

预制V型裂纹尖端应力强度因子的研究*

王 成 端

(四川建材学院, 1991年4月18日收到)

摘 要

本文提出了爆炸载荷作用下预制V型裂纹的复变应力函数, 并用 Westergaard 方法推导了预制V型裂纹尖端的应力场和位移场, 从而得到了V型裂纹尖端的应力强度因子。爆破试验结果表明了公式的正确性。

关键词 V型裂纹 复变应力函数 应力强度因子

一、预制V型裂纹的形成及其应用现状

如图1, 从炮孔的孔口沿设计断裂方位用我们研制的专用切槽刀具在孔内壁切刻出一条V型槽口, 为了使岩石在设计方向的开裂面平整, 一般沿设计方向对称地在孔内壁切出两条V型槽。切割爆破实践证明^[1], 在眼间距合理的情况下, 爆破后各孔相互贯通, 完全可以沿着槽尖连线方向定向切割岩石。一般V型槽口长 a 远远小于炮孔半径 R , 因此近似地把V型槽口认为是V型裂纹。实际上, 岩体含有结构面, 如裂缝、断层和节理, 这些在岩层中以裂纹一般被简化为理想的直线裂纹, 但在很多情况下, 简化为V型槽口则更符合实际, 所以我们认为切制的V型槽口就是V型裂纹符合岩体的实际情况。另一方面, 研究裂纹扩展, 主要是研究裂纹尖端的形状和受载情况, 从而求出裂纹尖端的应力场、位移场和应力强度因子等参量, 故V型槽尖完全可以当作裂纹尖端来研究。正是鉴于以上原因, 我们将这种人为切制的V型槽口称为预制V型裂纹, 将采用了预制V型裂纹的控制爆破方法称为切槽爆破。文献[2]的作者称这种V型槽口为切槽式预制裂纹, 也就是这里所说的预制V型裂纹。

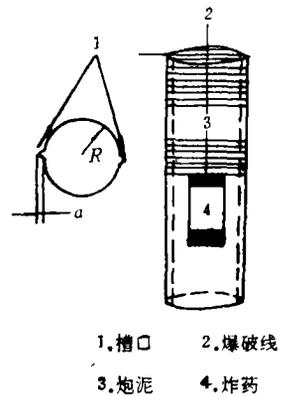


图 1

在工程应用中, Barker^[3]最先采用带预制V型裂纹的短棒对灰岩、粉砂岩进行了断裂试验, Costin^[4]用这种方法对油页岩进行了试验。为提高石油和天然气产量的钻井人工致裂方法中的裁剪脉冲加载法^[5], 也运用了这种预制裂纹思想。在机械加工中, 在金属棒料上

* 薛大为推荐。

加工V型切口,使其在低应力下容易脆断^[6]。在炮孔内壁的预制V型裂纹起动力集中和导向的作用,使岩石在爆炸载荷作用下,沿着V型槽尖连线方向断裂。预制V型裂纹是一般的拉开、内剪及张剪等三种型式中的第一种拉开型裂纹^[2]。由不同裂纹尖端的应力状态可知,裂纹尖端处的应力有奇异解。显然,当裂纹半径很小时,与其对应的应力相当大,因此这种预制裂纹在承受应力时起着应力集中的作用,从而在预制裂纹方向易于开裂扩展,达到爆破切割岩石的目的。但是用断裂力学中的一些观点处理岩石爆破问题时,目前仍存在着某些困难。实际上,岩石爆破是一断裂动力过程,为了分析问题的方便,下面将其作为准静态过程处理。综观各类裂纹的应力强度因子^[7],对于在爆炸载荷作用下的V型裂纹尖端的应力强度因子表达式,目前国内外还未见诸报道。本文在提出V型裂纹的复变应力函数基础上,推导出了V型裂纹尖端没有塑性区时的应力场、位移场和应力强度因子表达式。

二、预制V型裂纹尖端附近的应力场和位移场

1. Westergaard 方法

工程应用中所涉及的问题一般都是平面应变问题。Westergaard对I型裂纹提出了如下的复变应力函数^[8]:

$$\phi = \operatorname{Re} \iint Z_1 dz^2 + y \operatorname{Im} \int Z_1 dz \quad (2.1)$$

