

# 一种计算超声速流中由湍流剪切层脉动引起的激波振荡频率的方法\*

徐立功 冉政

(合肥 中国科学技术大学近代力学系) (四川绵阳 中国空气动力研究与发展中心)

(蔡树棠推荐, 1990年8月20日收到)

## 摘 要

在超声速或高超声速绕流中, 一种很严重的脉动压力环境是由激波边界层相互作用引起的激波振荡。这种高强度的振荡激波可能诱发结构共振。因这一现象非常复杂, 已发表的文章都采用经验或半经验方法。本文首次从基本流体动力学方程出发, 给出了由湍流剪切层引起的激波振荡频率的理论解, 得到了振荡频率随气流Mach数 $M_\infty$ 和压缩折转角 $\theta$ 的变化规律, 计算结果与实验值是相符的。本文为激波振荡导致的气动弹性问题提供了一种有价值的理论方法。

**关键词** 激波振荡 激波边界层相互作用 脉动压力 激波特征频率 湍流声辐射 气动弹性

## 一、前 言

在大气层中飞行的超声速或高超声速飞行器将经历多种显著的湍流效应和压缩效应所引起的脉动压力环境, 其中最重要的是激波与边界层相互作用所造成的复杂的非定常脉动流场和由此而引起的激波振荡。例如飞行器控制翼所形成的压缩折转流动, 表面凸起物的绕流或斜激波在物面上的反射等, 都会出现这种现象。

许多实验表明, 这种振荡激波具有很高的脉动压力值, 其均方根脉动压力的量级高达来流动压头的1/10。振荡激波的另一特性是具有较低的振荡频率, 其量级为 $10^2$ Hz。由于这一频率与飞行器结构的共振频率相接近, 可能造成颤振, 因此研究这种高幅低频的振荡激波的频谱对飞行器的结构设计具有基本的重要意义。

Trilling<sup>[1]</sup>曾对层流边界层/激波相互作用问题作过研究, Plotkin和Robertson<sup>[2]</sup>曾用一些简化模型对压缩折转处湍流边界层内的激波振荡作过一些分析。然而, 至今关于激波与湍流边界层相互作用的研究仅停留在实验阶段<sup>[6,7]</sup>。

近年来, 湍流作用下的激波结构问题, 引起许多学者的兴趣, 本文详细地讨论了湍流剪切层引起激波振荡的问题, 给出了这种振荡激波本征频率解<sup>[8]</sup>。

## 二、流动图象与计算模型

以超声速压缩折转角流动为例。假定流动是二维的, 来流为湍流度很低的均匀超声速

\* 国家自然科学基金资助项目。

流，壁面边界层为完全发展的湍流剪切层。其流动图象如图1所示。

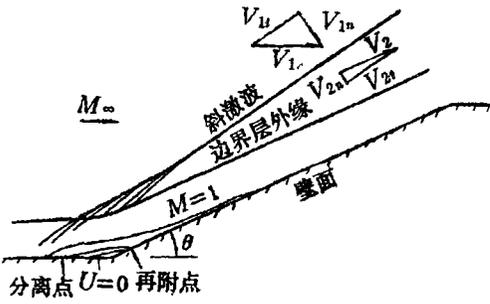


图1 压缩折转的流动图象

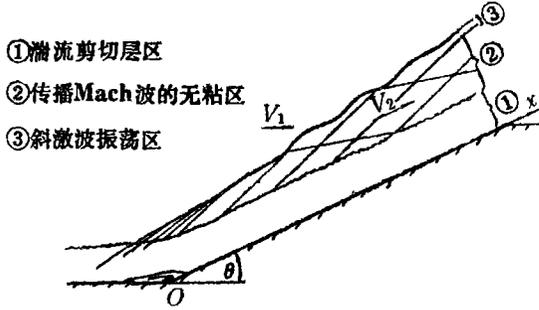


图2 计算模型

超声速气流绕外折角的流动将形成斜激波，激波与湍流剪切层相互作用导致壁面边界层分离，分离区域的大小和形状以及激波位置随时间而变化。也就是说激波将在折转处前方某一平均位置处来回振荡。激波振荡的基本机制在于湍流剪切层所固有的脉动特性。分离点前方湍流边界层内的激波振荡直接起源于边界层内的速度脉动<sup>[2]</sup>，而湍流边界层之外激波的振荡则是由于湍流剪切层速度（即压力）脉动产生的声辐射作用在激波上引起的，这种湍流剪切层所辐射的声波即为Mach波，由此我们得到如图2所示的模型。这一模型将斜激波后的区域分成三个作用区：

