle} \tag{4.1}$$

在等式右边括弧内的项表示微元体的动能，其中包含有局部角功率．$-\dot{w}$是抵抗外力所作有用功．

应当注意到转动惯量是基于所有质点绕某一转轴以全等角速度转动的概念建立的．然而在一个柔软体中因形变情况的复杂性，转动惯量$I_c$如式（3.10）定义者已不适用．活体大变形时，肌肉元扭曲产生的体矩应加以考虑．

细心考察活体的行为，发现体矩$\mathbf{m}$可能是一种自作用；它由体活本身产生于调控非对称转动应力以便骨骼取得要求的角速度．对无生命物体，这种自作用是不可能的．

一个物理单元的动能增率新定义是

$$\dot{k}'\equiv\dot{k}-\frac{1}{2}\rho\mathbf{m}\cdot\mathbf{L}\dot{\theta}=\rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v}-\frac{1}{2}\rho\mathbf{m}\cdot\mathbf{L}\dot{\theta} \tag{4.2}$$

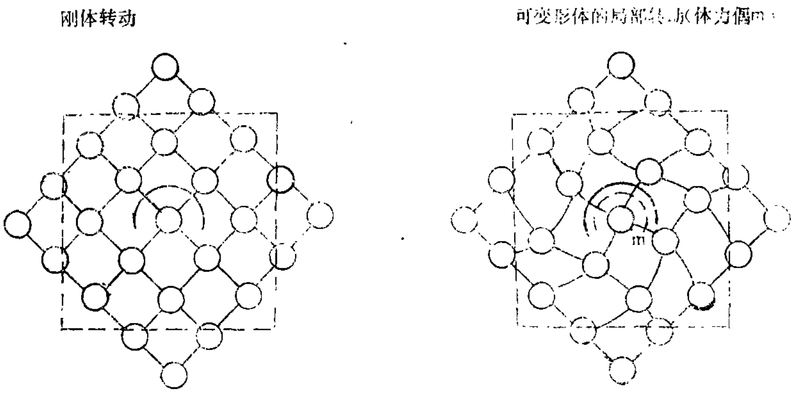


图 2

$k'$ 称为局部动能的增率.

按物理量纲分析

$$[\rho \mathbf{v}]\cdot[\dot{\mathbf{v}}] \triangleq [\text{linear momentum/unit deformed volume}]\cdot[\text{linear acceleration}]$$

$$\triangleq \left(\frac{ML}{T}\right)\frac{1}{L^3}\cdot\frac{L}{T} \triangleq \text{energy/volume/time} \tag{4.3}$$

$$[\rho \mathbf{m}]\cdot[L\dot{\theta}] \triangleq [\text{angular momentum/unit deformed volume}]\cdot[\text{angular acceleration}]$$

$$\triangleq \left(\frac{ML^2}{T}\right)\frac{1}{L^3}\cdot\frac{1}{T} \triangleq \text{energy/volume/time} \tag{4.4}$$

$M$——质量，$L$——长度，$T$——时间.

在式 (4.3) 与 (4.4) 比较 ($ML/T$) 与 ($ML^2/T$)，可见角动量的物理量纲是 $L$ 的平方，表明非局部性质.

在柔软体中一点$\mathbf{r}_0$产生的体矩是和围绕$\mathbf{r}_0$点以外各点的相对转动有关. m的非局部性质用以$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$点为中心的体积分表示.

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)=\iiint_{\Omega} B(\mathbf{r})[L\theta(r-r_0)-L\theta(\mathbf{r}_0)]H(r-r_0)d\Omega \tag{4.5}$$

$B(\mathbf{r})$是物质常数和距离 r有关，$H(r-r_0)$是与 $(r-r_0)$ 有关的衰减函数，一个最可能的$H$函数形式是$\exp[-\lambda(r-r_0)^2]$，$\lambda$为某一常数.