可以证明, ϕ 满足双调和方程, 所以 ϕ 是平面问题的应力函数。故

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\operatorname{Re} \iint Z_1 dz^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(y \operatorname{Im} \int Z_1 dz \right) \quad (2.2)$$

由解析函数的充分必要条件, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\operatorname{Re} \iint Z_1 dz^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\operatorname{Im} \int Z_1 dz \right) = -\operatorname{Re} \dot{Z}_1 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(y \operatorname{Im} \int Z_1 dz \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{Im} \int Z_1 dz + y \operatorname{Re} Z_1 \right) = 2 \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} \dot{Z}_1 \end{aligned}$$

\dot{Z}_1 表示 Z_1 的一阶导数。

上面两式代入(2.2)式则得 σ_x , 同理也可以求得, σ_y, τ_{xy} 如下式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1 - y \operatorname{Im} \dot{Z}_1 \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} \dot{Z}_1 + y \operatorname{Im} Z_1 \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} \dot{Z}_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式(2.3)就是Westergaard对I型裂纹提出的用复变应力函数表示的应力分量的表达式。

下面求位移分量的表达式。已知在平面应变情况下, 应力与应变有如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

E, μ 分别表示平面应力情况下的弹性模量和泊松比。剪切模量 G 和 E, μ 有如下关系:

$$E = 2G(1 + \mu)$$

已知应变与位移间的关系为

$$\varepsilon_x = u/x, \quad \varepsilon_y = \partial v/\partial y$$

积分则得

$$u = \int \varepsilon_x dx, \quad v = \int \varepsilon_y dy \tag{2.5}$$

式中 u, v 分别为沿 x, y 轴方向的位移, ε_x 和 ε_y 分别表示沿 x, y 轴方向的应变。

由(2.3)、(2.4)、(2.5)式, 则得

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2G} \left[(1-2\mu) \operatorname{Re} \left\{ Z_1 dz - y \operatorname{Im} Z_1 \right\} \right] \\ v &= \frac{1}{2G} \left[(1-2\mu) \operatorname{Im} \left\{ Z_1 dz - y \operatorname{Re} Z_1 \right\} \right] \end{aligned} \right\} \tag{2.6}$$

式(2.3)和(2.6)就是平面问题的复变函数解。下面关键的问题是建立坐标系, 用爆炸载荷下预制V型裂纹的边界条件, 确定复变应力函数 $Z_1(x, y)$ 。

2. 坐标系的建立和复变应力函数的提出

一般情况下, 切槽爆破均采用不偶合装药。爆破产生的动态冲击压力是爆生气体膨胀压力、空气冲击波阵面压力、高速运动的压缩空气和爆生气体质点冲击孔壁引起的增压这三部分的组合。设爆破时扩展至孔壁的动态冲击总压力为 P_0 。炮孔中药柱起爆后, 激起的应力波可近似地认为是径向柱面波。通常炮孔压力是以指数函数进行衰减的^[9], 于是动态爆破应力 $\sigma(t)$ 以下式表达:

$$\sigma(t) = -P_0 \exp[-R_0 t] \tag{2.7}$$

式中 R_0 为衰减指数, $\sigma(t)$ 为负表示压力。

对于切槽爆破这种情况, 为了考虑V型裂纹几何尺寸, 即槽口形状对应力强度因子的影响, 根据对称性, 取炮孔的一半来研究。坐标系的建立如图2所示, R 为炮孔半径, ω 为切槽角, a 为预制V型裂纹的长度, b 为裂纹尖端至炮孔中心的距离, 其余参数如图2 (V型裂纹已放大)。

根据所建立的 xoy 坐标系, 对于爆炸载荷作用下的V型裂纹, 其边界条件如下:

(1) 当 $y = \pm c, x = b - a$ 时, $\sigma_y = \sigma_x = \sigma, \tau_{xy} = 0$, 即V型裂纹接近孔壁处的应力等于爆炸应力。