1. 湍流剪切层区；
2. 传播Mach波的无粘流区；
3. 斜激波的振荡区。

### 三、求解方法

首先对图2所示计算模型的三个区域分别求解，然后将得到的脉动压力解在湍流剪切层外缘处匹配，由此得出振荡激波的本征频率解。分述如下：

#### 1. 小扰动的声波形式解

湍流剪切层压力脉动产生的Mach波可以视为小扰动声波，正是这些辐射声波引起激波振荡。为此，我们首先讨论激波波后无粘区中这种小扰动声波的形式解。

根据小扰动线性化假设，对二维理想气体而言，线性小扰动方程有：

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \rho_2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) &= 0 \\
 \rho_2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= 0 \\
 \rho_2 \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial t} + V_2 \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= 0 \\
 \left( \frac{\partial}{\partial t} + V_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) (\tilde{p} - a_2^2 \tilde{\rho}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中符号“~”表示扰动量。如果扰动量具有简谐形式解，即

$$\begin{bmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\rho} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{p} \end{bmatrix} \exp[i(K_1x + K_2y + \omega t)] \quad (3.2)$$

其中符号“ $\wedge$ ”表示振幅， $\omega$ 为圆频率。

将(3.2)代入(3.1)式可以得到关于振幅( $\hat{\rho}$ ,  $\hat{u}_x$ ,  $\hat{u}_y$ ,  $\hat{p}$ )的四元一次方程组，考虑到方程的齐次性，由非零解条件

$$|\Delta| = 0$$

得色频关系：

$$(\omega + V_2 K_1)^2 = a_2^2 K^2 \quad (3.3)$$

其中 $K$ 为波数， $K^2 = K_1^2 + K_2^2$ 。 $a$ 为声速。

因此声波形式解为：

$$\left. \begin{aligned} \tilde{p} &= \hat{p} \cos(K_1x + K_2y + \omega t) \\ \tilde{\rho} &= \frac{\hat{p}}{a^2} \cos(K_1x + K_2y + \omega t) \\ \tilde{u}_x &= -\frac{a^2 K_1 \hat{p}}{\rho(\omega + V_2 K_1)} \cos(K_1x + K_2y + \omega t) \\ \tilde{u}_y &= -\frac{a^2 K_2 \hat{p}}{\rho(\omega + V_2 K_1)} \cos(K_1x + K_2y + \omega t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中 $\hat{p}$ 为任意不为零常数。

## 2. 激波振荡区的解

根据斜激波理论，对斜激波而言，表现为法向参数不连续。

首先，我们假设扰动激波形状为：

$$\tilde{S}(y, t) = \hat{S} \sin(K_2y + \omega t) \quad (3.5)$$

扰动激波运动速度为：

$$\tilde{U}_s = \partial \tilde{S} / \partial t = \hat{S} \omega \cos(K_2y + \omega t) \quad (3.6)$$

其单位法矢量为：

$$\mathbf{n} = (-1, \hat{S} K_2 \cos(K_2y + \omega t), 0) \quad (3.7)$$

斜激波法向上的守恒关系为：

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\rho}_1 V_1 + \rho_1 (-\tilde{U}_s + \tilde{u}_{x1}) &= \tilde{\rho}_2 V_2 + \rho_2 (-\tilde{U}_s + \tilde{u}_{x2}) \\ \tilde{\rho}_1 V_1 (V_1 - V_2) + \rho_1 (V_1 - V_2) (-\tilde{U}_s + \tilde{u}_{x1}) + \rho_1 V_1 (\tilde{u}_{x1} - \tilde{u}_{x2}) &= \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

由于激波前为无扰动流动，也就是说，所有下标为“1”的扰动量为0，那么方程组(3.8)简化为：

$$\left. \begin{aligned} -\rho_1 \tilde{U}_s &= \tilde{\rho}_2 V_{2n} + \rho_2 (-\tilde{U}_s + \tilde{u}_{x2}) \\ -\rho_1 (V_{1n} - V_{2n}) \tilde{U}_s - \rho_1 V_{1n} \tilde{u}_{x2} &= -\tilde{p}_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

