

文章编号: 1000\_0887(2005) 01\_0067\_05

# 具有 Gilbert 项的 Landau\_Lifshitz 方程的 显式平方守恒格式\*

孙建强<sup>1</sup>, 马中骥<sup>1</sup>, 秦孟兆<sup>2</sup>

(1. 中国科学院 高能物理研究所 理论物理室, 北京 100049;  
2. 中国科学院 计算数学研究所, 北京 100080)

(我刊原编委许政范推荐)

摘要: 构造了一种解具有 Gilbert 项的 Landau\_Lifshitz 方程的显式平方守恒格式。基本思想是离散 Landau\_Lifshitz 方程成常微分方程组, 应用李群方法和显式 Runge\_Kutta 方法解常微分方程组。数值试验比较了两方法的保平方守恒特性和精度, 得出李群方法(RK\_Cayley 方法)比相应的 Runge\_Kutta (RK) 方法有更好的精度和保平方守恒特性。

关键词: 显式平方守恒格式; 李群方法; RK\_Cayley 方法; RK 方法; Landau\_Lifshitz 方程

中图分类号: O241.8; O152.5 文献标识码: A

## 1 引言及问题提出

对常微分方程组

$$dY/dt = A(t, Y) Y, Y \in R^n, t \geq 0, \quad (1)$$

$A(t, Y)$  是反对称矩阵。从

$$d(Y^T Y)/dt = (Y')^T Y + Y^T Y' = Y^T(A^T + A) Y = 0$$

且  $\|Y(0)\| = a$ ,  $a$  是一个正常数, 可以得到  $\|Y(t)\| = a$ 。具有平方守恒特性的常微分方程组(1), 经典的数值方法, 如显式 Runge\_Kutta 方法, 多步方法不能保方程组(1)的平方守恒特性, 而隐式中点格式保平方守恒特性, 是隐式的, 不易计算。保平方守恒格式保方程的能量平方守恒和具有非线性稳定性的优点。

本文利用李群方法来构造了一种显式平方守恒格式解具有 Gilbert 项的 Landau\_Lifshitz 方程。通过数值试验得出该方法不仅有相应 Rung\_Kutta 方法相同的精度, 且能保方程的平方守恒特性。

## 2 基本方程

1935 年, Landau\_Lifshitz 等人提出了如下具有电磁场的铁磁链的耦合方程组

\* 收稿日期: 2002\_08\_20; 修订日期: 2004\_10\_10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(90103003, 10401033)

作者简介: 孙建强(1971—), 男, 湖南双峰县人, 博士(联系人, Tel: + 86\_10\_88236166; E\_mail: sunjq@mail.ihep.ac.cn)。

$$\mathbf{Z}_t = \lambda_1 \mathbf{Z} \times (\Delta \mathbf{Z} + \mathbf{H}) - \lambda_2 \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \times (\Delta \mathbf{Z} + \mathbf{H})), \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{E} / \partial t + \sigma \mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t - \rho (\partial \mathbf{Z} / \partial t), \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{H} + \beta \dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{Z} = 0, \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{Z}} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \sigma, \beta, \rho$  是常数,  $\lambda_2 \geq 0, \sigma \geq 0$ . 向量函数  $\mathbf{Z}(x, t) = (u(x, t), v(x, t), w(x, t))^T$  是磁化强度,  $\mathbf{H}(x, t) = (H_1(x, t), H_2(x, t), H_3(x, t))^T$  是磁场,  $\mathbf{E}(x, t) = (E_1(x, t), E_2(x, t), E_3(x, t))^T$  是电场,  $\mathbf{H}^0 = \Delta \mathbf{Z} + \mathbf{H}$  为有磁磁场,  $\Delta \mathbf{Z} = (u_{xx}, v_{xx}, w_{xx})^T, \dot{\mathbf{Z}} = (\partial u / \partial x, \partial u / \partial x, \partial u / \partial x)^T, \times$  是  $R^3$  中的向量叉积,  $f = f(x, t), f = u, v, w$ . 如果  $\mathbf{H} = \mathbf{0}, \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , 则得到了空间自变量一维具有 Gilbert 项的 Landau-Lifshitz 方程