(2) 当 $y = 0, x \rightarrow +\infty$ 时, $\sigma_y = \sigma_x = 0$, 即应力波扩散至无穷远处时, 岩石应力为零。

(3) 当 $y = 0, b < x < +\infty$ 时, $\sigma_y < \sigma$, 且 $x \rightarrow b$ 时, $\sigma_y \gg \sigma$, 因为裂纹尖端存在应力集中, 且愈接近V型裂纹尖端, 应力集中愈大。

利用上面这三个边界条件, 选定复变应力函数为

$$Z_1(x, y) = \sigma \left/ \left\{ 1 - \frac{[z - (b-a) - \operatorname{sign}(ic, \operatorname{Im}z)]^2}{[a - \operatorname{sign}(ic, \operatorname{Im}z)]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \tag{2.8}$$

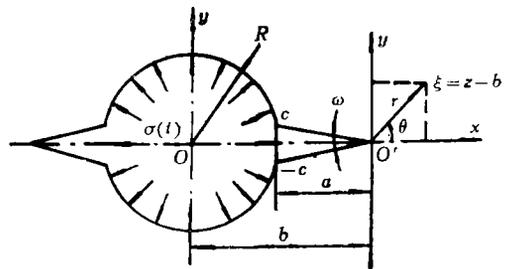


图 2

$$\text{式中 } z=x+iy, \text{ sign}(ic, \text{Im}z)=\begin{cases} ic, & y=\text{Im}z \geq 0 \text{ 时} \\ -ic, & y=\text{Im}z < 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (2.9)$$

由(2.8)式, 对 z 求导有

$$Z_1 = \frac{dz_1}{dz} = \frac{\sigma[z-(b-a)-\text{sign}(ic, \text{Im}z)]}{\left\{ 1 - \frac{[z-(b-a)-\text{sign}(ic, \text{Im}z)]^2}{[a-\text{sign}(ic, \text{Im}z)]^2} \right\}^{3/2}} \quad (2.10)$$

3. 应力场和位移场的推导

为了推导方便, 把图2中的坐标原点 $O(0, 0)$ 移到裂纹尖端点 $O'(b, 0)$ 处, 则

$$\xi=(x-b)+iy=z-b$$

$$\therefore z=\xi+b \quad (2.11)$$

用极坐标 $\xi(r, \theta)$ 代替直角坐标 $z(x, y)$, 则引入欧拉公式

$$\xi(r, \theta)=r \exp[i\theta]=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

为求得裂纹尖端点附近的应力场、应变场与位移, 必须使 $r \rightarrow 0$, 则 $\xi=r \exp[i\theta] \rightarrow 0$, 因此 $\xi=z-b \rightarrow 0$, $z=\xi+b \rightarrow b$, $z-b=\xi$, 代入(2.8)式则有