代入上面的声波解(3.9)，由 $\hat{S}$ ,  $\hat{p}$ 的齐次方程组非零解条件得又一个色频关系：

$$\omega = (H_{12} - V_{2n}) K_1 \quad (3.10)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} H_{12} &= H_1/H_2 \\ H_1 &= \rho_1 V_{1n}/\rho_2 + \rho_1(V_{2n} - V_{1n})/(\rho_1 - \rho_2) \\ H_2 &= \rho_1(V_{2n} - V_{1n})V_{2n}/[(\rho_1 - \rho_2)a_2^2] - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

我们称 $H$ 为影响频率的激波因子, 它们反映出斜激波本身对频率的影响大小。

这样, 式(3.3), (3.10)和(3.11)构成振荡激波解, 其中下标 $n$ 表示法向分量,  $V_{1n}$ ,  $V_{2n}$ 关系由斜激波关系确定。

### 3. 无粘区的脉动压力解

无粘区的基本流动为 $V_2$ 平行于拐角面的理想流, 湍流边界层辐射的声波在其间传播, 其表现为压力和密度的脉动。这一区域的流动可视为基本流动迭加一个小扰动流动, 从流体力学基本方程出发, 可以导出脉动压力方程为:

$$\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} = (1 - M_2^2) \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} - \frac{2M_2}{a_2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x \partial t} \quad (3.12)$$

对 $\tilde{p}$ 作关于 $x, t$ 的Fourier变换, 即令:

$$\tilde{p}(x, y, t) = \iint \gamma(K_1, y, \omega) \exp[i(K_1 x + \omega t)] dK_1 d\omega \quad (3.13)$$

代入脉动压力方程, 有:

$$d^2 \gamma / dy^2 + \phi^2 \gamma = 0 \quad (3.14)$$

这里指数因子 $\phi$ 定义为:

$$\phi^2 = (\omega + V_2 K_1)^2 / a_2^2 - K_1^2 \quad (3.15)$$

由此得到关于 $\gamma(K_1, y, \omega)$ 的形式解为:

$$\gamma(K_1, y, \omega) = \exp[i\phi y] \quad (3.16)$$

### 4. 湍流边界层的脉动压力解

湍流边界层声辐射的工作, 最早见 O. M. Phillips<sup>[3]</sup>的工作, G. M. Lielley<sup>[4]</sup>曾对他的工作进行过评述, 指出虽然某些计算结果与实验观测有差别, 但就马赫波(Mach waves)这点还是为许多学者的工作所证实。这里在湍流边界层处理中, 我们使用由 O. M. Phillips得到的结论。

在忽略扩散项, 壁面气流密度和粘性系数为常数的假设之下, 无量纲形式的湍流边界层方程为:

$$-\frac{u_2^2}{a_2^2} \frac{D^2 \tilde{p}}{Dt^2} + \frac{a^2}{a_2^2} \nabla^2 \tilde{p} + \frac{d(a^2/a_2^2)}{dy} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \frac{\rho_\infty}{\rho_w} A(x, t) \quad (3.17)$$

与式(3.12)类似对 $\tilde{p}$ 作Fourier变换后可得:

$$\frac{d^2 \gamma}{dy^2} + \frac{d \ln(a^2/a_2^2)}{dy} \cdot \frac{d\gamma}{dy} - \left[ K^2 - \frac{1}{a^2} (\omega + V_2 K_1)^2 \right] \gamma = \frac{\rho}{\rho_w} \Gamma \quad (3.18)$$

其中 $\Gamma(K_1, y, \omega)$ 为源函数 $A(x, t)$ 的Fourier变换系数。考虑到零热传导气体有:

$$a^2 = a_w^2 - (\gamma - 1) V_2^2 / 2, \quad a_w' = 0 \quad (3.19)$$

将式(3.11)和(3.19)代入(3.18)并在 $y = \delta$  (即湍流剪切层外缘处) 取值, 得:

$$-\phi^2 + 2a' a^{-1} \phi i - [K^2 - a^{-2} (\omega + V_2 K_1)^2] = 0 \quad (3.20)$$

### 5. 本征频率解

以上我们得到了有关频率解的四个方程, 这些方程是式(3.3), (3.10), (3.15)和(3.20)。注意到所有未知量都可能为复数解, 这四个未知复变量可以表示为:

$$\begin{bmatrix} \omega \\ K \\ K_1 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^r \\ K^r \\ K_1^r \\ \phi^r \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \omega^i \\ K^i \\ K_1^i \\ \phi^i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