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_t = \lambda_1 \mathbf{Z} \times \Delta \mathbf{Z} - \lambda_2 \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \times \Delta \mathbf{Z}), \\ \mathbf{Z}(x+L, t) = \mathbf{Z}(x, t), \mathbf{Z}(x, 0) = \mathbf{Z}_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\lambda_2 \geq 0$  为 Gilbert 阻尼项. 1993 年郭柏灵对方程 (7) 的解的性质作了系统的研究, 特别发现 Riemann 的调和映射与解的密切关系<sup>[1,2]</sup>. 当  $\lambda_2 = 0$  时, 方程 (7) 有解

$$\mathbf{Z}(x, t) = \mathbf{a} \cos(\alpha) + \{\mathbf{b} \cos(kx - \omega t) + \mathbf{c} \sin(kx - \omega t)\} \sin(\alpha), \quad (8)$$

其中  $\omega = \lambda_1 k^2 \sin(\alpha); \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in R^3$  是右手系单位正交向量,  $\alpha, k$  是任意实数. 这种形式的解称之为自旋波<sup>[1,3]</sup>. 离散方程 (7) 可得到

$$\begin{cases} \partial_j \mathbf{Z}_j = \lambda_1 \mathbf{Z}_j \times \Delta_h \mathbf{Z}_j - \lambda_2 \mathbf{Z}_j \times (\mathbf{Z}_j \times \Delta_h \mathbf{Z}_j), \\ \mathbf{Z}_j(x+L, t) = \mathbf{Z}_j(x, t), \mathbf{Z}_j(x, 0) = \mathbf{Z}_0(x_j), \end{cases} \quad (9)$$

$\Delta_h \mathbf{Z}_j = (\mathbf{Z}_{j+1} - 2\mathbf{Z}_j + \mathbf{Z}_{j-1}) / (\Delta h)^2, j = 1, 2, \dots, n$  和  $\mathbf{Z}_j = (u_j, v_j, w_j)^T$ . 在 [4] 中, 利用差分法证明了方程 (7) 初边值问题的可解性. 在 [5] 中, 提出了一些平方和拟平方守恒格式. 取

$$\mathbf{Y} = (u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N, w_1, w_2, \dots, w_N)^T,$$

离散方程 (9) 可写成

$$d\mathbf{Y}/dt = \lambda_1 \mathbf{A}(\mathbf{Y}) \mathbf{Y} - \lambda_2 \mathbf{B}(\mathbf{Y}) \mathbf{Y} = \mathbf{C}(\mathbf{Y}) \mathbf{Y}, \quad (10)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W} & -\mathbf{V} \\ -\mathbf{W} & 0 & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{U} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W} & -\mathbf{V} \\ -\mathbf{W} & 0 & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & -\mathbf{U} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \Delta u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta u_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta u_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Delta v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta v_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \Delta w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta w_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & v_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_N \end{bmatrix},$$

其中  $\Delta f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}, f = u, v, w, i = 1, \dots, N$  和  $u_i = -w_i(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + v_i(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), v_i = w_i(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), w_i = -v_i(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + u_i(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}), i = 1, \dots, N$ 。方程(7)的解有周期性  $u_0 = u_N, u_{N+1} = u_1, v_0 = v_N, v_1 = v_{N+1}, w_0 = w_N, w_{N+1} = w_1$ , 可知  $dY/dt = C(Y)Y$  是形如方程(1)的  $n = 3N$  的常微分方程组,  $C(Y)$  是反对称矩阵。

### 3 李群方法

对常微分方程组

$$dY/dt = A(t, Y)Y, Y(0) = Y_0, Y \in R^n, \tag{11}$$

$A(t, Y)$  是反对称矩阵。经典的二阶显式 Runge-Kutta (RK) 方法

$$V_1 = Y_n, K_1 = A(t, V_1) V_1, \tag{12}$$

$$V_2 = Y_n + 0.5hK_1, K_2 = A\left(t + 0.5h, V_2\right) V_2, \tag{13}$$

$$\Delta = hK_2, \tag{14}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta. \tag{15}$$

和多步方法不保微分方程(11)的平方守恒特性, 因此需寻找一种显式平方守恒格式。而李群方法是一种保结构算法[6], 可相应提出一种二阶显式 RK\_Cayley 方法

$$V_1 = 0, K_1 = A(t, Y_n), V_2 = \frac{1}{2}hK_1, \tag{16}$$

$$K_2 = A(t, \text{cay}(V_2)Y_n) - \frac{1}{2}[V_2, A(t, \text{cay}(V_2)Y_n)] - \frac{1}{4}V_2 \cdot A(t, \text{cay}(V_2)Y_n) \cdot V_2, \tag{17}$$

$$\Delta = hK_2, \tag{18}$$

$$Y_{n+1} = e^{\Delta}Y_n, \tag{19}$$

其中  $\text{cay}(V) = (I - V/2)^{-1}(I + V/2)$ 。这种格式具有保平方守恒性, 即  $\|Y(t_{n+1})\| = \|Y(t_n)\|$ , 并且具有二阶 RK 方法相同精度。因此能保方程能量平方守恒, 并能长期稳定的计算[7]。