$$y=\text{Im}z \geq 0 \text{ 时,}$$

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sigma / \left\{ 1 - \frac{[z-(b-a)-ic]^2}{[a-ic]^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma(a-ic) / \{ [a-ic]^2 - [z-(b-a)-ic]^2 \}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma(a-ic) / \{ [a-ic+z-(b-a)-ic][a-ic-z+(b-a)+ic] \}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sigma(a-ic) / \{ (2a-2ic)(b-z) \}^{\frac{1}{2}} = \sigma(a-ic)^{\frac{1}{2}} / (-2\xi)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sigma \sqrt{a} \left(1 - i \frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2} i \xi^{1/2}} = \frac{\sigma \sqrt{a} \exp[-i\omega/4] / \sqrt{\cos \frac{\omega}{2}}}{\sqrt{2} e^{i\pi/2} (re^{i\theta})^{1/2}} \\ &= \frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2 \cos \frac{\omega}{2}}} \exp[-i\omega/4] r^{-1/2} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{\sigma \sqrt{a}}{\sqrt{2 r \cos \frac{\omega}{2}}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) + i \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) \right] \quad (2.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= \frac{dZ_1}{dz} = \frac{dZ_1}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\sigma(a-ic)^{1/2}}{(-2\xi)^{1/2}} \right) = \sigma(a-ic)^{1/2} / [\sqrt{2} i(-\xi) \cdot 2\sqrt{\xi}] \\ &= -\frac{\sigma \sqrt{a} \left(1 - i \tan \frac{\omega}{2} \right)}{2\sqrt{2} i \xi^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma \sqrt{a} \exp[-i\omega/4]}{2\sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2} \exp[i\pi/2] (re^{i\theta})^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma \sqrt{a}}{2\sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2}} r^{-3/2} \exp\left[-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{4} + \frac{3\theta}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{\sigma\sqrt{a}}{2\sqrt{2\cos\frac{\omega}{2}}} r^{-3/2} \left[\sin\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) + i\cos\left(\frac{3\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) \right] \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \int Z_1 dz &= \int Z_1 d\xi = \int \frac{\sigma((a-ic)^{1/2}}{\sqrt{2} \exp[i\pi/2] \sqrt{\xi}} d\xi \\ &= \frac{2\sigma(a-ic)^{1/2}}{\sqrt{2} \exp[i\pi/2]} (r \exp[i\theta])^{1/2} \\ &= -\frac{2\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\cos\frac{\omega}{2}}} r^{1/2} \left[\sin\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) + i\cos\left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\omega}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

$y = \text{Im}z < 0$ 时, 同样可以推得

$$Z_1 = -\frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) + i\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) \right] \quad (2.15)$$

$$\dot{Z}_1 = \frac{\sigma\sqrt{a}}{2\sqrt{2\cos\frac{\omega}{2}}} r^{-3/2} \left[\sin\left(\frac{3\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) + i\cos\left(\frac{3\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) \right] \quad (2.16)$$

$$\int Z_1 dz = -\frac{2\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2\cos\frac{\omega}{2}}} r^{1/2} \left[\sin\left(-\frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) + i\cos\left(-\frac{\theta}{2} - \frac{\omega}{4}\right) \right] \quad (2.17)$$

上面各式中, $\tan\omega/2=c/a$, ω 为切槽角.

$$\text{又} \quad y = r\sin\theta \quad (3.18)$$

将(2.12)式、(2.13)式、(2.15)式、(2.16)式和(2.18)式代入(2.3)式, 求得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\theta \cos\left(\frac{3\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \\ \sigma_y &= -\frac{\sigma\sqrt{a}}{\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \left[\sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) - \frac{1}{2} \sin\theta \cos\left(\frac{3\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \\ \tau_{xy} &= -\frac{\sigma\sqrt{a}}{2\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \sin\theta \sin\left(\frac{3\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

上式中, $\sin\theta \geq 0$ 时, $\omega/4$ 前取“+”号, $\sin\theta < 0$ 时, $\omega/4$ 前取“-”号.

再把式(2.19)代入(2.4)式, 式(2.12)、(2.15)、(2.14)、(2.17)、(2.18)代入(2.16)式, 则得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{2G\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \left[(2\mu-1) \sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) - \frac{1}{2} \sin\theta \cos\left(\frac{3\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{2G\sqrt{2rcos\frac{\omega}{2}}} \left[(2\mu-1) \sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\theta \cos\left(\frac{3\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\cos\frac{\omega}{2}}} \left[(2\mu-1)\sin\left(-\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\theta \cos\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \\ v &= \frac{\sigma\sqrt{a}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\cos\frac{\omega}{2}}} \left[(2\mu-1)\cos\left(-\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) + \frac{1}{2} \sin\theta \sin\left(\frac{\theta}{2} \pm \frac{\omega}{4}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