将上式分别代入式(3.3), (3.10), (3.15)和(3.20), 则得到如下的8元方程组:

$$\left. \begin{aligned} \omega^r &= (H_{12} - V_{2n})K_1^r, \quad \omega^i = (H_{12} - V_{2n})K_1^i \\ (\omega^r + K_1^r V_2)^2 - (\omega^i + K_1^i V_2)^2 &= a_2^2 [(K^r)^2 - (K^i)^2] \\ (\omega^r + K_1^r V_2)(\omega^i + K_1^i V_2) &= a_2^2 K^r K^i \\ (\phi^r)^2 - (\phi^i)^2 &= (K^r)^2 - (K^i)^2 - [(K_1^r)^2 - (K_1^i)^2] \\ \phi^r \phi^i &= K^r K^i - K_1^r K_1^i \\ -[(\phi^r)^2 - (\phi^i)^2] - 2a' a^{-1} \phi^i + [(K^r)^2 - (K^i)^2] (a_2^2 a^{-2} - 1) &= 0 \\ -\phi^r \phi^i - 2a' a^{-1} \phi^r + K^r K^i (a_2^2 a^{-2} - 1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

经过繁杂的运算后, 由式(3.22)得到的 $\omega$ 的解为:

$$\omega^r = \sqrt{2u} (H_{12} - V_{2n} + V_2), \quad \omega^i = \sqrt{u} (H_{12} - V_{2n} + V_2) \quad (3.23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{4a'^2}{a^2} \frac{n}{m^2}, \quad n = \frac{(H_{12} - V_{2n} + V_2)^2}{a_2^2} - 1 \\ m &= 1 + A(H_{12} - V_{2n} + V_2)^2, \quad A = \left( \frac{2}{a_2^2} - \frac{1}{a^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

在 $(\omega^r, \omega^i)$ 平面上, 当 $\omega^i < 0$ 时, 小扰动随时间增长其振幅增大, 激波将不稳定;  $\omega^i > 0$ 时, 激波是稳定的。因此对应有物理意义的解将满足下列条件:

$$\omega^i > 0 \quad (3.25)$$

根据式(3.23)和(3.25), 最后得激波振荡频率为:

$$f = \frac{|\omega|}{2\pi} = \frac{\sqrt{3u}}{2\pi} (H_{12} - V_{2n} + V_2) \quad (3.26)$$

## 四、算例与讨论

以飞行器控制翼形成的压缩拐角为例, 激波振荡频率与飞行高度、飞行 Mach 数、控制翼位置及其偏转角等因素有关。假定飞行高度为30公里, 控制翼距飞行器头部驻点的距离为3米, 控制翼长为0.35米, 表面温度为360K, 我们计算了不同飞行 Mach 数下激波振荡频率随控制翼偏转角 $\theta$ 的变化规律, 得到的振荡频率 $f$ 随 $\theta$ 的变化曲线示于图3, 而振荡频率 $f$ 随飞行 Mach 数 $M_\infty$ 的变化曲线示于图4。

由图3可见, 当 $M_\infty$ 一定时,  $f$ 随 $\theta$ 的变化存在一临界转角 $\theta_c$ , 当 $\theta < \theta_c$ 时, 频率缓慢地递增, 当 $\theta > \theta_c$ 时, 频率较快地递减;

由图4可以发现, 当 $\theta$ 一定时,  $f$ 随 $M_\infty$ 的增加而增大, 并且在 $\theta = 20^\circ$ 左右时,  $f$ 有最大

值。在 $\theta=10^\circ\sim 30^\circ$ 和 $M_\infty=7\sim 13$ 的范围内，激波的振荡频率为 $1.8\sim 7.8\times 10^2\text{Hz}$ 。已发表的值量值