### 4 数值试验和结论

通过对 Landau-Lifshitz 方程的数值求解, 从精度和平方守恒特性两个方面来比较二阶 RK\_Cayley 方法和经典的二阶显式 RK 方法。

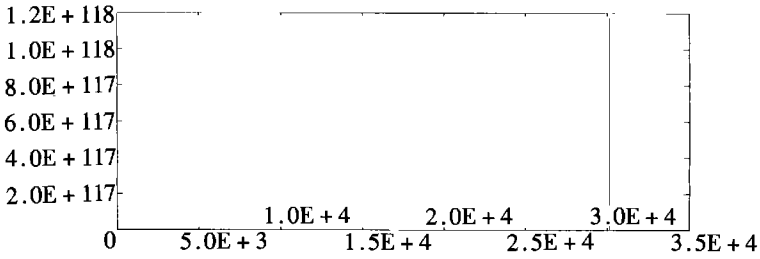
数值试验 1 取  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, k = 2\pi, \alpha = \pi/5, N = 20, \Delta t = 0.0001$ 。误差定义为: 误差 =  $\max |Y_i - Y_i(k\Delta t)|$ , 其中  $Y_i$  为  $t = k\Delta t$  的精确解。

表 1 经典的 RK 方法和 RK\_Cayley 方法所得数值解在不同时刻的整体误差比较

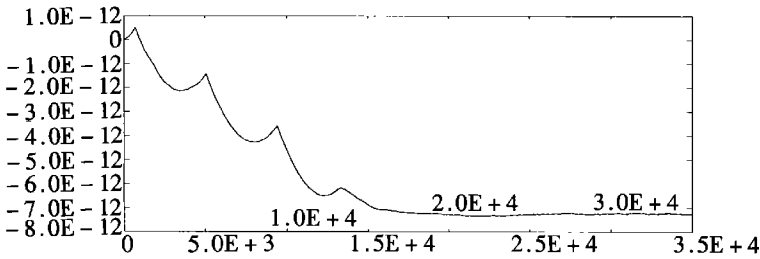
	$t = 0.02$	$t = 0.1$	$t = 0.6$
R	$3.028 \times 10^{-3}$	$1.606 \times 10^{-2}$	0.095
C	$2.406 \times 10^{-3}$	$1.264 \times 10^{-2}$	0.0821

表 1 中 R 表示 RK 方法的误差, C 表示 RK\_Cayley 方法的误差。从表 1 知, RK\_Cayley 方法比 RK 方法更精确。比较两方法的平方守恒特性, 定义平方守恒误差:

$$S = (Y_1(k\Delta t)^2 + \dots + Y_n(k\Delta t)^2) - (Y_1(0)^2 + \dots + Y_n(0)^2).$$