(2.19)式和(2.21)式就是在平面应变情况下V型裂纹尖端附近的应力场和位移场公式。

4. 复变应力函数模型的验证

下面全面验证一下,看复变应力函数模型(2.8)式是否会满足爆炸载荷作用下V型裂纹的边界条件。

(1) 当 $y = \pm c$, $x = b - a$ 时, 即 $z = (b - a) \pm ic$ 。由于应力场公式(2.19)适用于V型裂纹的尖端附近区域即 $r \rightarrow 0$ 的区域, 它不能用于离裂纹尖端较远的炮孔内壁上的 c 点, 故此时用公式(2.3)来验证。将 $z = (b - a) \pm ic$ 代入(2.8)式和(2.10)式得 $Z_1 = \sigma$, $\dot{Z}_1 = 0$, 亦即 $\operatorname{Re}Z_1 = \sigma$, $\operatorname{Im}Z_1 = 0$, $\operatorname{Re}\dot{Z}_1 = 0$, $\operatorname{Im}\dot{Z}_1$ 代入式(2.3), 则有 $\sigma_y = \sigma_x = \sigma$, $\tau_{xy} = 0$, 满足第一个边界条件。

(2) 当 $y = 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时, 即 $z = y + iy = r \exp[i\theta] \rightarrow +\infty$, 亦即 $\theta = 0$, $r \rightarrow +\infty$, 由公式(2.19), $\sigma_x = \sigma_y \rightarrow 0$, $\tau_{xy} = 0$; 如果将 $z \rightarrow +\infty$ 代入式(2.8), 则有 $z_1 \rightarrow 0$, 由此 $\operatorname{Re}Z_1 = 0$, $\operatorname{Im}Z_1 = 0$, 代入式(2.3)则有 $\sigma_y = \sigma_x = 0$, $\tau_{xy} = 0$, 满足第二个边界条件。

(3) 当 $y = 0$, $b < x < +\infty$ 时, Z_1 不为零而且 $Z_1 < \sigma$, 由公式(2.3), 即有 $\sigma_y = \sigma_x < \sigma$, 特别当 $y = 0$, $x \rightarrow b$ 时, 由式(2.8), Z_1 达到很高的数值, 由式(2.3) $\sigma_y = \sigma_x \gg \sigma$, 出现应力集中现象, 由 $y = 0$, τ_{xy} 恒为零; 如果由公式(2.19), 此时有 $r \rightarrow 0$, $\theta = 0$, 故 $\sigma_x = \sigma_y \rightarrow \infty \gg \sigma$, $\tau_{xy} = 0$, 出现应力集中, 满足第三个边界条件。

于是我们可以得到结论: V型裂纹的复变应力函数表达式(2.8)是正确的, 并由此推导出应力场公式(2.19)、应变场公式(2.20)和位移场公式(2.21)也是正确的。

三、预制V型裂纹尖端的应力强度因子

1. 应力强度因子的表达式

在V型裂纹尖端附近的任一点 $\xi(r, \theta)$, 只要 r 与 θ 值确定, 则由式(2.19)、(2.20)、(2.21), 就能得到裂纹尖端附近区域该点的弹性应力、应变与位移量。令

$$K_{\text{V}} = \frac{\sigma\sqrt{\pi a} \sin\frac{\omega}{4}}{\sqrt{\cos\frac{\omega}{2}}} \quad (3.1)$$

则整理(2.19)式和(2.21)式, 得到

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = -\frac{K_{\text{V}}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} \cotan \frac{\omega}{4} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \pm \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \cotan \frac{\omega}{4} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \pm \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \sin \theta \left(\cotan \frac{\omega}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \pm \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \frac{K_{\text{V}}}{4G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{cases} -\cotan \frac{\omega}{4} \sin \frac{\theta}{2} \left(2\mu - 1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \pm \cos \frac{\theta}{2} \left(2\mu - 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \cotan \frac{\omega}{4} \cos \frac{\theta}{2} \left(2\mu - 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \pm \sin \frac{\theta}{2} \left(2\mu - 1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

式中G为剪切弹性模量，μ为泊松比。

从式(3.2)的第一项看出，在裂纹尖端r→0的极近处，弹性应力σ_x、σ_y和τ_{xy}按1/√r趋于无限大，即具有1/√r的奇异性。(3.2)式中还应包含r的幂次为零或为正数的非奇异项，由于在裂纹尖端附近，非奇异项可略去不计，所以在推导公式时已将此项省去。对无限大板中穿透性裂纹受与裂纹表面垂直均匀拉应力σ作用的裂纹尖端应力场公式^[10]为