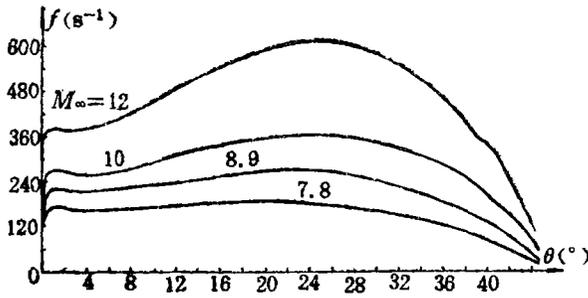


图3 不同 Mach 数下激波振荡频率随压缩折转角的变化

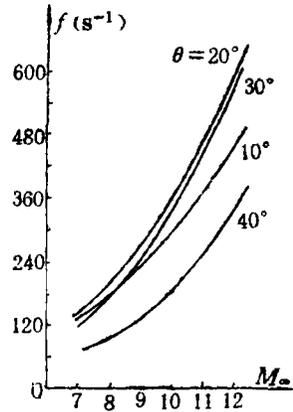


图4 频率随Mach数的变化

散布度较大，如文献[7]和[8]在某些条件下的测量值分别为 $2\times 10^3$ 和 $2\times 10^2\text{Hz}$ 。本算例的结果正好在此散布度以内。

## 五、结 论

1. 本文首先探讨了一种从理论上计算振荡激波频谱的方法，计算结果与测量值基本一致；
2. 当前已发表的研究振荡激波的方法都是半经验方法<sup>[5~8]</sup>，公式中含有经验常数，而本方法直接从基本方程求解，故更具普遍性；
3. 本方法可以计算各种飞行条件下由湍流边界层所诱导的激波振荡频率随Mach数和压缩偏转角度的变化规律；
4. 本方法没有计及高Mach数时的真实气体效应。

本文在成文过程中，受到蔡树棠先生的悉心指导，作者在此表示衷心感谢；在调研过程中，受到张涵信先生以及陈正才副研究员的大力帮助，在此，作者向他们表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] Trilling, L., Oscillating shock-boundary layer interaction, *J.A.S.*, 25(5) (1958).
- [2] Plotkin, K. L. and J. E. Robertson, Prediction of space shuttle fluctuating pressure environments, NASA CR-124347 (1973).
- [3] Phillips, O.M., On the generation of wave by turbulent wind, *J. Fluid Mech.*, 2 (1957), 417.
- [4] Lilley, G.M., Wall pressure fluctuations under turbulent boundary layer at subsonic and supersonic speeds, *AGARD Rept.*, 454 (1963).
- [5] Michael, S. H., Shock wave-turbulent boundary layer interaction in hypersonic flow, ARL 73-0137 (1973).
- [6] Dolling, D. S., Unsteadiness of shock wave induced turbulent boundary layer separation, *Turbulent Shear Layer/Shock Wave Interactions*, Ed. J. Delery, Springer, Berlin, Heidelberg (1986), 341—357.

- [7] Tran, T. T., D. K. M. Tan and S.M. Bogdonoff, Surface pressure fluctuations in a three-dimensional shock wave/turbulent boundary layer interaction at various shock strengths, AIAA Paper 85-1562 (1985).
- [8] Coe, C. E., Surface pressure fluctuations associated with aerodynamic-noise, NASA SP-207 (1969), 409.
- [9] 冉政, 振荡激波与湍流边界层相互干扰的研究, 中国科学技术大学近代力学系毕业论文 (1990).

## A Calculating Method of Shock Wave Oscillating Frequency Due to Turbulent Shear Layer Fluctuations in Supersonic Flow

Xu Li-gong

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei)*

Ran Zheng

*(Division of Postgraduate, China Aerodynamics Research and Development Center, Mianyang, Sichuan)*

### Abstract

One of the more severe fluctuating pressure environments encountered in supersonic or hypersonic flows is the shock wave oscillation driven by interaction of a shock wave with boundary layer. The high intensity oscillating shock wave may induce structure resonance of a high speed vehicle. The research for the shock oscillation used to adopt empirical or semiempirical method because the phenomenon is very complex. In this paper a theoretical solution on shock oscillating frequency due to turbulent shear layer fluctuations has been obtained from basic conservation equations. Moreover, we have attained the regularity of the frequency of oscillating shock varying with incoming flow Mach numbers  $M_\infty$  and turning angle  $\theta$ . The calculating results indicate excellent agreement with measurements. This paper has supplied a valuable analytical method to study aeroelastic problems produced by shock wave oscillation.

**Key words** shock wave oscillation, interaction of shock wave with boundary layer, fluctuating pressure, eigenfrequency of shock wave, turbulent acoustic radiation, aeroelastics