在$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$点的邻域展开$L\theta(r)$函数，

$$L\theta(\mathbf{r})=L\theta(\mathbf{r}_0)+\nabla(L\theta)_{r_0}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)+\cdots \tag{4.6}$$

在形变体中一点，转动轴方位的变化率一般比转动角的变化率为小，一次近似给出

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}_0)\approx\iiint_{\Omega} B(\mathbf{r})[\nabla(\mathbf{L}\theta)_{r_0}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)]H(r-r_0)d\Omega$$

$$=L_0|\nabla\theta|\iiint_{\Omega}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cos[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\nabla\theta_0]H(r-r_0)d\Omega \tag{4.7}$$

上式可以用简单公式表示，因$\mathbf{r}_0$是任意点，我们有下列关系:

$$\mathbf{m}=\kappa L|\nabla\theta|,\ \ or\ \ \mathbf{m}=\kappa|\nabla\theta| \tag{4.8}$$

$\kappa$——由活体内部结构决定的物质参数.

图3表示鱼尾鳍运动的一个实例，作者发现鱼鳍事实上是由一组由膜连接的小骨浆所组成，这些小骨浆在骨板处是活动联接的，由肌肉的非对称应力和体矩作用来操纵，在文[9]中有进一步的讨论。

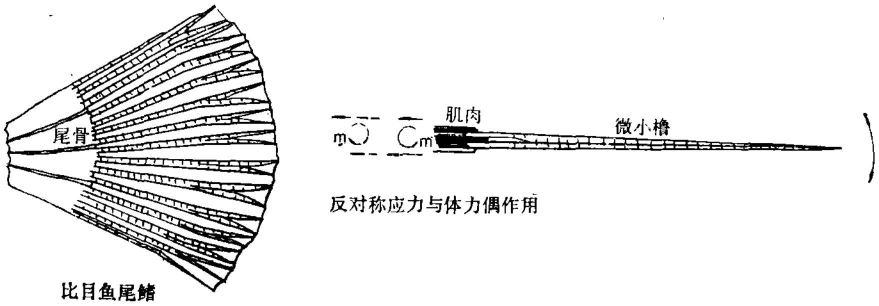


图　3

## 五、结　束　语

近代力学发展的一个最高标志是建立生命系统力学。要达到这个目标，首先我们要解释生物活体宏观运动的规律。本文导出的有体矩存在的非对称应力场的能量原理便是为了进一步理解活体肌肉运动的复杂过程的有用结果。

〈应用数学和力学〉创刊十年来，在主编钱伟长教授、副主编叶开沅教授，和执行编辑王志忠先生等人的努力和大力支持下，使非线性连续体力学的发展达到一个崭新的水平，作者谨致以诚挚的谢意。

## 参　考　文　献

[1] 陈至达，《有理力学》，中国矿业大学出版社，徐州（1988）。

[2] Nicolis, G. and I. Prigogine, *Self-Organization in Non-Equilibrium Systems*, John Wiley & Son (1977).

[3] Volkenstein, M. V., *Physics and Biology*, Academic Press (1982).

[4] Cheng, H. and K. C. Gupta, An historical note on finite rotations, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 139—145.

[5] Prigogine, I., *Etude Thermodynamique des Processus Irreversibles*, Desoer, Liège (1947).

[6] Chen, Z. D. (陈至达), Energy principle and incremental law for large deformation of biomuscle, *Proc. Int. Cong. Appl. Mechanics*, Beijing, China, August 21—25 (1989).

[7] Schrödinger, E., *'What is life?' The Physical Aspects of the Living Cell*, Cambridge University Press (1945).

[8] Webb, P. W., and D. Weihs (Editors), *Fish Biomechanics*, Praeger Publishers (1983).

[9] Chen, Z. D, Energy principle of large deformation for living systems and application to biocybernetics, contributed to XI U. S. National Congress of Applied Mechanics, Arizona, May 21—25 (1990).

# Energy Principle of Large Deformation for Living Systems

Chen Zhi-da

*(Beijing Graduate School, China University of Mining, Beijing)*

**Abstract**

Living system is a non-equilibrium open system having the function of self-organization and self-control. The study of energy principle of living system involves two principal parts: mechanics and thermodynamics. The classical infinitesimal deformation theory and thermodynamics of equilibrium state are not sufficient to explain the complex motion of living system. We aim in this paper to describe the mechanical energy principle of macroscopic motion of living body based on large deformation non-symmetry stress field theory. The principle of ireversible thermodynamics applied to living system will be left in another paper[9].

**Key words** living system, energy principle, large deformation, $S$-$R$ decomposition theorem, biomechanics