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_{\text{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (3.4)$$

这里K_I为I型裂纹的应力强度因子。将(3.2)式与(3.4)式比较可以看出，除了K_I与K_V的具体表达式不一致外，(3.2)式中的第二项完全与(3.4)式相同，而第一项反映了裂纹体形状不同对应力场的影响。(3.2)式的第一项就是V型裂纹对穿透性裂纹尖端应力场(3.4)式的修正项。由此知道，(3.2)式的物理意义是十分清晰的，这从一侧面反映了所推公式的正确性。

在式(3.2)和式(3.3)的各个表达式中，有一个共同的常数因子K_V，表明应力和位移各分量将随因子K_V按同一比例增减。因子K_V表示裂纹尖端应力场的强弱程度，就是V型裂纹尖端的应力强度因子。

2. 应力强度因子K_V的讨论

应力强度因子不依赖于坐标r和θ，即不涉及应力和位移在裂纹尖端附近的分布情况，是表示场强的物理量。对于线弹性物体来说，应力强度因子与载荷呈线性关系，并依赖于理与裂纹的几何形状和大小^[11]。应力强度因子是表征裂纹尖端附近应力场强的一个有较参量。如果将K_V定义为σ√πa与穿透性裂纹的K_I一致，则反映不出V型裂纹的几何形状和大小对应力强度因子的影响。但式(3.1)似乎有一个与人们常识不相吻合的地方，那就是随着切槽角ω的增强，应力强度因子K_V是不断增加的，但从应力集中的观点，应该是随ω的增加，K_V减小。

事实上, 预制V型裂纹的形状与聚能装药的药形罩相同。由轴对称径向聚能射流的解析研究^[12]知道, 带有药形罩的径向聚能装药结构爆炸时形成的射流形如“尖劈”, 有较强的聚能定向切割作用。试验表明, 当 $\omega \in (0^\circ, 180^\circ)$ 时, ω 越大, 断裂越快。这是因为V型槽越大, 爆炸时聚集在槽内的爆炸能越高, 从而形成了一能量密度极高的能流面, 这个能流面就象钢刀一样沿炮眼连线方向切开岩体。从理论上讲, 应力强度因子越大, 则裂纹扩展速度就高, 裂纹扩展距离也就远。那么断裂效果最佳的切槽角 ω 是多大呢? 根据理论分析和试验知道^[11], 最佳的切槽角为 60° , 而且在机械加工中, 切制 60° 角的刀具还容易加工。所以在实际工程应用中, 我们均采用 60° 的切槽角。

由以上的讨论分析可以得到结论: (3.1)式定义的 K_{V} 表达式就是V型裂纹尖端的应力强度因子公式。

四、爆破试验与结果

为了验证本文公式的正确性, 我们制做了长 \times 宽 \times 高 $=400\text{mm} \times 400\text{mm} \times 300\text{mm}$ 的混凝土试件, 并在试件中心钻一直径为 25mm , 深 200mm 的炮孔预制V型裂纹长 $a=4\text{mm}$, 切槽角 ω 分别为 30° 、 45° 和 60° 三种情况, 药包直径 $D_e=14\text{mm}$, 采用2号岩石硝铵炸药切割混凝土试件。本文的具体测试工作由中国煤炭科学研究院抚顺研究所完成。各参数的值如下:

$$E=1.52 \times 10^4 \times 9.8\text{N/cm}^2, \quad \mu=0.16, \quad P_H=15324 \times 9.8\text{N/cm}^2,$$

$$\rho_0=1.0 \times 10^{-3} \times 9.8\text{N/cm}^3, \quad \rho_1=0.0204 \times 10^{-3} \times 9.8\text{N/cm}, \quad u_H=3430\text{m/s},$$

$$P_s=180 \times 9.8\text{N/cm}^2.$$

E 表示混凝土试件的弹性模量, μ 为泊松比, P_H 为爆生气体的初始压力, ρ_0 为炸药的密度, ρ_1 为炮孔的线装药密度, u_H 为炸药的初始速度, P_s 表示初始空气冲击波的阵面压力。