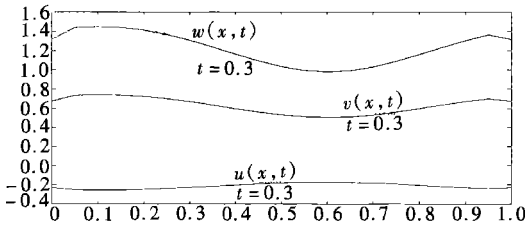


(a) 用 RK 方法解得平方守恒误差图

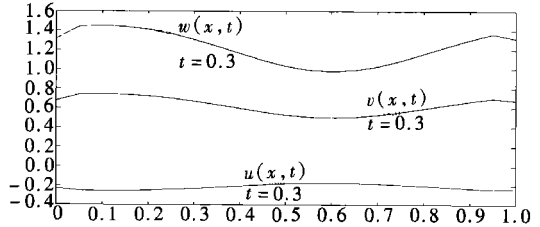


(b) 用 RK\_Cayley 方法解得平方守恒误差图

图 1



(a) 用 RK 方法得到 t= 0.3 时图象



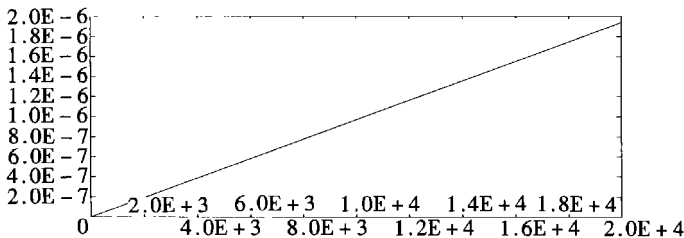
(b) 用 RK\_Cayley 方法得 t= 0.3 时图象

图 2

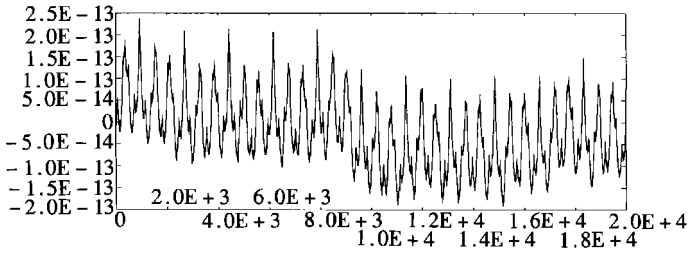
图 1(a) 用 RK 方法解得平方守恒误差图, 在  $t = 3.1$  附近发生爆破, 不稳定. 图 1(b) 用 RK\_Cayley 方法得平方守恒误差图, 可许误差内保平方守恒.

数值试验 2 取  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \alpha = \sqrt{5}, k = 2\pi, N = 20, \Delta t = 0.0001$ . 图 2(a) 是用 RK 方法得  $t = 0.3$  时图象, 图 2(b) 用 RK\_Cayley 方法得  $t = 0.3$  时图象, 从图知, 两方法求得的数值解相同.

图 3(a) 是用 RK 方法解得平方守恒误差图, 误差呈线性增长, 可知不具有保方程平方守恒特性, 图 3(b) 是用 RK\_Cayley 方法解得平方守恒误差图, 可许误差内保持方程的平方守恒.



(a) 用 RK 方法解得平方守恒误差图



(b) 用 RK\_Cayley 方法解得平方守恒误差图

图 3

由此可知李群方法能保方程平方守恒特性, 而显式 Runge\_Kutta 方法不保方程平方守恒特性, 不稳定。

### [参 考 文 献]

- [1] 郭柏灵. 自旋波与铁磁链速方程[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2000.
- [2] Jason Frank, HUANG Wei\_zhang, Benediet Leimkuler. Geometric integration for classical spin system [J]. J Comput Phys, 1997, **133**(1): 160—172.
- [3] 鲁百年, 房少梅. 铁磁链方程的显式差分分解[J]. 纺织高校基础科学学报, 1995, **8**(3): 225—229.
- [4] ZHOU Yu\_lin, GUO Bo\_ling. Finite difference solution of the boundary problems for the systems of the ferro\_magnetic chain[J]. Journal of Comp Mathematics, 1983, **1**(3): 294—302.
- [5] 秦孟兆. 铁磁链方程组的两个差分格式[J]. 计算数学, 1984, (4): 443—444.
- [6] Hans Munthe\_Kaas. High order Runge\_Kutta methods on Manifolds[J]. Appl Numer Math, 1999, **29** (1): 115—127.
- [7] Arieh Iserles. Numerical analysis in Lie groups[R]. Cambridge CB3 9EW, England, 2000.

## Explicit Square Conserving Schemes of Landau\_Lifshitz Equation With Gilbert Component

SUN Jian\_qiang<sup>1</sup>, MA Zhong\_qi<sup>1</sup>, QIN Meng\_zhao<sup>2</sup>

(1. Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Science, Beijing 100049, P. R. China;

2. Institute of Computational Mathematics, Chinese Academy of Science, Beijing 100080, P. R. China)

**Abstract:** A kind of explicit square conserving scheme is proposed for the Landau\_Lifshitz equation with Gilbert component. The basic idea was to semidiscrete the Landau\_Lifshitz equation into the ordinary differential equations is skewsymmetry matrix. Then the Lie group method and the Runge\_Kutta (RK) method were applied to the ordinary differential equations. The square conserving property and the accuracy of the two methods were compared. Numerical experiment results show the Lie group method has the good accuracy and the square conserving property than the RK method.

**Key words:** explicit square conserving scheme; Lie\_group method; RK\_Cayley method; RK method; Landau\_Lifshitz equation