由于切割爆破均沿着预制V型裂纹尖端连线断开, 所以较为有意义也是最典型的试验数据是 $\theta=0^\circ$ 的面。下面为根据本文推导的公式计算的理论应变值与测试应变值的比较表:

表 1 实测应变与理论应变的比较表

$r(\text{cm})$	应变($\mu\epsilon$)	ω		
		30°	45°	60°
3.35	测试值	2320	3300	6941
	理论值	2380	2638	4985
8.35	测试值	1348	2460	3400
	理论值	1508	2308	3158

从表中数据可以得到以下结论:

1. 测试值与理论值吻合得较好, 表明了本文公式的正确性。这主要是由于理论推导时选取的复变应力函数 $Z_I(x, y)$ 是合理的、正确的。

2. 由公式(2.20)可知, r 越大, 应变越小, 表中数据也与此趋向一致, 表明本文在弹性情况下推导的各个公式是正确的。

3. 切槽角 $\omega=60^\circ$ 时切割效果最佳, 断裂面平整, 这由大量的实际切槽爆破试验所证实。从表中数据看, 在相同爆炸载荷下, 切槽角为 60° 时, 应变最大, 也证实了这一结论。

4. 由公式(3.1)知, 当爆炸载荷确定后, 应力强度因子 K_{II} 仅与预制V型裂纹的几何形状及切槽角 ω 有关。 ω 越大, K_{II} 也越大, 从而切割效果越好。但是 ω 有一个范围, 只有在 $\omega \in (0^\circ, 180^\circ)$ 时, V型裂纹才有聚能定向切割作用。根据试验的结果及切槽刀具加工来看, $\omega = 60^\circ$ 时, 切割效果最佳。实际切槽爆破中, 一般我们均采用 $\omega = 60^\circ$ 的切槽刀具来切制V型裂纹。

致谢 本文在写作过程中, 得到四川建材学院张志呈教授的鼓励。文中的试验数据承蒙张志呈教授提供, 在此深表谢忱。

参 考 文 献

- [1] 张志呈、王成端, 切槽爆破中切槽角的研究, 爆炸与冲击, (3) (1990).
- [2] 张天锡、吴立, 槽孔联合控制爆破法采石试验, 爆破, (4) (1987).
- [3] Barker, L.M., A simplified method for measuring plane strain fracture toughness, *Eng. Fract. Mech.*, 9 (1977).
- [4] Costin, L.S., Static and dynamic fracture behaviours of oil shale, ASTM, STP745, Philadelphia (1981).
- [5] 王清涛, 裁剪脉冲加载法研究, 中国科学, (10) (1987).
- [6] 魏庆同、郎福元, 机械加工中的断裂设计概论, 甘肃工业大学学报, 1 (1982).
- [7] 中国航空研究院主编, 《应力强度因子手册》, 科学出版社 (1981).
- [8] 李贺等编著, 《岩石断裂力学》, 重庆大学出版社 (1988).
- [9] 刘清荣等, 石材预裂爆破成缝机理探讨, 爆破, (2) (1989).
- [10] 苏翼林主编, 《材料力学》(下册), 人民教育出版社 (1980).
- [11] 凌伟明, 光面爆破和预裂爆破破裂发展过程的研究, 中国矿业大学工学博士学位论文 (1988).
- [12] 曾新吾、薛鸿陆, 线型聚能装药的理论研究, 爆炸与冲击, (2) (1988).

Study of the Stress Intensity Factor of Preformed V Shape Fracture Tip

Wang Cheng-duan

(Department of Non-Metallic Minerals, Sichuan Institute of Building Materials, Mianyang)

Abstract

This paper gives the complex stress function of preformed V shape fracture under the blasting load. With Westergaard's method, the stress field and displacement field of preformed V shape fracture tip are derived, and hence its stress intensity factor is obtained. The blasting test result shows that the formulas derived are correct and effective.

Key words V shape fracture, complex stress function, stress intensity factor